

УДК 528.063

АЛГОРИТМЫ УРАВНИВАНИЯ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НЕЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

С.Г. ШНИТКО

(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены алгоритмы уравнивания и оценки точности геодезических сетей на основе нелинейных методов обработки измерений, предложенные З. Адамчевским, З.М. Юрианским, В.И. Мицкевичем. Приведены рекомендации по реализации этих методов на ЭВМ. Предложен новый алгоритм вычисления обратного веса функции.

В численных методах при реализации нелинейных алгоритмов необходимо вычислять частные производные целевой функции, для чего используют формулы, основанные на разностных отношениях.

При реализации на ЭВМ данных методов следует учитывать особенности машинной арифметики, например, явление катастрофической потери верных цифр, под которым понимают рост ошибки вследствие вычитания почти равных чисел [1]. Для создания устойчивого алгоритма необходим поиск величины шага численного дифференцирования, при котором разностные отношения дают наибольшее число верных цифр.

В большинстве реализаций нелинейных алгоритмов шаг численного дифференцирования задают в исходной информации и требуют, чтобы дифференцируемая функция была должным образом масштабирована. Часто шаг ищут итеративным путем, что приводит к увеличению времени вычислений. Данный подход является универсальным.

Эмпирический анализ накопления и распространения ошибок вычислений при обработке геодезических сетей позволил получить следующую универсальную формулу вычисления величины шага численного дифференцирования:

$$\delta = \sqrt{|X| + 10^{-\frac{m}{3}} / 10^{\frac{m}{3}}}, \quad (1)$$

где δ – величина шага; m – число разрядов представления чисел в ЭВМ; X – значение параметра, к которому задается приращение δ .

Ниже приведены пояснения по применению формулы (1) для различных нелинейных методов обработки геодезических сетей.

Алгоритм З. Адамчевского

Если уравнивается геодезическая сеть, развитая относительным методом спутниковой геодезии и содержащая более тысячи определяемых пунктов, то для ее обработки обычно применяют поисковые методы без составления матрицы нормальных уравнений $R = A^T P A$, тем более без вычисления элементов полной обратной матрицы весов $Q = R^{-1}$.

Получению фрагментов матрицы Q при уравнивании геодезических сетей на плоскости посвящены работы [2; 3]. Ниже этот алгоритм обобщен на случай уравнивания GNSS и нивелирных сетей. Для получения диагональных элементов матрицы Q , используемых при оценке точности уравненных координат или отметок пунктов сети, воспользуемся следующим порядком вычислений:

1) нивелирная сеть уравнивается один раз с последующим введением поправок в измерения так, чтобы $V^T P V$ равнялось нулю (поскольку поправки $V = 0$);

2) оцениваемый определяемый пункт i считается исходным, и к его уравненной отметке прибавляется малое приращение δ_i ;

3) нивелирная сеть с новым исходным пунктом уравнивается заново с получением поправок V_i в уравненные превышения. При этом

$$Q_{ii} = \frac{\delta_i^2}{V_i^T P V_i}, \quad (2)$$

где δ_i вычисляют по формуле (1). Параметром X является значение отметки H_i .

Для нахождения всех квадратичных коэффициентов матрицы Q необходимо нивелирную сеть уравнивать k раз (k – количество определяемых пунктов). Столько же раз требуется уравнивать и GNSS-сеть, поскольку $Q_{xx} = Q_{xy} = Q_{zz} = Q_{ii}$ [4].

Алгоритм 3.М. Юршанского

Метод 3.М. Юршанского при оценке точности геодезических сетей позволяет производить оценку точности функции F без ее предварительной линеаризации [5]. Для этого с помощью элементов обратной матрицы Q_{ji} 3.М. Юршанский предлагал определить переходные коэффициенты по формуле:

$$q_j = f(x_1 + Q_{j1}, x_2 + Q_{j2}, \dots, x_t + Q_{jt}) - f(x_1, x_2, \dots, x_t) \quad j = 1, 2, \dots, t. \quad (3)$$

Затем обратный вес функции получают из следующего выражения:

$$\frac{1}{P_F} = f(x_1 + q_1, x_2 + q_2, \dots, x_t + q_t) - f(x_1, x_2, \dots, x_t). \quad (4)$$

Достоинством этих формул является то, что не надо находить частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$. Это оправданно при сложном виде функций F , например, при уравнивании геодезических сетей на трехосном эллипсоиде. Недостаток формул состоит в ненормированности приращений в параметры x_i . Ориентируясь на наибольший по модулю элемент этой строки, 3.М. Юршанский предлагает подобрать подходящий масштабный коэффициент δ_j , который в одном случае должен уменьшить, а в другом увеличить приращения аргументов для более точного нахождения q_j .

Основываясь на формулах 3.М. Юршанского, предлагаем следующий новый алгоритм вычисления обратного веса функции:

1) вычисляют приращения δ_j и δ_q :

$$\delta_j = \frac{\delta}{|Q_j|_{\max}}; \quad \delta_q = \frac{\delta}{|q_j|_{\max}}, \quad (5)$$

где δ находят по формуле (1);

2) получают матрицу приращений R , элементы которой ($R_i = \delta_j Q_{ji}$):

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1t} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{t1} & R_{t2} & \dots & R_{tt} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

3) вычисляют масштабные коэффициенты по формуле:

$$q_j = f(x_1 + R_{j1}, x_2 + R_{j2}, \dots, x_t + R_{jt}) - f(x_1, x_2, \dots, x_t) \delta_j^{-1}. \quad (7)$$

Обратный вес функции находят из выражения

$$\frac{1}{P_F} = f(x_1 + R_{q1}, x_2 + R_{q2}, \dots, x_t + R_{qt}) - f(x_1, x_2, \dots, x_t) \delta_q^{-1}. \quad (8)$$

Метод релаксации, применяемый при решении пространственных засечек

Для решения пространственной засечки следует вычислить значения целевой функции в шести точках релаксации [6]:

$$P_{1,2}(X^{(j)} \pm \lambda, Y^{(j)}, Z^{(j)}); \quad P_{3,4}(X^{(j)}, Y^{(j)} \pm \lambda, Z^{(j)}); \quad P_{5,6}(X^{(j)}, Y^{(j)}, Z^{(j)} \pm \lambda).$$

Масштабный коэффициент t находят по формуле [6]:

$$t = \frac{\|\nabla \Phi(X, Y, Z)\|_{X,Y}}{\left| \frac{\partial \Phi(X, Y, Z)}{\partial Z} \right|}, \quad (9)$$

где в числителе – норма составляющей градиента целевой функции в плане; в знаменателе – модуль частной производной целевой функции по высоте.

Частные производные находим по известной формуле:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{12\delta} -\Phi_{2\delta} + 8\Phi_{\delta} - 8\Phi_{-\delta} + \Phi_{-2\delta}, \quad (10)$$

где δ – шаг для численного дифференцирования, который также предлагаем вычислять по универсальной формуле (1) [4].

Заключение. Приведенные формулы могут оказаться весьма эффективными при решении любых систем нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численные методы и математическое обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш; пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
2. Макаров, Г.В. Оценка точности при поисковых методах уравнивания / Г.В. Макаров, В.В. Афанасьев, Б.В. Афанасьев // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 20 – 22.
3. Adamczewski, Z. Nieliniowe analiza dokadnoscisieci geodezyjny / Z. Adamczewski // Geodezyja i kartografia (PRL). – 1971. – № 3. – S. 209 – 223.
4. Мицкевич, В.И. Скоростной алгоритм оценки точности обширных GPS-построений / В.И. Мицкевич, С.Г. Шнитко, В.В. Ялтыхов // Земля Беларуси. – 2004. – № 2. – С. 27.
5. Юршанский, З.М. Уравнивание и оценка точности последовательными приближениями методом конечных приращений аргументов начальных уравнений / З.М. Юршанский // Межвуз. сб. науч. тр. – Геодезия. – Новосибирск: НИСИ, 1977. – Т. I(41). – С. 137 – 157.
6. Мицкевич, В.И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25 – 28.

Поступила 29.03.2012

ALGORITHMS OF EQUALIZATION AND ASSESSMENT OF THE ACCURACY OF GEODETIC NETWORKS BY NON-LINEAR METHODS

S. SHNITKO

Algorithms of equalization and assessment of the accuracy of geodetic networks based on nonlinear processing methods of measurement proposed by Z. Adamchevskiy, Z.M. Yurshanskiy, V.I. Mickevich are considered. The recommendations for the implementation of these methods on a computer.