

УДК 624.012.36:311.214

ПОЛНЫЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКТИВНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА

канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ; канд. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ;
канд. техн. наук, доц. Е.Д. ЛАЗОВСКИЙ; Т.М. ГЛУХОВА
(Полоцкий государственный университет)

Представлен комплексный подход оценки надежности строительных конструктивных элементов на основе нелинейных вероятностных моделей наиболее опасных участков и расчетных ситуаций. Сделан вывод о необходимости проверки гипотезы о том, что функция предельного состояния является гауссовой смесью вероятностных распределений, а в случае состоятельности данной гипотезы необходимо выполнение процедуры разделения смеси на компоненты. Предложена интерпретация данного факта как эффекта влияния нелинейных свойств и сингулярности моделей на распределение функции предельного состояния.

Ключевые слова: конструктивный железобетонный элемент, оценка надежности, нелинейные вероятностные модели.

При рассмотрении воздействия Q на конструктивный элемент как случайную величину, учитывая случайный характер функции предельного состояния R , задачу оценки надежности конструктивного элемента рассматривают как задачу анализа характеристик случайной величины $M = R - S$.

Если в результате статистического моделирования в рамках полного вероятностного расчета получены оценки плотности вероятности для Q и R , то вероятность разрушения элемента P_f определяют как область перекрытия распределений, что показано на рисунке 1.

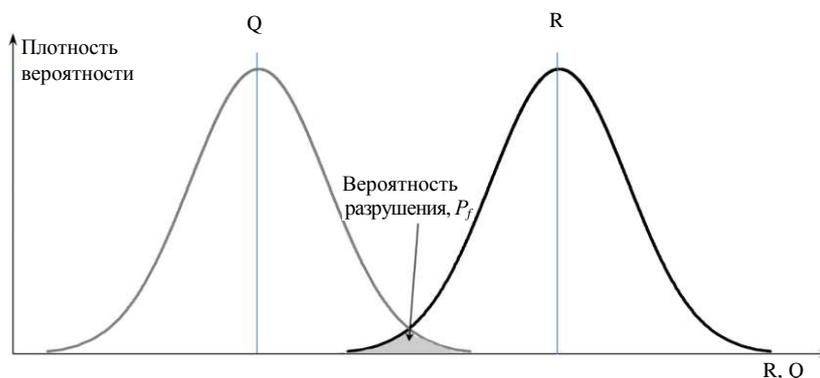


Рисунок 1. – Интерпретация области перекрытия распределений Q и R

Вероятность разрушения в этом случае определяется формулой

$$P_f = P(P < Q) = P(M < 0),$$

где P_f – вероятность разрушения элемента.

Определение точного значения данного интеграла является в большинстве случаев невыполнимой задачей, поэтому применяются упрощенные методы оценки значения интеграла, которые носят название FORM (First Order Reliability Method) и SORM (Second Order Reliability Method) [18].

Для оценки вероятности P_f широкое распространение получила процедура определения индекса надежности β (индекс безопасности по С.А. Корнеллу [5], характеристика безопасности по А.Р. Ржаницыну [6], индекс надежности по Раквицу и Фислеру [3; 4]).

Индекс надежности рассчитывается исходя из предположения о нормальном законе распределения функции воздействия, функции предельного состояния и независимости случайных величин Q и R :

$$\beta = \Phi^{-1}(-P_f) = \frac{m_R - m_Q}{\sqrt{s_R^2 + s_Q^2}},$$

где m_R и m_Q – математические ожидания распределений Q и R , s_R и s_Q – соответствующие среднеквадратические отклонения.

Применению метода Монте-Карло для статистического моделирования, разработке методов уменьшения размерности пространства оценки, фокусировке процесса моделирования на пограничной подобласти и т.п. посвящено множество публикаций [4; 20–23].

В соответствии с ИСО СТБ 2394 критерий обеспечения надежности задается неравенством:

$$\beta \geq \beta_{tag},$$

где β_{tag} – минимальный целевой индекс надежности, численные значения которого задаются в зависимости от класса ответственности конструкции.

Для оценки индекса надежности выполняется полный вероятностный расчет, в котором с помощью генераторов псевдослучайных последовательностей (ГПСП) моделируются прочностные характеристики материалов, геометрические параметры, площадь арматуры. Строится вероятностная модель воздействия на конструктивный элемент. Причем модель воздействия не влияет на оценку распределения функции предельного состояния, но оказывает существенное влияние на распределение оценок по деформациям.

Для реализации полного вероятностного расчета нелинейных моделей строительных элементов нами были построены нелинейные модели основных расчетных ситуаций. Общая схема полного вероятностного нелинейного расчета приведена на рисунке 2.



Рисунок 2. – Общая схема полного вероятностного нелинейного расчета

Проектирование строительных конструкций опирается на полувероятностные методы расчета, основанные на частных коэффициентах безопасности. Калибровка коэффициентов безопасности выполняется с учетом особенностей производства и систем контроля качества, принятых в той либо иной стране [8]. Действующие нормы Республики Беларусь, определяя параметрический ряд классов бетонов и арматуры, определяют семейство вероятностных моделей материалов. Параметры распределения случайной величины восстанавливаются по нормативным и средним значениям прочностных характеристик. Однако, в сравнении с анализом результатов при обследовании, для моделирования тех или иных величин применяются распределения, отличные от нормального распределения.

Общие принципы обеспечения надежности строительных и иных конструкций изложены в базовом документе EN 1990 [8] и ISO 2394 [9]. Еврокоды предлагают готовую систему теоретических распределений для анализа и моделирования случайных свойств конструкций. В частности, в Eurocode 3 «Стальные конструкции» [10] при определении прочности (предела текучести) стали по результатам испытаний применяется логарифмически нормальный закон распределения для моделирования как геометрических, так и прочностных параметров.

Объединенный комитет по безопасности конструкций JCSS, выполняющий работы по калибровке частных коэффициентов безопасности, закладываемых в европейские нормы, предлагает вероятностную модель PMC (Probabilistic Model Code), где также определяет вид распределения для каждого учитываемого параметра:

- прочностные характеристики – логарифмически нормальный закон распределения;
- плотность бетона – нормальное распределение;
- длительно действующие нагрузки – гамма-распределение;
- кратковременные нагрузки – экспоненциальное распределение;
- сопротивление конструкции – нормальный закон распределения.

Отдельные параметры допускается рассматривать как подчиненные распределению Вейбула и Гумбеля [7]. Нами в работе [11] систематизированы методы идентификации параметров применяемых теоретических распределений по результатам детального обследования строительных конструкций, в работе [12] выполнен выбор и разработано программное обеспечение для реализации генераторов псевдослучайных последовательностей для статистического моделирования строительных конструкций.

Нелинейные модели строительных элементов. Системы нелинейных сингулярных уравнений являются основой целого ряда математических моделей. В частности, такие системы возникают при попытке описать напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов, работающих под нагрузкой при внецентренном сжатии и изгибе, при работе таких элементов в предопорной зоне на срез с изгибом. Сингулярные свойства таких моделей связаны с тем, что те либо иные параметры, зависимости, описывающие свойства модели, имеют точки разрыва первого и второго рода. Такие точки разрыва фактически разделяют всю область определения входных параметров на подобласти непрерывного поведения. Такие точки разрыва позволяют описать скачкообразное изменение напряжения в бетоне в момент трещинообразования.

Опыт нескольких лет изучения подобного рода математических моделей с целью разработки эффективных алгоритмов решения сингулярных систем нелинейных уравнений показал, что наиболее верным подходом является детальное изучение всех особенностей многомерной поверхности решения и применение различных стратегий поиска решения на поверхности решений в зависимости от области непрерывного поведения системы, в которой находятся значения входных параметров [13–17].

Из многолетнего опыта обследования технического состояния строительных конструкций, накопленного в Полоцком государственном университете, наибольший интерес представляют 3 нелинейные модели:

1) нелинейная деформационная модель сечения, нормального к продольной оси железобетонного элемента, на совместное действие изгибающего момента в двух осях и продольной сжимающей или растягивающей силы (данная модель применяется для расчета наиболее нагруженных средних частей пролетов плит, балок ригелей, а также расчета колонн);

2) нелинейная деформационная модель наклонного сечения на совместное действие изгибающего момента продольной и перерезывающей силы (применяется для моделирования предопорных зон балок, ригелей);

3) нелинейная блочная модель растянутого элемента с изгибом (является новой моделью для описания процесса деформирования растянутого элемента, описывает процесс перераспределения напряжений в блоках между трещинами нормального отрыва, в частности для моделирования процесса трещинообразования в многопустотных плитах безопалубочного формования в составе платформенных стыков сборно-монолитных перекрытий).

Рассматриваемые нелинейные модели описывают наиболее опасные участки строительных конструкций, как правило, испытывающие максимальные усилия и приводящие к разрушению конструкций. Нами разработаны:

1) эффективные методы решения прямых и обратных задач в рамках рассматриваемых нелинейных моделей;

2) алгоритмы и программные модули расчета рассматриваемых моделей;

3) проведена апробация моделей в рамках сопоставления результатов расчета и экспериментальных данных на широком классе конструктивных элементов и видов нагружения.

Рассмотрим далее в кратком изложении основные системы уравнений изучаемых моделей.

Нелинейная деформационная модель сечения, нормального к продольной оси железобетонного элемента

Нелинейная деформационная модель напряженно-деформированного состояния сечения, нормального к продольной оси, представляет собой систему сингулярных нелинейных уравнений интегрального вида:

$$\begin{cases} M_x = -\iint_C \sigma(\varepsilon(x, y))(x - x_o) dx dy + N(x_{oe} - x_o); \\ M_y = -\iint_C \sigma(\varepsilon(x, y))(y - y_o) dx dy + N(y_{oe} - y_o); \\ N = \iint_C \sigma(\varepsilon(x, y)) dx dy, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma(\varepsilon(x, y))$ – нормальные напряжения в точке (x, y) сечения в бетоне или арматуре; $\varepsilon(x, y)$ – продольные деформации в точке (x, y) сечения; y_o – расстояние от центра изгиба сечения, нейтральной точки, до оси y ; и y_{oe} – расстояние от места приложения продольного усилия до оси y ; x_o – расстояние от центра изгиба сечения, нейтральной точки, до оси x ; и x_{oe} – расстояние от места приложения продольного усилия до оси x ; N – продольная сила от действия внешней нагрузки; M_x, M_y – изгибающие моменты в плоскости XZ и YZ соответственно.

Уравнения совместности деформаций для точки (x, y) выглядит следующим образом:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_z - \frac{1}{r_y}(y - y_o) - \frac{1}{r_x}(x - x_o) + q_0(x, y) + q_1(x, y) + q_2(x, y),$$

где $\frac{1}{r_y}$ – кривизна продольной оси элемента относительно оси y ; $\frac{1}{r_x}$ – кривизна продольной оси элемента

относительно оси x ; q_0, q_1, q_2 – остаточные деформации от предварительного напряжения элемента до усиления, добавочные деформации от нагрузки до усиления и остаточные деформации от процесса динамического обжатия после усиления.

Математическая модель устанавливает отображение множества допустимых значений деформаций, определенное в метрическом пространстве деформаций, во множество значений усилий, определенное в метрическом пространстве усилий $M: R^3 \rightarrow R^3$. Сама модель лишена предположений относительно способа расчета напряженно-деформированного состояния. Из деформационной модели следует формулировка задачи расчета как задачи поиска такого расположения плоскости распределения деформаций

в 3-х мерном пространстве $\varepsilon = \left\{ \frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \varepsilon_z \right\}$, которое бы соответствовало действию на элемент вектора

нагрузки, заданного в трехмерном пространстве нагрузок $F = \{M_z, M_y, N\}$. Таким образом, решение задачи ищем в 3-х мерном пространстве.

Нелинейная деформационная модель наклонного сечения. Система уравнений исследуемой нами модели представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} M_y = -\int \sigma(\varepsilon(y))x(y)(y - y_o) dy + N(y_{oe} - y_o); \\ N = \int \sigma(\varepsilon(y))x(y) dy; \\ V = \int \tau(x, y)x(y) dy, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma(\varepsilon(y))$ – нормальные напряжения в слое на уровне y , сечения в бетоне или арматуре; $\varepsilon(y)$ – продольные деформации элементарной площадки бетона или арматуры (проекция на ось Z суперпозиции главных сжимающих и главных растягивающих деформаций, полученная с учетом поворота элементарных площадок под действием перерезывающей силы); $x(y)$ – функция формы; y_o – расстояние от центра изгиба сечения, нейтральной точки, до начала координат; y_{oe} – расстояние от места приложения продольного усилия до начала координат; N – продольная сила от действия внешней нагрузки; V – перерезывающая сила; M_y – изгибающий момент, действующий в плоскости YZ .

В модели постоянного (фиксированного) угла принимается предпосылка о том, что трещины, возникающие в железобетонном элементе в условиях плоского напряженного состояния, ориентированы по от-

ношению к продольной оси под некоторым постоянным углом θ , не зависящим от уровня нагружения и наличия новых трещин и определяемым углом наклона осей главных напряжений в элементе без трещин.

В модели переменного угла принимается допущение о том, что угол наклона θ трещин и сжатых бетонных полос между наклонными трещинами на произвольном этапе после их образования совпадает с углом наклона главных напряжений α , значение которого изменяется при нагружении.

Уравнения равновесия и совместности деформаций для одноосного случая выглядят следующим образом (ось Z – совпадает с продольной осью элемента):

$$\sigma_z = \sigma_{c2} \cos^2(\alpha) + \sigma_{c1} \sin^2(\alpha) + \rho_z \sigma_{sz},$$

$$\sigma_y = \sigma_{c2} \sin^2(\alpha) + \sigma_{c1} \cos^2(\alpha) + \rho_y \sigma_{sy},$$

$$\tau_{zy} = (-\sigma_{c2} + \sigma_{c1}) \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha),$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{c2} \cos^2(\alpha) + \varepsilon_{c1} \sin^2(\alpha),$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{c2} \sin^2(\alpha) + \varepsilon_{c1} \cos^2(\alpha),$$

$$\frac{\gamma_{zy}}{2} = (-\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c1}) \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha),$$

где σ_z , σ_y , σ_{c1} , σ_{c2} , τ_{zy} – соответственно проекции главных сжимающих и растягивающих напряжений на оси Z и Y , главные сжимающие и растягивающие напряжения, тангенциальные напряжения в бетоне; σ_{sz} , σ_{sy} – напряжения в арматуре; ε_z , ε_y , γ_{zy} – относительные деформации; α – угол наклона осей главных напряжений по отношению к продольной оси.

Постановка задачи расчета данной модели методом двух сечений может быть представлена отображением:

$$\langle M_{y1}, M_{y2}, \delta, N \rangle \rightarrow \langle \varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_y, \gamma_{zy} \rangle \rightarrow V,$$

где δ – расстояние между сечениями.

Нелинейная блочная модель растянутого элемента с изгибом

Данная нелинейная модель была построена, реализована программно и верифицирована экспериментально в рамках диссертационной работы А.Д. Лазовского [17].

Для любого поперечного сечения блока суммарное усилие в растянутом бетоне N_c и арматурном стержне N_s постоянно на всей длине блока. Тогда условие равновесия усилий с учетом правила знаков на элементарном участке в пределах бетонного блока имеет вид:

$$d\sigma_{s,ad} \cdot A_{s,ad} + d\sigma_c \cdot A_{c,eff,red} = 0.$$

Исходя из условия равенства усилия в арматурном стержне диаметром \emptyset , как результирующего от действия растягивающих нормальных напряжений $\sigma_{s,ad}$, распределенных по площади его поперечного сечения $A_{s,ad}$, и усилия от действия касательных напряжений τ_b по площади контакта арматурного стержня с бетоном, а также разности относительных деформаций арматуры $\varepsilon_{s,ad}$ и бетона ε_c как взаимного смещения s , закона сцепления $\tau_b = f(s)$, связывающего касательные напряжения по площади контакта арматурного стержня с бетоном и их взаимное смещение, учитывающее поперечное сжимающее давление от вертикального прижатия, можно записать:

$$d\sigma_{s,ad} \cdot \frac{\pi \emptyset^2}{4} = \pi \emptyset \cdot \Omega_{p,tr} \cdot \tau_b(s) dx;$$

$$(\varepsilon_{s,ad} - \varepsilon_c) dx = ds;$$

$$\Omega_{p,tr} \cdot \tau_b = f(s).$$

Коэффициент $\Omega_{p,tr}$ к ординатам принятого закона сцепления арматуры с бетоном для учета влияния давления вертикального прижатия p_{tr} в окружающем арматуру бетоне средней прочности $f_{cm,ad}$

$$\Omega_{p,tr} = 1 - \tanh \left(0, 2 \frac{p_{tr}}{0, 1 f_{cm,ad}} \right).$$

График, иллюстрирующий принятый закон сцепления с учетом влияния поперечного давления прижатия p_{tr} , представлен на рисунке 3.

В случае достижения относительными деформациями арматуры значений, соответствующих пределу текучести, $\epsilon_{s,ad} \geq \epsilon_{sy,ad}$, к ординатам принятого закона сцепления арматуры с бетоном вводится понижающий коэффициент Ω_y :

$$\Omega_y = 1,0 - 0,85 \cdot (1 - e^{-5a^b}),$$

где $a = \frac{\epsilon_{s,ad} - \epsilon_{sy,ad}}{\epsilon_{su,ad} - \epsilon_{sy,ad}}$, $b = \left[2 - \frac{f_{tm}}{f_{ym}} \right]^2$ – коэффициенты; $\epsilon_{su,ad}$ – относительные деформации, соответствующие

пределу прочности (предельной растяжимости) дополнительной надопорной арматуры; $f_{ym,ad}$ – среднее значение предела текучести арматуры при растяжении; $f_{tm} = k \cdot f_{ym,ad}$ – среднее значение предела прочности арматуры при растяжении.

При $\epsilon_{s,ad} < \epsilon_{sy,ad}$ коэффициент $\Omega_y = 1$.

График, иллюстрирующий принятый закон сцепления с учетом влияния текучести арматуры, представлен на рисунке 4.

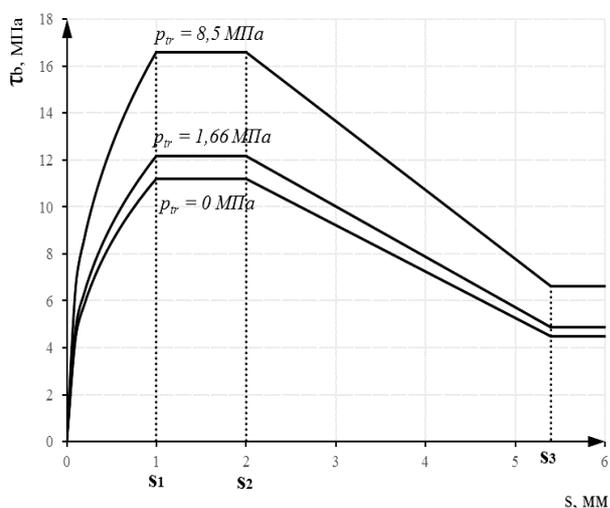


Рисунок 3. – График, иллюстрирующий закон сцепления с учетом влияния давления поперечного прижатия p_{tr}

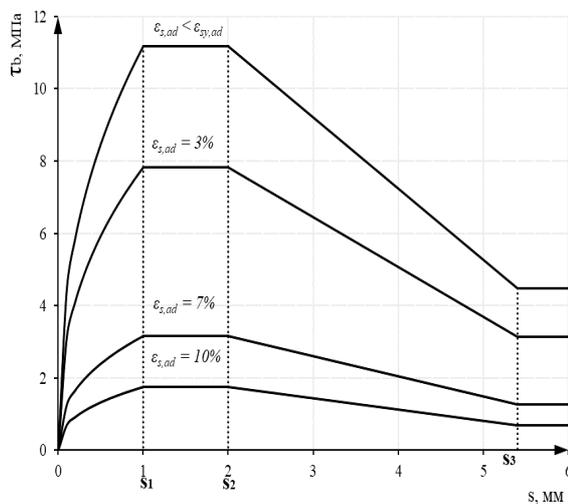


Рисунок 4. – График, иллюстрирующий закон сцепления с учетом влияния относительных деформаций, соответствующих пределу текучести арматуры

Для решения задачи получения распределения относительных деформаций арматуры и бетона центральный бетонный блок в растянутой зоне поперечного сечения высотой h_{eff} , выделенный соседними трещинами нормального отрыва, разделяем n поперечными сечениями на $(n - 1)$ интервалов длиной Δx таким образом, чтобы границы интервала Δx_k совпадали с границами вертикального шва между торцами многоспустотных плит (рисунок 5). Учитывая при этом низкую адгезию бетона заполнения вертикального шва с бетоном плит, работу бетона на растяжение поперек шва в сечениях, совпадающих с его границами, в расчет не берем. Поэтому на интервале, равном длине вертикального шва Δx_k , принимаем эффективную площадь поперечного сечения растянутой зоны в бетоне замоноличивания $A_{c,eff,ad}$ и диаграмму деформирования бетона замоноличивания.

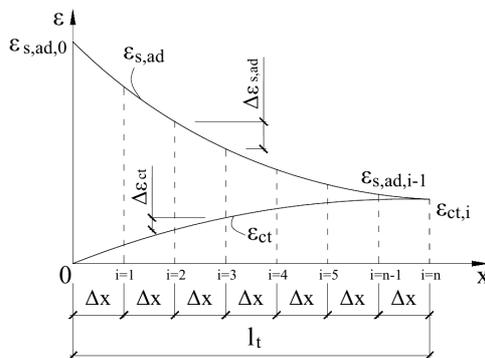


Рисунок 5. – Схема разделения центрального бетонного блока на интервалы Δx

Таким образом, рассматриваемую модель можно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}s = \varepsilon_{s,ad}(\sigma_{s,ad}) - \varepsilon_{ct} \left(\frac{N - \sigma_{s,ad} \cdot A_{s,ad}}{A_{c,eff,red}} \right); \\ \frac{d}{dx}\sigma_{s,ad} = \frac{4}{\varnothing} \cdot \Omega_y \cdot \Omega_{p,tr} \cdot \tau(s). \end{cases} \quad (3)$$

Как и для пролетных бетонных блоков, для центрального бетонного блока процесс трещинообразования проходит две стадии. Особенностью для центрального блока является уменьшение площади бетона растянутой зоны в месте вертикального шва (в работе на растяжение участвует только бетон замоноличивания площадью $A_{c,eff,ad}$, что способствует появлению в конце первой стадии трещинообразования в месте контакта бетона плит и бетона замоноличивания поперечной трещины нормального отрыва). Для поперечных сечений с трещинами нормального отрыва (по краям выделенного блока) значения напряжений $\sigma_{s,ad,(l)}$ и $\sigma_{s,ad,(r)}$ известны, а значения смещений $s_{(l)}$ и $s_{(r)}$ – неизвестны.

Анализ результатов статистического моделирования. В силу нелинейности рассматриваемых моделей результатом статистического моделирования являются распределения выходных переменных модели (предельные значения внутренних усилий, момент трещинообразования, ширина раскрытия трещины, оценка деформаций: прогибы, перемещения), представляющие собой смеси вероятностных распределений. В частности, помимо сингулярности, связанной с появлением трещин, на изменение характера поведения модели под нагрузкой сказываются такие переходы, как достижение зоны текучести и предела текучести растянутой арматуры, причем отдельно для основного сечения и элементов усиления конструкции.

При нелинейном моделировании предопорных зон влияние на изменение характера выходных переменных оказывает также состояние поперечной арматуры и процесс возникновения наклонных трещин под воздействием перерезывающих сил.

Модель, представляющая собой смесь нормальных распределений, задается в виде:

$$p(x) = \sum_{i=1}^k w_i p(x|i),$$

где $p(x|i)$ – нормальное распределение для i -го кластера; w_i – вес i -го кластера в смеси.

Анализируемая смесь вероятностных распределений характеризуется неопределенностью относительно количества распределений в смеси и ограниченностью объема выборки. Кроме этого, распределения в смеси сильно перекрываются, что делает неприменимым алгоритм разделения смеси на основе кластеризации методом k -средних.

Для решения задачи разделения смеси вероятностных распределений, обладающей вышеуказанными особенностями, не рекомендуется применение классического EM-алгоритма, основными недостатками которого является, во-первых, высокая чувствительность к выбору первого приближения, во-вторых, неустойчивость [1; 2]. Также следует отметить, что EM-алгоритм и его известные модификации требуют значительных вычислительных ресурсов, в частности, адресного пространства для хранения $n \times k$ скрытых переменных и необходимости пересчета значений всех скрытых переменных на каждой итерации алгоритма.

Имеются медианные и стохастические модификации EM-алгоритма, которые делают алгоритм более устойчивым к выбору первого приближения, однако не снимают проблемы, связанной с неопределенностью по количеству кластеров [1]. Нами предложен генетический алгоритм разделения смеси, варьирующий количество и параметры компонентов (GEM – Genetic EM).

Общие положения теории надежности. Целью анализа результатов статистического моделирования является поиск вероятностных характеристик функции случайных переменных $Y = g(\mathbf{X})$.

В общем случае, когда речь идет о надежности строительных конструкций, характеристическая функция представляет собой разность случайной величины (в некоторых случаях – суперпозиции случайных величин), описывающей прочность конструкции, и случайной величины (суперпозиции случайных величин в силу линейного характера сочетания усилий), описывающей воздействие на конструкцию:

$$Y = g(\mathbf{X}) = X_R - X_S.$$

Тогда $g(\mathbf{X}) = 0$ представляет собой определение предельного состояния, $g(\mathbf{X}) > 0$ описывает область безопасной эксплуатации и $g(\mathbf{X}) < 0$ – область разрушения конструкции.

Вероятности этих событий можно интерпретировать как

$P[g(\mathbf{X}) > 0] = R$ – надежность, $P[g(\mathbf{X}) < 0] = 1 - R = P_f$ – вероятность разрушения.

В случае если модели входных переменных меняются со временем, имеем дело с вероятностным процессом, в рамках которого надежность оценивается как функция времени

$$R(t) = P[g(\mathbf{X}(t)) > 0].$$

Переход к стандартному нормальному распределению. В результате статистического моделирования мы получаем распределение несущей способности и воздействия. Если исходить из предположения, что закон распределения этих случайных величин является нормальным, то разность этих случайных величин есть нормально-распределенная случайная величина с параметрами: $\mu_{R-S} = \mu_R - \mu_S$, $\sigma_{R-S} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$.

Тогда, перейдя к стандартному нормальному распределению, имеем

$$P_f = P[R - S < 0] = \int_{-\infty}^0 f_{R-S}(x) dx = \Phi\left(\frac{0 - \mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right) = \Phi(-\beta),$$

где β – интерпретируется как индекс надежности.

Рассмотрение зависимости интеграла вероятности от базовых переменных модели. Для более детального описания вероятностной модели применяют переход от одномерной модели воздействия-сопротивления к многомерной модели с n -мерным вектором входных вероятностных параметров (прочностные характеристики материала, геометрические параметры изделий и т.п.).

В этом случае функцию $g(\mathbf{X})$ рассматривают как функцию в n -мерном пространстве, а вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ – как n -мерный вектор входных случайных параметров.

В таком случае интеграл вероятности определяется как n -мерный интеграл:

$$P_f = \int_{q(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В случае если все параметры представлены независимыми случайными величинами, объединенная функция распределения плотности вероятности в n -мерном пространстве будет представлять собой произведение функций распределения плотностей вероятности параметров:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i).$$

Переход n -мерного представления к стандартному нормальному распределению. Для упрощения процедуры вычисления искомого интеграла вероятности используют переход к стандартным нормальным распределениям. Такое допущение возможно, если указанный переход корректировать на каждом шаге итерационных процессов поиска наиболее вероятной точки области ошибки (разрушения).

В таком случае n -мерный интеграл вероятности будет определен как

$$P_f = \int_{q(\mathbf{u}) \leq 0} \phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \Phi(-\beta).$$

Для определения вероятности разрушения в пространстве стандартизованных нормальных распределений получили широкое распространение методы, основанные на разложении в ряд Тейлора функции $g(\mathbf{u})$. В зависимости от того, сколько членов ряда Тейлора берется во внимание для построения итерационного процесса поиска наиболее вероятной точки границы $g(\mathbf{u}) = 0$, различают **FORM** (First order reliability method) и **SORM** (Second order reliability method).

$$q(\mathbf{U}) = q(\mathbf{u}^*) + \nabla(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T + \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)^T,$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)$ – Гесссиан, $\nabla(\mathbf{u}^*)$ – градиент функции $g(\mathbf{u})$ в точке \mathbf{u}^* .

$$\nabla(\mathbf{u}^*) = \left(\frac{\partial q}{\partial U_1} \quad \frac{\partial q}{\partial U_2} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 q}{\partial U_1 U_n} \right) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}.$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial U_1^2} & \frac{\partial^2 q}{\partial U_1 U_2} & \dots & \frac{\partial^2 q}{\partial U_1 U_n} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial U_2 U_1} & \frac{\partial^2 q}{\partial U_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 q}{\partial U_2 U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 q}{\partial U_n U_1} & \frac{\partial^2 q}{\partial U_n U_2} & \dots & \frac{\partial^2 q}{\partial U_n^2} \end{bmatrix}$$

Поиск наиболее вероятной точки границы выживаемости или проектной точки (в зарубежных источниках **MPP** – Most probable point) осуществляется итерационно. В большинстве публикаций предлагается поиск методом простой итерации с критерием остановки по условию малости изменения оценки индекса надежности. В пространстве стандартизованных нормальных распределений индекс надежности определяется как расстояние от начала координат до проектной точки:

$$\beta = \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|, \quad q(\mathbf{u}) = 0.$$

Методы FORM и SORM применимы в том случае, когда мы имеем возможность построить дифференцируемое аналитическое выражение функции $g(\mathbf{u})$. Однако при использовании метода Монте-Карло для нелинейных моделей такое условие становится практически невыполнимым.

Для случая применения метода Монте-Карло оценка интеграла надежности будет представлять собой отношение количества численных экспериментов, в которых обеспечена прочность элемента, к общему количеству выполненных модельных расчетов:

$$P_f = \frac{n_f}{N}.$$

С учетом малости вероятности ошибки ($10^{-4} \dots 10^{-6}$) для оценки вероятности разрушения требуется объем эксперимента и обработки больших объемов данных.

Нами применен метод построения теоретических распределений по данным меньших объемов, и анализ результатов распределений как гауссовой смеси.

Учет нелинейных эффектов в процедуре оценки интеграла вероятности

Поскольку, как было показано, результирующее распределение несущей способности в силу влияния нелинейных эффектов является смесью нормальных распределений, то решением нелинейной задачи оценки индекса надежности будет являться оценка суммарной вероятности разрушения от каждой компоненты смеси.

Учитывая линейность преобразования Лапласа, сумма вероятностей отказа будет представлена следующим образом:

$$v_1\Phi(-\beta_1) + v_2\Phi(-\beta_2) + \dots + v_m\Phi(-\beta_m) = \Phi(-v_1\beta_1 - v_2\beta_2 \dots - v_m\beta_m),$$

$$\beta = \sum_{i=1}^m v_i\beta_i,$$

где v_1, \dots, v_m – веса компонентов смеси.

Заключение. Предложен комплексный метод оценки надежности строительных конструктивных элементов на основе нелинейных вероятностных моделей наиболее опасных участков и расчетных ситуаций. Сделан вывод о необходимости проверки гипотезы о том, что функция предельного состояния является гауссовой смесью вероятностных распределений, а в случае состоятельности данной гипотезы необходимо выполнение процедуры разделения смеси на компоненты. Предложена интерпретация данного факта как эффекта влияния нелинейных свойств и сингулярности моделей на распределение функции предельного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королёв, В.Ю. EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор / В.Ю. Королёв. – М. : Изд-во ИПИРАН, 2007. – 94 с.
2. Сеточные методы разделения смесей вероятностных распределений и их применение к декомпозиции волатильности финансовых индексов / В.Ю. Королёв [и др.] // Информатика и её применения. – 2008. – Т. 2. – Вып. 2. – С. 3–18.
3. Rackwitz, R. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences / R. Rackwitz and B. Fiessler // Computers and Structures. – 1978. – 9. – P. 489–494.
4. Allen, T.M. Calibration to Determine Load and Resistance Factors for Geotechnical and Structural Design / T.M. Allen, A.S. Nowak, R.J. Bathurst // Transportation Research Circular E-C079, Transportation Research Board. – Washington, D.C., 2005.
5. Cornell, C.A. Bounds on the Reliability of Structural Systems / C.A. Cornell // American Society of Civil Engineers : Journal of the Structural Division ASCE. – 1967. – Vol. 93, No. ST. – February. – P. 171–200.
6. Ржаницын, А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А.Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.
7. Vrouwenvelder, Ton Reliability Based Code calibration. The use of the JCSS Probabilistic Model Code / Vrouwenvelder Ton // Joint Committee of Structural Safety Workshop on Code Calibration, March 21/22, Zurich.

8. EN 1990 Eurocode – Basis of structural design. CEN 2002.
9. ISO 2394 General principles on reliability for structures, ISO 1998.
10. CEN, «ENV 1993-1-1 : Eurocode 3 Tiel 1-1 : Annex Z – Determination of design resistance from tests» // European Committee for Standardisation, Brussels, 1993.
11. Глухов, Д.О. Оценка параметров теоретических распределений случайных величин в расчете надежности строительных конструкций / Д.О. Глухов, Д.Н. Лазовский // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. F, Строительство. Прикладные науки. – 2008. – № 6. – С. 2–12.
12. Глухов, Д.О. Генераторы случайных чисел для расчета надежности строительных конструкций / Д.О. Глухов, Т.М. Глухова // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 60–68.
13. Глухов, Д.О. Численный анализ расчетной модели нормального сечения проекта СНБ 2.03.01-98 / Д.О. Глухов, Д.Н. Лазовский // Совершенствование железобетонных конструкций, оценка их состояния и усиление : сб. материалов респ. науч.-техн. конф. ; под ред. Т.М. Пецольда. – Минск : Технопринт, 2001. – С. 97.
14. Глухов, Д.О. Программы БЕТА и RADUGA для расчета строительных конструкций / Д.О. Глухов, Д.Н. Лазовский, О.Н. Лешкевич // Архитектура и строительство. – Минск : Полипринт, 2001. – № 6 (148). – С. 28–30.
15. Глухов, Д.О. Оценка вероятностных характеристик распределения эффектов от внешнего воздействия и функции предельного состояния в расчетах железобетонных элементов / Д.О. Глухов, Т.М. Глухова, Д.Н. Лазовский // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. F, Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 6. – С. 35–40.
16. Применение мягких вычислений для сглаживающей аппроксимации сложных сингулярных зависимостей / Д.О. Глухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2012. – № 12. С. 2–5.
17. Лазовский, А.Д. Алгоритм расчета сопротивления изгибу многопустотных плит перекрытий безопалубочного формования в составе платформенных стыков зданий / А.Д. Лазовский, Д.О. Глухов, Т.М. Глухова // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. F, Строительство. Прикладные науки. – 2017. – № 8. – С. 82–89.
18. Haldar, A. Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design / A. Haldar and S. Mahadevan, John Wiley. – New York, 2000.
19. Xiaoping Du. Second-Order Reliability Method with First-Order Efficiency [Electronic resource] / Xiaoping Du and Junfu Zhang // Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference (2010). – [Electronic resource]. – Mode of access: <http://works.bepress.com/xiaoping-du/75>.
20. Au, S.K. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation / S.K. Au, J.L. Beck // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2001. – 16(4). – P. 263–277.
21. Au, S.K. Importance sampling in high dimensions / S.K. Au, J.L. Beck // Structural Safety. – (2003a). – 25(2). – P. 139–163.
22. Au, S.K. Subset Simulation and its application to seismic risk based on dynamic analysis / S.K. Au, J.L. Beck // Journal of Engineering Mechanics. – (2003b). – 129(8). – P. 1–17.
23. Schueller, G.I. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions / G.I. Schueller, H.J. Pradlwarter, P.S. Koutsourelakis // Probabilistic Engineering Mechanics. – (2004). – 19. – P. 463–474.

Поступила 01.12.2017

PROBABILITY ANALYSIS OF THE STRUCTURAL REINFORCED CONCRETE ELEMENT

D. GLUKHOV, R. BOGUSH, E. LAZOVSKY, T. GLUKHOVA

The paper presents a comprehensive approach to assessing the reliability of structural components based on nonlinear probability models of the most dangerous areas and design situations. It is concluded that it is necessary to test the hypothesis that the resistance probability distribution function is a Gaussian mixture of probability distributions, and in the case of the validity of this hypothesis, the procedure for separating of the mixture into components is performed. An interpretation of this fact is proposed as an effect of the influence of nonlinear properties and the singularity of models.

Keywords: structural reinforced concrete element, evaluation of reliability, non-linear probabilistic models.