

УДК 624.072

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ «МОМЕНТ – КРИВИЗНА» ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РАСЧЕТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

д-р техн. наук, проф. С.В. БОСАКОВ

(Белорусский национальный технический университет, Минск; РУП «Институт БелНИИС»)

канд. техн. наук, доц. О.В. КОЗУНОВА

(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель;

Белорусский национальный технический университет, Минск)

Н.С. ЩЕТЬКО

(ООО «Могилевский центр строительной диагностики»)

В работе рассматриваются и решаются вопросы статического расчета железобетонных балок с использованием зависимости «момент – кривизна». Поставленная задача отдельно решается для статически определимых и статически неопределимых балок. Зависимость «момент – кривизна» принимается в виде гиперболического тангенса, ее успешно использовала один из авторов при решении нелинейных задач для балок на упругом основании. При расчете статически определимых балок задача сводится к решению обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка относительно прогибов балки с известными граничными условиями. При расчете статически неопределимых балок решение находится из условия минимума функционала Кастилиано дополнительной энергии. Для получения численных результатов используется пакет «Mathematica». Приводятся три примера расчетов шарнирно опертой балки, консольной и один раз статически неопределимой.

Ключевые слова: *зависимость «момент – кривизна», железобетонная балка, гиперболический тангенс, функционал Кастилиано.*

Введение. Последние годы проектные организации РБ, работая по отечественным нормативным документам, используют нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями при расчетах железобетонных и бетонных конструкций [1]. Строительные нормы также рекомендуют для расчета изгибаемых элементов использовать зависимость «момент – кривизна», которая в общем случае носит нелинейный характер.

Зависимость «момент – кривизна» при нелинейном расчете железобетонных балок, работающих в условиях плоского изгиба, комплексно учитывает нелинейные свойства бетона и арматуры, анизотропность и неоднородность, трещинообразование материала балки. Впервые использовать эту зависимость в теории железобетона предложил В.Н. Мурашов [2]. В работах В.И. Соломина и его учеников [3] эта зависимость успешно применена для расчета железобетонных конструкций на упругом основании. Авторы в работах ранее [4] показали, что эта зависимость является энергетической характеристикой сечения балки. К.В. Дмитриева (Юркова) впервые близко аппроксимировала зависимость «момент – кривизна» с помощью экспоненциально-степенных функций [5], что позволило решить задачу об изгибе стенки в упругой полуплоскости с ломаным контуром. Ниже эта зависимость применяется для нелинейного расчета железобетонных балок.

В предлагаемой работе зависимость «момент – кривизна» аппроксимируется в виде гиперболического тангенса (1), условно показанного на рисунке 1. Будем считать материал балки нелинейно упругим

$$M \left(\frac{1}{\rho} \right) = M_{\text{lim}} \operatorname{Tanh} \left(\frac{B_0}{M_{\text{lim}}} \frac{1}{\rho} \right), \quad (1)$$

где M_{lim} – предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением балки;

B_0 – начальная жесткость балки;

$\frac{1}{\rho}$ – кривизна в данном сечении балки.

Такую зависимость широко использовала один из авторов в своих работах для учета физической нелинейности упругой среды при исследовании напряженно-деформированного состояния неоднородных оснований фундаментных конструкций [6], а также шарнирно соединенных балок на упругом основании [7].

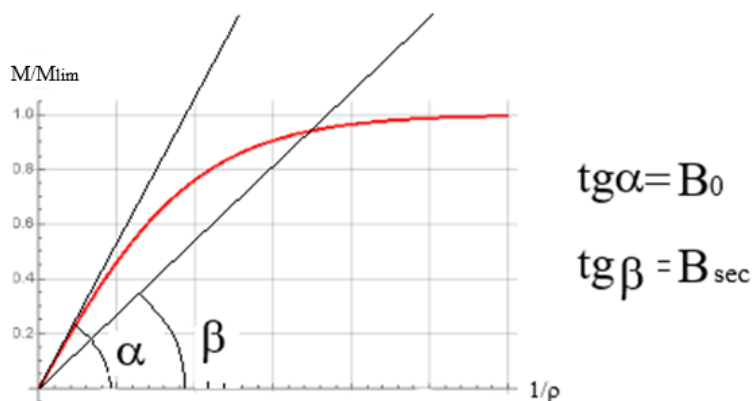


Рисунок 1. – Принятая зависимость «момент – кривизна»

В дальнейшем будем использовать секущую изгибную жесткость (см. рисунок 1) балки. Нелинейное дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки на основании (1) можно записать теперь в следующем виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{\text{lim}}}{B_0} \text{ArcTanh} \left(\frac{M}{M_{\text{lim}}} \right), \quad (2)$$

где $M = M(x)$ – уравнение изгибающего момента в сечении балки с абсциссой x .

Указанный выше подход можно использовать для статически определимых железобетонных балок, где из уравнений равновесия известно выражение для распределения изгибающих моментов в балке, которое входит в (2). Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (2) численно решается с помощью пакета «Mathematica» [8] с учетом геометрических граничных условий, так как статические граничные условия учитываются заданием выражения для изгибающего момента $M(x)$. Рассмотрим два примера.

Пример 1.

Шарнирно опертая однопролетная балка под действием равномерно распределенной нагрузки q (рисунок 2) со следующими характеристиками: $B = 20000 \text{ кНм}^2$; $M_{\text{lim}} = 200 \text{ кНм}$; $\ell = 6 \text{ м}$.

Уравнение изгибающих моментов по длине балки

$$M(x) = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и численно решим полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка на пакете «Mathematica» с граничными условиями для шарнирно опертой балки.

На рисунке 2 приведены расчетная модель и эпюры прогибов (y) в однопролетной статически определенной балке при двух значениях распределенной нагрузки. Из-за учета нелинейности железобетона при увеличении нагрузки вдвое максимальный прогиб в середине пролета балки увеличился приблизительно в 2.67 раза.

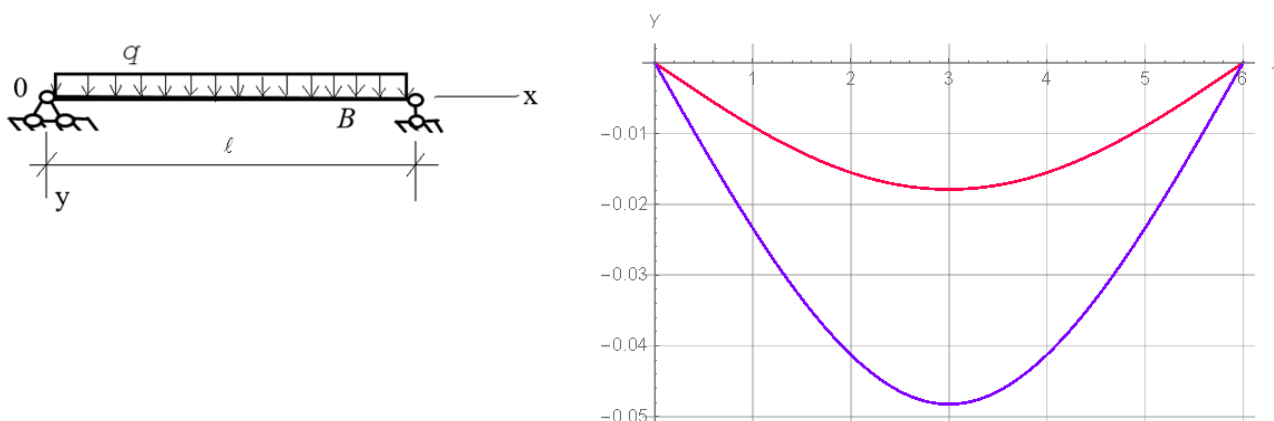


Рисунок 2. – Эпюры прогибов при двух загрузениях шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной нагрузки (красный цвет – $q = 20 \text{ кН/м}$; синий – $q = 40 \text{ кН/м}$)

Пример 2.

Консольная балка под действием равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы на краю (рисунок 3). Примем

$$B = 3000 \text{ кНм}^2; M_{\text{lim}} = 22 \text{ кНм};$$

$$\ell = 1.5 \text{ м}; q = 2 \text{ кН/м}; P = 7 \text{ кН}.$$

Уравнение изгибающего момента в сечении консольной балки с абсциссой x

$$M(x) = P(L-x) + q \frac{(L-x)^2}{2} \tag{4}$$

Подставим (4) в (2) и численно решим полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка на пакете «Mathematica» с граничными условиями для консольной балки.

На рисунке 3 показаны эпюры прогибов в консольной балке для линейного и нелинейного решений.

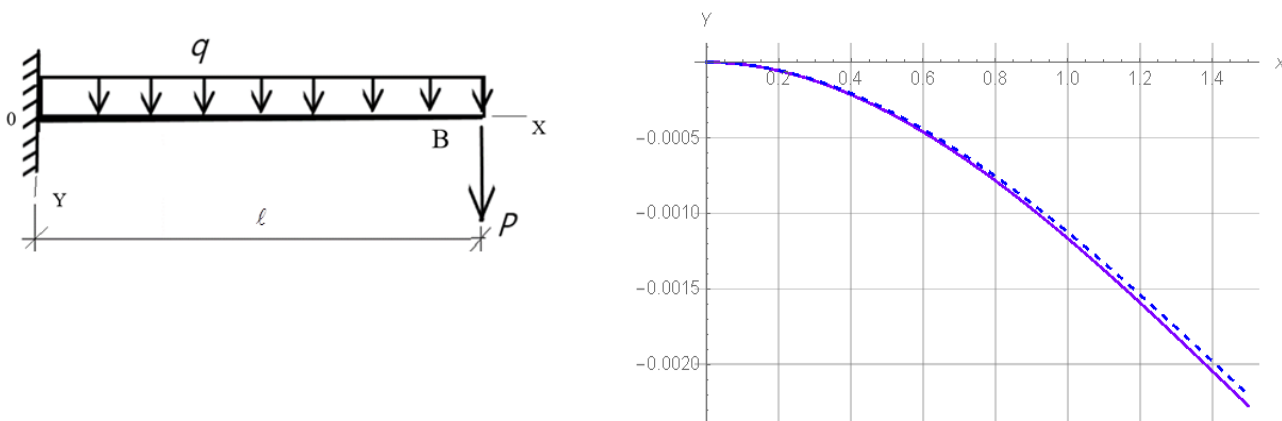


Рисунок 3. – Эпюры прогибов (м) в консольной балке. Пунктиром показано линейное решение

Для статически неопределимых балок авторы используют принцип наименьшей работы [9; 10]. Рассмотрим один раз статически неопределимую балку (рисунок 4).

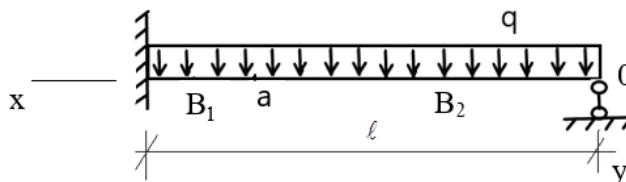


Рисунок 4. – Статически неопределимая балка

За основное неизвестное авторами принимается расстояние до нулевой точки эпюры моментов (точку a на рисунке 4). Зависимости «момент – кривизна» будут различными для участков балки слева и справа от точки a ввиду различного расположения рабочей арматуры в сечении балки и ее площади, и отражены в формулах (5)

$$M_1 \left(\frac{1}{\rho} \right) = M_{1,\text{lim}} \text{Tanh} \left(\frac{B_{1,0}}{B_{1,\text{sec}}} \frac{1}{\rho} \right), \quad \ell > x > a;$$

$$M_2 \left(\frac{1}{\rho} \right) = M_{2,\text{lim}} \text{Tanh} \left(\frac{B_{2,0}}{B_{2,\text{sec}}} \frac{1}{\rho} \right), \quad a > x > 0. \tag{5}$$

где $B_{1,0}, B_{2,0}, B_{1,\text{sec}}, B_{2,\text{sec}}$ – начальные и секущие жесткости на участках балки длиной $\ell - a$ и a соответственно; $M_{1,\text{lim}}, M_{2,\text{lim}}$ – предельные моменты на участках балки длиной $\ell - a$ и a соответственно.

Запишем функционал Кастилиано [9; 10] дополнительной энергии балки и действующей на нее нагрузки с учетом введенных обозначений

$$\int_0^a \left(\frac{qa}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{M_{1,\text{lim}}}{B_1} \text{arc Tanh} \left(\frac{\frac{qa}{2} x - \frac{qx^2}{2}}{M_{1,\text{lim}}} \right) dx + \int_a^\ell \left(-\frac{qa}{2} x + \frac{qx^2}{2} \right) \frac{M_{2,\text{lim}}}{B_2} \text{arc Tanh} \left(\frac{-\frac{qa}{2} x + \frac{qx^2}{2}}{M_{2,\text{im}}} \right) dx. \tag{6}$$

В интегралах (6) неизвестным является величина a , входящая в пределы интегралов и подынтегральное выражение. Вычислить (6) аналитически точно довольно сложно, поэтому для поиска решения графически будем находить минимум (6) по графической зависимости функционала Кастилиано от положения точки a при заданных внешней нагрузке, жесткостях и размерах балки.

Пример 3.

В расчет принимаем $q = 40$ кН/м.; $L = 6$ м; $M_{lim} = 200$ кНм; $B_1 = 20000$ кНм²; $M_{2lim} = 150$ кНм; $B_2 = 15000$ кНм².

На рисунке 5 приведены графики изменения величины функционала Кастилиано (6). Синим цветом показано нелинейное решение. Данные расчетов сведены в таблицу 1.

Таблица 1. – Данные расчетов

	Положение a , м	Пролетный M_{max} , кНм	Правая опорная реакция, кН
Линейное решение	4.36	95.05	87.2
Нелинейное решение	4.48	100.6	89.6

Анализ данных таблицы 1 свидетельствует о влиянии учета нелинейности на величины опорных реакций и максимальных пролетных изгибающих моментов для рассматриваемой статически неопределимой балки.

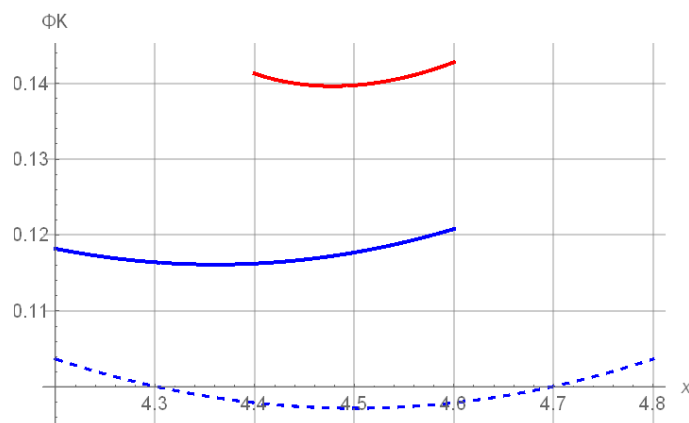


Рисунок 5. – График изменения величины функционала Кастилиано (6) при изменении положения точки a нулевого значения изгибающего момента на балке (красный цвет – линейно-упругое решение)

Прогибы в балке можно также определить по формуле Максвелла – Мора [9], рассматривая статически неопределимую балку как балку кусочно-постоянного сечения [6].

Заключение. В работе предложен несложный подход, позволяющий на основании известной зависимости «момент – кривизна» для статически определимых балок из решения нелинейного дифференциального уравнения находить прогибы. Для статически неопределимых балок решение получается из условия минимума функционала Кастилиано дополнительной энергии деформаций балки и действующей на нее нагрузки. Приводятся три примера для наиболее применяемых балок и нагрузок, показывающих эффективность предлагаемого подхода для различно-опираемых балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетонные и железобетонные конструкции : СНБ 5.03.01-02. – Введ. 01.07.2003. – Минск : Стройтехнорм, 2003. – 139 с.
2. Мурашев, В.Н. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / В.Н. Мурашев. – М. : Изд-во М-ва стр-ва предприятий машиностроения, 1950. – 268 с.
3. Соломин, В.И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В.И. Соломин, С.Б. Шматков. – М. : Стройиздат, 1986. – 206 с.
4. Босаков, С.В. Об одном свойстве зависимости «момент – кривизна» для балок и его использовании в инженерных расчетах / С.В. Босаков, Н.С. Щетько // Строит. наука и техника. – 2006. – № 1. – С. 58–61.
5. Дмитриева, К.В. Расчет нелинейно-упругой гибкой стенки в упругом основании : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / К.В. Дмитриева ; Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2017. – 23 с.
6. Козунова, О.В. Применение МКР в нелинейных расчетах балок на однородном упругом слое / О.В. Козунова // Ресурсо-економі матеріали, конструкції, будівлі та споруди : сб. науч. ст. – Ровно, 2008. – С. 373–381.
7. Босаков, С.В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС ; редкол.: О.Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2019. – С. 11–24.
8. Дьяконов, В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В.П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 624 с.

9. Рабинович, И.М. Курс строительной механики стержневых систем : в 2 ч. / И.М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1954. – Ч. 2 : Статически неопределимые системы. – 544 с.
10. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.

Поступила 15.10.2021

USING THE MOMENT-CURVATURE CONSTRAINT FOR NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

S. BOSAKOV, O. KOZUNOVA, N. SHCHETKO

The paper discusses and solves the issues of static calculation of reinforced concrete beams using the "Moment-curvature" dependence. The problem posed is solved separately for statically determinate and statically indeterminate beams. The "Moment-curvature" dependence is taken in the form of a hyperbolic tangent, which was successfully used by one of the authors when solving nonlinear problems for beams on an elastic foundation. When calculating statically definable beams, the problem is reduced to solving an ordinary nonlinear second-order differential equation for the deflections of a beam with known boundary conditions. When calculating statically indeterminate beams, the solution is found from the condition of the minimum Castiliano functional of the additional energy. To obtain numerical results, the Matemathika package is used. Three examples of calculations of a hingedly supported beam, cantilever and once statically indeterminate, are given.

Keywords: *dependence "moment – curvature", reinforced concrete beam, hyperbolic tangent, Castiliano functional.*