

УДК 528.063

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ НУЛЬ-СВОБОДНЫХ ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

канд. техн. наук, доц. Г.Е. ГОЛОВАНЬ,
канд. техн. наук, доц. И.П. ШЕВЕЛЕВ, канд. техн. наук, доц. В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются вопросы получения обратной матрицы весов, используемой для оценки точности функции измеренных и уравненных величин для случая, когда геодезические сети не содержат исходных пунктов. Такие сети называют нуль-свободными. Отмечается, что для обработки нуль-свободных плановых геодезических сетей можно применять как известные методы, предложенные академиком А.Н. Тихоновым; методы, использующие псевдоинверсию; метод, основанный на использовании координат всех пунктов геодезической сети, так и новый метод, предложенный профессором В.И. Мицкевичем. Выполнено сравнение одного из известных методов обработки нуль-свободных геодезических сетей с новым, использующим алгоритм рекуррентного уравнивания, широко применяемый в геодезии благодаря трудам профессора Ю.И. Маркузе.

Известно, что для геодезических сетей, не содержащих исходных пунктов (так называемых нуль-свободных), определитель матрицы системы нормальных уравнений при параметрическом способе уравнивания равен нулю, т.е. говорят, что эта матрица вырожденная. Существуют несколько методов получения обратной матрицы весов Q от вырожденной матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений N :

- 1) метод псевдоинверсии, рассчитанный на обработку любых геодезических сетей, но не устойчивый при возмущенных коэффициентах систем уравнений;
- 2) метод регуляризации, предложенный А.Н. Тихоновым (область применения та же, что в первом методе);
- 3) метод Г.Г. Асташенкова (для нивелирных и спутниковых GNSS-сетей);
- 4) метод В.Н. Ганьшина (только для нивелирных сетей);
- 5) метод, основанный на использовании координат всех пунктов геодезической сети (для плановых и пространственных сетей);
- 6) метод В.И. Мицкевича с областью применения первых двух.

Нами выполняется сравнение пятого метода обработки нуль-свободных геодезических сетей с новым, шестым методом, использующим алгоритм рекуррентного уравнивания.

Рекуррентное (последовательное) уравнивание благодаря исследованиям по выбору исходной матрицы обратных весов неизвестных [3; 4] оказалось широко применяемым для решения многих современных задач уравнивательных вычислений.

В данной работе приведены новые формулы для вычисления главных псевдообратных матриц A^+ и $N^+ = (A^T P A)^+$ на базе параметрического уравнивания. Это позволило уравнивать любые сети (несвободные, нуль-свободные и свободные), содержащие или не содержащие дефекты данных.

Основные формулы обработки нуль-свободных геодезических сетей для пятого и шестого методов. Главная формула пятого метода, основанного на использовании координат всех пунктов нуль-свободной геодезической сети [1]:

$$(A^T P A)^+ = (A^T P A + R^T R)^{-1} - R^T (R R^T R R^T)^{-1} R, \quad (1)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_k & -X_k \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_k & Y_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

в которой X_k, Y_k – координаты пунктов, отнесенные к центру сети (уклонения от X_{cp}, Y_{cp}); k – количество всех пунктов геодезической сети.

Обозначим $N = (A^T P A)$, тогда $N^+ = (A^T P A)^+$ – псевдообратная матрица системы нормальных уравнений.

Основной формулой шестого метода является выражение [2], справедливое для любой матрицы N :

$$A^+ = Q_{рек} A^T P^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где $Q_{рек}$ – матрица обратных весов, найденная рекуррентным способом при соответствующем выборе матрицы Q_0 .

Матрицу N^+ можно вычислить для случаев равноточных или неравноточных измерений по формуле [2]:

$$N^+ = Q = A^+ (A^+)^T. \quad (4)$$

Формулы для вычисления Q для обычных (не нуль-свободных) геодезических сетей хорошо известны [3; 4]:

$$Q_i = Q_{i-1} - Z_i^T Z_i / g_i; \quad (5)$$

$$Z_i^T = Q_{i-1} A_i^T; \quad (6)$$

$$g_i = \frac{1}{P_i} + A_i Z_i^T, \quad (7)$$

где i – номер измерения.

При подключении последнего n -го измерения

$$Q_{рек.} = Q_n. \quad (8)$$

При этом [3]

$$Q_0 = 10^m E. \quad (9)$$

Числовые примеры

Рассмотрим вычисление обратной матрицы весов Q для геодезического четырехугольника (рис. 1), не содержащего исходных пунктов.

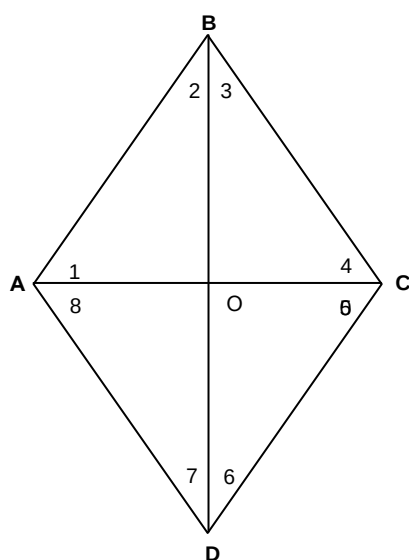


Рис. 1. Геодезический четырехугольник

Координаты пунктов геодезического четырехугольника представлены в таблице 1.

Таблица 1

Координаты пунктов геодезического четырехугольника

Название пункта	x , м	y , м	X , м	Y , м
A	1100	100	75	-517,5
B	1650	640	625	22,5
C	1250	1230	225	612,5
D	100	500	-925	117,5
Ср.	1025	617,5	0	0

В таблице 1 x , y – координаты пунктов; X , Y – отклонения от $X_{ср}$, $Y_{ср}$.

Найденная по формуле (2) матрица R представлена в таблице 2.

Таблица 2

Матрица R

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
-517,5	-75,0	22,5	-625,0	612,5	-225,0	-117,5	925,0
75,0	-517,5	625,0	22,5	225,0	612,5	-925,0	-117,5

Матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок для данного примера (см. геодезический четырехугольник безысходных пунктов, рис. 1) представлена в таблице 3.

Таблица 3

Матрица A

№ параметра	δX_A	δY_A	δX_B	δY_B	δX_C	δY_C	δX_D	δY_D
1	-8,1074	167,143	187,4819	-190,9538	-179,3745	23,8108	0	0
2	187,4819	-190,9538	-175,5596	58,9566	0	0	-11,9223	131,9972
3	0	0	-251,4347	-30,3841	239,5124	162,3813	11,9223	-131,9972
4	-179,3745	23,8108	239,5124	162,3813	-60,1379	-186,192	0	0
5	179,3745	-23,8108	0	0	-98,2204	-104,0347	-81,1541	127,8455
6	0	0	11,9223	-131,9972	-81,1541	127,8455	69,2318	4,1517
7	-71,1258	-177,8145	-11,9223	131,9972	0	0	83,0481	45,8173
8	-108,2487	201,6253	0	0	179,3745	-23,8108	-71,1258	-177,8145

Матрица коэффициентов нормальных уравнений $N = (A^T P A)$ дана в таблице 4.

Таблица 4

Матрица N

1,1634E + 05	-5,4880E + 04	-7,6550T + 04	-2,5910T + 04	-2,4790T + 04	1,7120T + 04	-1,5000T + 04	6,3670T + 04
-5,4880E + 04	1,3780E + 05	7,2680T + 04	-6,2780T + 04	7,0900T + 03	-2,7800T + 03	-2,4900T + 04	-7,2250T + 04
-7,6550E + 04	7,2680E + 04	1,8684T + 05	-2,7700T + 03	-1,0922T + 05	-7,9440T + 04	-1,0700T + 03	9,5200T + 03
-2,5910E + 04	-6,2780E + 04	-2,7700T + 03	1,0208T + 05	2,7920T + 04	-5,6590T + 04	7,6000T + 02	1,7290T + 04
-2,4790E + 04	7,0900E + 03	-1,0922T + 05	2,7920T + 04	1,4157T + 05	4,1390T + 04	-7,5500T + 03	-7,6400T + 04
1,7120E + 04	-2,7800E + 03	-7,9440T + 04	-5,6590T + 04	4,1390T + 04	8,9340T + 04	2,0920T + 04	-2,9970T + 04
-1,5000E + 04	-2,4900E + 04	-1,0700T + 03	7,6000T + 02	-7,5500T + 03	2,0920T + 04	2,3620T + 04	3,2200T + 03
6,3670E + 04	-7,2250E + 04	9,5200T + 03	1,7290T + 04	-7,6400T + 04	-2,9970T + 04	3,2200T + 03	8,4930T + 04

Матрица Q, полученная как известным, так и новым методом, разработанным В.И. Мицкевичем (2010 г.), представлена в таблице 5.

Таблица 5

Матрица Q

0,4526T - 5	0,2061T - 5	-0,1355T - 5	-0,0769T - 5	0,0203T - 5	-0,2366T - 5	-0,3374T - 5	0,1074T - 5
0,2061T - 5	0,3781T - 5	-0,0027T - 5	-0,1016T - 5	0,0968T - 5	-0,2024T - 5	-0,3002T - 5	-0,0741T - 5
-0,1355T - 5	-0,0027T - 5	0,1727T - 5	-0,0016T - 5	-0,1153T - 5	-0,0006T - 5	0,0781T - 5	0,0049T - 5
-0,0769T - 5	-0,1016T - 5	-0,0016T - 5	0,3033T - 5	0,1306T - 5	-0,2109T - 5	-0,0521T - 5	0,0093T - 5
0,0203T - 5	0,0968T - 5	-0,1153T - 5	0,1306T - 5	0,2382T - 5	-0,1301T - 5	-0,1431T - 5	-0,0973T - 5
-0,2366T - 5	-0,2024T - 5	-0,0006T - 5	-0,2109T - 5	-0,1301T - 5	0,4599T - 5	0,3673T - 5	-0,0466T - 5
-0,3374T - 5	-0,3002T - 5	0,0781T - 5	-0,0521T - 5	-0,1431T - 5	0,3673T - 5	0,4024T - 5	-0,0150T - 5
0,1074T - 5	-0,0741T - 5	0,0049T - 5	0,0093T - 5	-0,0973T - 5	-0,0466T - 5	-0,0150T - 5	0,1114T - 5

Используем метод В.И. Мицкевича для нивелирной сети, доказывая, что он универсален и может быть применен не только для обработки плановых сетей, как говорилось выше (см. матрицу Q , табл. 5), но и любых других геодезических сетей.

Рассмотрим нуль-свободную нивелирную сеть (рис. 2), не содержащую исходных пунктов.

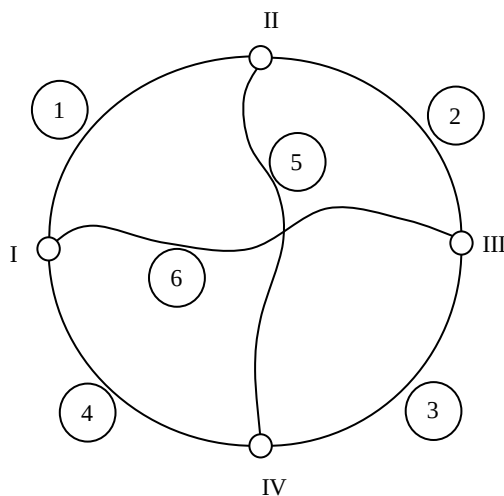


Рис. 2. Нивелирная сеть без исходных пунктов

Поскольку нет исходных пунктов, то число параметров $t = 4$ – количество определяемых пунктов. Матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок A составляется по известным правилам с учетом направления нивелирования, показываемого стрелкой. На рисунке 2 стрелок нет, и это правильно, потому что в дальнейшем мы будем выполнять предрасчет точности нивелирной сети в процессе ее проектирования. Направление нивелирования неизвестно, так как нивелирную сеть мы проектируем. В этом случае в строках матрицы A левый коэффициент, равный единице, запишем без минуса, а правый – с минусом.

В результате матрица A для нашего примера будет такой:

$$A_{6 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} & I & II & III & IV \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Матрица Q_0 будет иметь вид [3]:

$$Q_0 = 10^m E = \begin{pmatrix} 100000000 & 0 & 0 & 0 \\ & 100000000 & 0 & 0 \\ & & 100000000 & 0 \\ & sim & & 100000000 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $N = 6$ (количество измерений), то используя последовательно строки матрицы A , применим формулы (5) – (7) шесть раз, и по формуле (7) найдем [2]

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 \cdot 10^8 & 1,5 \cdot 10^8 & 1,33 \cdot 10^8 & 4 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Подключая последнюю строку матрицы A (применяя шестой раз формулу (5)), получим

$$Q_{рек} = 10^7 \begin{pmatrix} 2,50 & 2,50 & 2,50 & 2,50 \\ & 2,50 & 2,50 & 2,50 \\ & & 2,50 & 2,50 \\ & sim & & 2,50 \end{pmatrix}.$$

При $P = E$ по формуле (3) вычислим A^+

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ -0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (4) найдем матрицу R^+ , близкую к $Q_{\text{мнк}}$.

Шестой метод позволяет находить матрицы A^+ и R^+ , используемые при оценке точности и уравнивании любых плановых, высотных или спутниковых геодезических сетей, и, так же как и метод А.Н. Тихонова, устойчив к возмущениям в элементах матриц P и A . Исследования показали, что изложенный метод является одним из наилучших по своей простоте, универсальности и надежности.

В заключение отметим, что этот метод, позволяющий вычислять матрицу Q при решении некорректных задач геодезии (например, при обработке нуль-свободных геодезических построений для любых геодезических сетей: плановых, высотных или спутниковых), требует соответствующей методики выбора показателя степени m , входящего в формулу (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасименко, М.Д. Определение современных движений земной коры из повторных измерений / М.Д. Герасименко, Г.А. Шароглазова // Геодезия и картография. – 1985. – № 7. – С. 25 – 29.
2. Грищенко, Е.В. Универсальный алгоритм идентификации необходимых и избыточных измерений и его практические приложения / Е.В. Грищенко, В.И. Мицкевич // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2011. – № 3. – С. 64 – 68.
3. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
4. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
5. Мицкевич, В.И. Математические методы и модели на ЭВМ: учеб.-метод. компл. / В.И. Мицкевич. – Новополоцк, 2007. – 184 с.

Поступила 29.03.2012

COMPARISON OF TWO METHODS ESTIMATE THE ACCURACY ZERO-FREE PLANNED GEODETIC NETWORK, NOT CONTAIN INGSTARTING POINT

G. GOLOVAN, I. SHEVELEV, V. YALTYHOV

The problems of obtaining the inverse matrix of weights used to evaluate the accuracy of the function of the measured and equation variables for the case when the geodetic network does not contain the source items. Such networks are called zero-free. Notes, that for the treatment of zero-free planned geodetic networks can be used as a well-known methods (proposed by Academician A.N. Tikhonov, and methods of using "pseudoinverse", and a method based on using the coordinates of all points of the geodetic network) as well as a new method proposed by prof. V.I. Mickevich. Purpose of the article – a comparison of one of the known methods of treatment of the zero-free geodetic networks with using a new algorithm of the recursive equalizations is widely used in geodesy through the work of prof. Y.I. Marcuse.