

УДК 624.04

**ВЛИЯНИЕ НАКЛОННЫХ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ
НА ВЕЛИЧИНУ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ**

канд. техн. наук, доц. **В.Н. КИСЕЛЁВ; И.А. ДАВЫДЕНКО**
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается инженерный метод расчета тонкостенных призматических стержней открытого профиля с наклонными ребрами жесткости на скручивающую нагрузку. Приведены развернутые выражения коэффициентов увеличения крутильной жесткости в зависимости от способов закрепления концов стержня, действующих на него внешней нагрузки, а также типа «противокрутильных связей».

Ключевые слова: крутильная жесткость, наклонные ребра жесткости, выражения коэффициентов.

Расчет тонкостенного стержня после нахождения неизвестных усилий взаимодействия «противокрутильных связей» и поясов балки можно производить по соответствующим выражениям В.З. Власова двумя способами: 1) для стержня без связей на действие внешних закручивающим нагрузок и найденных усилий взаимодействия (рис. 1); 2) для стержня без ребер жесткости на действие внешних нагрузок, но с учетом коэффициента увеличения крутильной жесткости m .

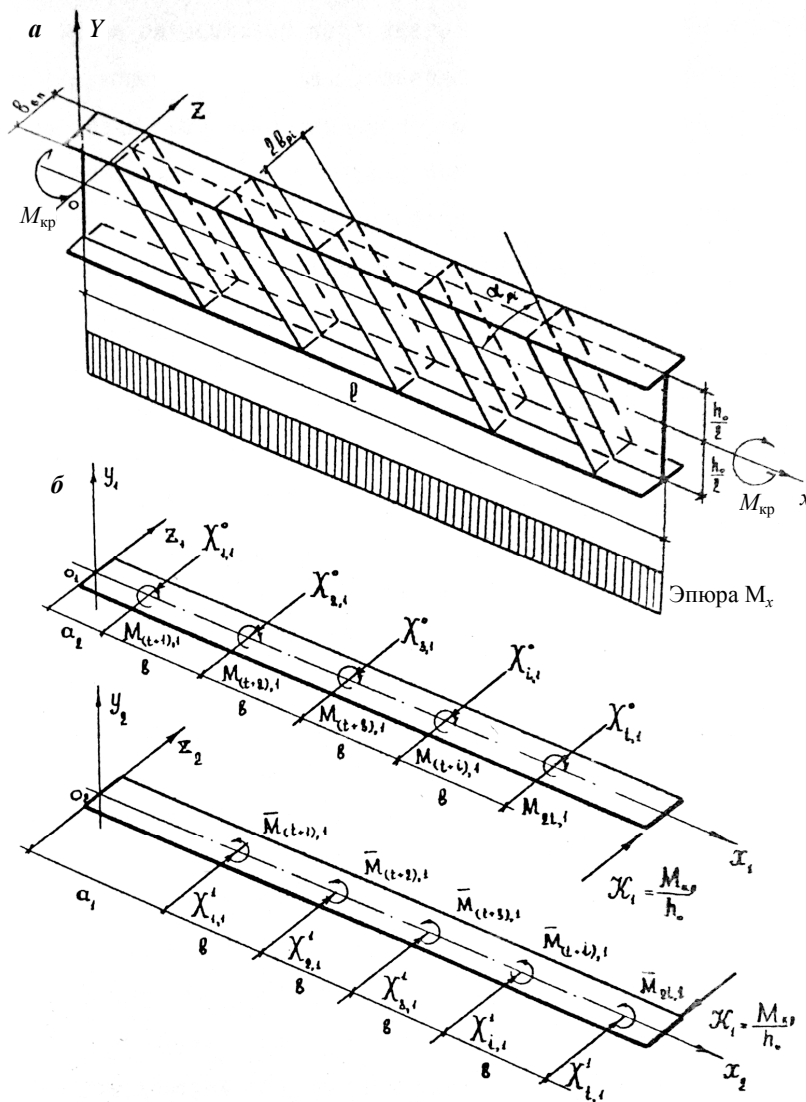


Рисунок 1. – Пример рассматриваемого стержня с внутренними усилиями

Рассмотрим второй вариант. При заданной внешней нагрузке (рис. 1) имеет место отношение (1):

$$\frac{[GI_d]}{GI_d} = \frac{\theta_{x=k,p}^0}{\theta_{x=k,p,\sum_0^l M_{i,n}}^0} = m > 1, \quad (1)$$

где $[GI_d]$ – крутильная жесткость стержня с наклонными ребрами; GI_d – крутильная жесткость неподкрепленного стержня; $\theta_{x=k,p,\sum_0^l M_{i,n}}^0$ – угол закручивания сечения $x = k$ стержня с наклонными ребрами жесткости; $\theta_{x=k,p}^0$ – угол закручивания того же сечения $x = k$ в том же стержне, но без ребер.

Введенная здесь величина $m > 1$ является коэффициентом увеличения крутильной жесткости стержня в результате усиления его «противокрутильными связями».

Угол закручивания $\theta_{x=k,p,\sum_0^l M_{i,n}}^0$ в стержне со связями может быть представлен суммой (2):

$$\theta_{x=k,p,\sum_0^l M_{i,n}}^0 = \theta_{x=k,p}^0 + \sum \theta_{x=k,M_{i,n}}, \quad (2)$$

где $\sum \theta_{x=k,M_{i,n}}$ – угол закручивания $x = k$ от действия найденных усилий взаимодействия: $M_{i,n}^0$, $M_{i,n}^1$, $M_{i,n}$, $\overline{M}_{i,n}$.

Подставляя (2) в (1), получим после некоторых преобразований (3):

$$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum \theta_{x=k,M_{i,n}}}{\theta_{x=k,p}^0}}. \quad (3)$$

Ниже, в таблице 1, приведены развернутые выражения коэффициентов m в зависимости от способов закрепления концов стержня, действующих на него внешней нагрузки, а также типа «противокрутильных связей», где m_I, m_{II} – коэффициенты увеличения крутильной жесткости шарнирно опертого стержня при четном и нечетном количестве «противокрутильных связей». Там же даны выражения углов закручивания от действия усилий взаимодействия $\sum \theta_{x=k,M_{i,n}}$ и действия внешней нагрузки $\theta_{x=k,p}^0$.

Необходимо отметить, что все вышеназванные величины определялись в характерных сечениях стержня. Под характерными сечениями стержня мы будем понимать такие сечения, в которых коэффициент увеличения крутильной жесткости принимает минимальное (максимальное) значение.

Нетрудно показать, что таким сечением для шарнирно опертой двутавровой (или другого поперечного сечения) балки с симметрично приложенной внешней закручивающей нагрузкой с симметричными (кососимметричными) «противокрутильными связями» будет сечение в середине пролета, а для консольной балки – на её незащемленном конце. Однако необходимо отметить, что минимум (максимум) непрерывной, однозначной функции $m = f(x)$ определить способом знаков первой производной, способом высших производных не удастся, так как вышеназванная функция не выражается через геометрические характеристики стержня и «противокрутильных связей». Это делается непосредственным расчетом по программе. Зная величины коэффициента m_{\min} , легко определить величину крутильной жесткости стержня с ребрами жесткости:

$$[GI_d] = m_{\min} \cdot GI_d. \quad (4)$$

Величина угла закручивания сечения $x = k$ такого стержня

$$\theta_{x=k,p,\sum M_i} = \frac{\theta_{x=k,p}^0}{m_{\min}}. \quad (5)$$

При определении величины коэффициента m из выражения (1) удобно пользоваться общей формулой перемещений (формула Мора) для тонкостенных стержней, которая при принятой гипотезе об отсутствии в средней поверхности стержня деформации сдвига имеет следующий вид:

$$\theta_{k,i} = \sum \int \frac{N_k \cdot N_i}{EF} dx + \sum \int \frac{M_k^y \cdot M_i^y}{EI_z} dx + \sum \int \frac{M_k^z \cdot M_i^z}{EI_y} dx + \sum \int \frac{M_k^{kp} \cdot M_i^{kp}}{GI_d} dx + \sum \int \frac{B_k \cdot B_i}{EI_\omega} dx. \quad (6)$$

Подынтегральное выражение первого интеграла представляет элементарную работу продольных сил; подынтегральное выражение второго и третьего интегралов – элементарную работу изгибающих моментов вокруг осей Y и Z ; четвертый интеграл – элементарную работу сен-венановских моментов; подынтегральное выражение пятого интеграла – элементарную работу крутящих бимоментов. Что касается поперечных сил при изгибе Q_y и Q_z и изгибно-крутящих моментов при стесненном кручении M_ω , то влиянием их на перемещения пренебрегаем. В тонкостенном стержне, находящемся в условиях только стесненного кручения, продольные силы и изгибающие моменты будут отсутствовать, и формула Мора для определения изгибно-крутильных перемещений будет иметь более простой вид:

$$\theta_{k,i} = \sum \int \frac{M_k^{kp} \cdot M_i^{kp}}{GI_d} dx + \sum \int \frac{B_k \cdot B_i}{EI_\omega} dx. \quad (7)$$

Проиллюстрируем применение этой формулы на примере.

Пример. Найти угол закручивания в сечении $x = \ell$ консольной балки, левый конец которой закреплен от закручивания и свободный для деформации от закручивания ее равномерно распределенными по всему пролету закручивающими моментами интенсивности m_{kp} .

Для определения искомого угла $\theta_{x=\ell, m_{kp}}$ прикладываем в сечении $x = \ell$ закручивающий момент $M_1 = I$ и строим эпюры крутящих моментов M^{kp} и изгибно-крутящих бимоментов от заданной нагрузки и от единичного закружения. Уравнения M^{kp} и B_k , соответствующие построенным эпюрам, имеют вид:

$$M_{m_{kp}}^{kp} = \frac{m_{kp}}{k} \cdot \left[k(\ell - x) - \frac{shk(0,5\ell - x)}{ch0,5k\ell} \right]; \quad B_{m_{kp}}^{kp} = \frac{m_{kp}}{k} \cdot \left[\frac{chk(0,5\ell - x)}{ch0,5k\ell} - 1 \right], \quad (8)$$

где $M_1^{kp} = 1$, $B_1 = 0$.

Совмещая и интегрируя эти уравнения, имеем:

$$\theta_{x=\ell, m} = \int_0^\ell \frac{M_m^{kp} \cdot M_1^{kp}}{GI_d} dx + \int_0^\ell \frac{B_k \cdot B_1}{EI_\omega} dx = \frac{m}{kGI_d} \int_0^\ell \left[k(\ell - x) - \frac{shk\left(\frac{\ell}{2} - x\right)}{ch0,5k\ell} \right] dx. \quad (9)$$

После преобразования получаем

$$\theta_{x=\ell, m} = \frac{m\ell^2}{2GI_d}. \quad (10)$$

Определение изгибно-крутильных перемещений в тонкостенных стержнях непосредственно по формуле (7) чрезвычайно трудоемки, так как приходится интегрировать произведения двух пар криволинейных эпюр, уравнения которых выражаются в гиперболических функциях. В нашем примере эти выражения получились достаточно простыми только потому, что второй интеграл равен нулю. Если взять, например, угол закручивания посередине пролёта балки, закрепленной от закручивания и свободной для деформации по концам от закружения ее равномерно распределенными по всему пролету закручивающими моментами интенсивностью m_{kp} , будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta_{x=\frac{\ell}{2}, m_{kp}} &= 2 \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{M_m^{kp} \cdot M_1^{kp}}{GI_d} dx + \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{B_k \cdot B_1}{EI_\omega} dx \right] = \\ &= \frac{m_{kp}\ell}{GI_d} \cdot \left\{ \frac{\ell}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{k^2\ell \cdot ch0,5k\ell} \left(chk \frac{\ell}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2k \cdot chk \frac{\ell}{2}} \cdot shk \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell ch0,5k\ell} \left[\frac{\ell}{2k} shk \frac{\ell}{2} - \frac{1}{k^2} \left(chk \frac{\ell}{2} - 1 \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{m_{kp}\ell}{GI_d} \cdot \left\{ \frac{1}{k\ell ch^2 0,5k\ell} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right\} + \frac{m_{kp}\ell}{GI_d} \cdot \frac{1}{k\ell ch0,5k\ell} \left[\frac{1}{k} \left(chk \frac{\ell}{2} - 1 \right) - \frac{1}{ch0,5k\ell} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right]. \end{aligned}$$

После преобразования выражение приобретает следующий вид:

$$\theta_{x=\frac{\ell}{2}, m_{kp}} = \frac{m_{kp}\ell^2}{8GI_d} \cdot \left(1 - \frac{8}{k^2\ell^2} + \frac{2}{ch0,5k\ell} \right). \quad (11)$$

Однако известно, что при определении перемещений в статически неопределимых системах из нетонкостенных элементов в качестве заданной системы можно считать не только действительную статически неопределимую систему, но и всякую геометрически неизменяемую систему, которая получается из действительной путем удаления из нее тех или иных связей и добавления усилий, заменяющих удаленные связи, к внешней нагрузке. В частности, можно принять и статически определимую систему, для которой эпюры являются наиболее простыми. Для системы из тонкостенных стержней, которые, в отличие от систем нетонкостенных, являются системами континуально статически неопределимыми, сказанное выше также будет целесообразно. В каждом сечении тонкостенного стержня, кроме неизвестных, связанных с лишними опорными закреплениями и наличием замкнутых контуров или «противокрутильных связей», вследствие положенной в основу расчета его гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения имеется еще одна лишняя неизвестная величина, а именно один из силовых или кинематических факторов, связанных с явлением стесненного кручения стержня.

Действительно, на каждое сечение тонкостенного стержня, находящегося в условиях пространственной работы, в общем случае действуют семь компонентов внутренних сил: $N, Q_y, Q_x, M_y, M_z, M_{kp}, B_\omega$. Причем первые шесть из этих компонентов в системах, внешне статически определимых, могут быть определены из условий равновесия. Седьмой же компонент – бимомент B_ω – величина статически неопределимая, зависящая не только от внешних воздействий и условий защемления стержня на опорах, но и от материала, формы и размеров сечения и от длины стержня. Так как все три крутильных и изгибно-крутильных силовых фактора B, \bar{M}_x, M_ω связаны между собой дифференциальными зависимостями, поэтому любой из них мы можем считать лишним неизвестным. Примем в качестве неизвестного бимомент B_ω . Удалив связи, соответствующие этому бимоменту, будем иметь систему, внутренне статически определимую, которая получается из заданной путем нанесения поперечных надрезов на тех участках контура, где $\omega \neq 0$ (рис. 2, а). Такая основная система сохраняет способность передавать крутящие моменты, но лишена возможности передавать бимоменты B_ω и изгибно-крутящие моменты M_ω , так как для неё секториальный момент инерции I_ω равен нулю, откуда следует, что при любой внешней нагрузке и при любых способах закрепления концов стержня по всей его длине $B_\omega = 0$ и $M_\omega = 0$.

В результате этого из (7) получаем (12):

$$\theta_{x=t,p} = \sum \int \frac{M_p^{kp} \cdot M_i^{kp}}{GI_d} dx. \quad (12)$$

Причем одна из эпюр M_p^{kp}, M_i^{kp} (любая) строится в заданной статически неопределимой в отношении дополнительных секториальных напряжений систему, а другая – в статически определимой.

Для уже выполненного выше примера будем иметь (13):

$$\theta_{x=\ell,m} = \int_0^\ell \frac{m(\ell-x)}{GI_d} \cdot x dx = \frac{m\ell^2}{2GI_d}. \quad (13)$$

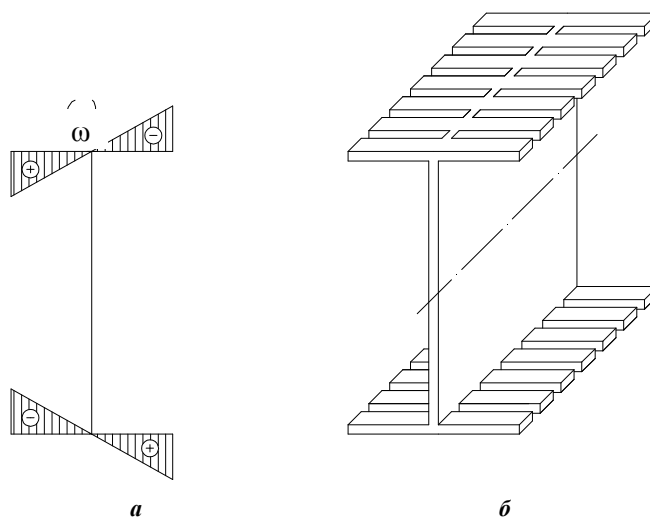


Рисунок 2. – Эпюры основной системы (а) и основная система с удаленными связями (б)

Как уже отмечалось выше, за неизвестное можно также принять сен-венановский крутящий момент \overline{M}_x . Удалив связи, соответствующие моменту и способствующие неравномерному распределению касательных напряжений по толщине стенки, получаем также определенную систему.

С этой целью в стенках профиля по плоскостям, перпендикулярным к срединной поверхности его по всему периметру сечения, сделаем с обеих сторон стенок надрезы, продолжив их только до срединной поверхности стержня, т.е. представим профиль как бы состоящим из продольных пластинок шириной, равной толщине стенки профиля, нанизанных на срединную поверхность стержня (рис. 3).

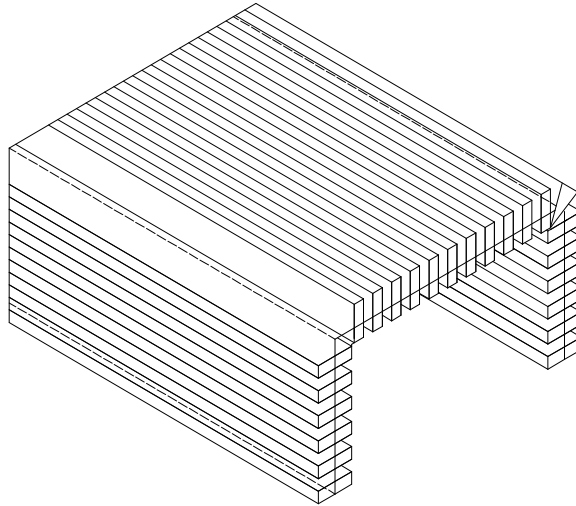


Рисунок 3. – Рассматриваемый профиль с надрезами

Стержень с указанными надрезами, находясь в условиях стесненного кручения, не теряет способность передавать от сечения к сечению бимоменты и изгибно-крутящие моменты, но он уже не способен передавать сен-венановские крутящие моменты, т.е. сопротивляемость такого стержня чистому кручению обращается в нуль, что может быть записано в форме (14) или (15):

$$GI_d = 0 ; \quad (14)$$

$$k\ell = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} = 0 . \quad (15)$$

В таком случае величины B_ω и M_ω в стержнях, внешне статически определимых, могут быть найдены из условий статики, а эпюры их по длине стержня будут иметь такой же вид (прямоугольный или параболический), как и соответствующие им эпюры изгибающих моментов и поперечных сил при поперечном изгибе. При построении единичных эпюр изгибно-крутящих бимоментов B_ω и сен-венановских крутящих моментов \overline{M}_x , соответствующих искомому перемещению, в уравнениях, выражающих эти величины, значение упругой изгибно-крутильной характеристики полагаем равным нулю. В таком случае M_1^{sp} при любых нагрузках и любых отпирациях стержня по концам будет равен нулю, а эпюры B_1 будут, как правило, иметь прямолинейный вид. Таким образом, формула (7) для определения изгибно-крутильных перемещений запишется в следующем виде:

$$\theta_{k,i} = \sum \int \frac{B_k \cdot B_i}{EI_\omega} dx . \quad (16)$$

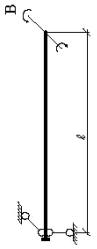
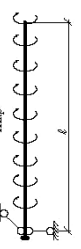
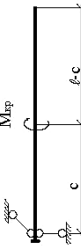
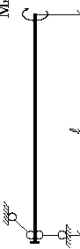
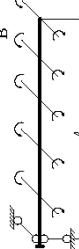
Кроме того, необходимо отметить, что одна из эпюр подынтегральных выражений (12) и (16) будет прямолинейной, что позволяет применять данные выражения при определении коэффициента увеличения крутильной жесткости.

Основным недостатком численного определения коэффициента по (1) заключается в том, что при некоторых видах внешней нагрузки и способах закрепления стержня знаменатель в (1) обращается в нуль. Это можно показать на примере шарнирно-опертого или защемленного с обоих концов стержня и нагруженного равномерно распределенным по длине внешним бимоментом интенсивностью ℓ . При решении дифференциального уравнения получим функцию углов закручивания по длине стержня: $\theta_k(x) = 0$.

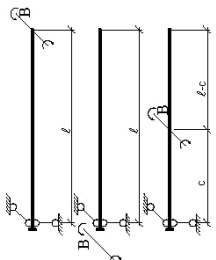
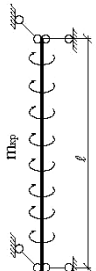
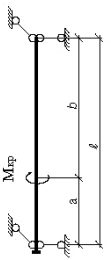
Таблица 1. – Развернутые выражения коэффициентов увеличения крутильной жесткости m

Схема балки и характер загрузки	Сечение	$\theta_{x=l,p}^0$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i,M_i,n}$	m
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{m_{xp}}{GI_d} \times \left[\frac{\ell^2}{2} + \frac{ch\ell - 1 - k\ell shk\ell}{k^2 chk\ell} \right]$		$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \{ M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} r_1 (chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell) + \overline{M}_{i,n} r_2 (chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell)] \}}{kchk\ell \cdot m_{xp} \left(0.5\ell^2 + \frac{ch\ell - 1 - k\ell shk\ell}{k^2 chk\ell} \right)}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{M_{xp}}{GI_d} \cdot \left[\ell - \frac{1}{k} thk\ell \right]$		$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \{ M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} r_1 (chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell) + \overline{M}_{i,n} r_2 (chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell)] \}}{kchk\ell \cdot M_{xp} \left(\ell - \frac{1}{k} thk\ell \right)}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{M_{xp}}{GI_d} \times \left[c - \frac{shk\ell - shk(\ell - c)}{kchk\ell} \right]$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i,M_i,n} = \frac{1}{kGI_d chk\ell} \times \left\{ \sum_{i=1}^t (M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} \cdot r_1 \{ chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell \} + \overline{M}_{i,n} \cdot r_2 \{ chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell \}]) \right\}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \{ M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} r_1 (chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell) + \overline{M}_{i,n} r_2 (chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell)] \}}{kchk\ell \cdot M_{xp} \left(c - \frac{shk\ell - shk(\ell - c)}{kchk\ell} \right)}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{B\ell}{GI_d} \times \left[c - \frac{shk\ell - shk(\ell - c)}{kchk\ell} \right]$	где t – число «противокрутильных связей», установленных согласно рисунку 1(а), n – количество системы (3)	$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \{ M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} r_1 (chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell) + \overline{M}_{i,n} r_2 (chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell)] \}}{kchk\ell \cdot B\ell \left(1 - \frac{1}{k} thk\ell \right)}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{B}{GI_d} \times \left[1 - \frac{chk(\ell - c)}{chk\ell} \right]$		$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \{ M_{i,n}^0 \xi_{1,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k [M_{i,n} r_1 (chk\ell - \eta_{1,i} shk\ell) + \overline{M}_{i,n} r_2 (chk\ell - \eta_{2,i} shk\ell)] \}}{kchk\ell \cdot B \left(1 - \frac{chk(\ell - c)}{chk\ell} \right)}}$

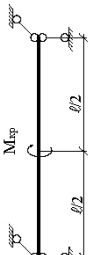
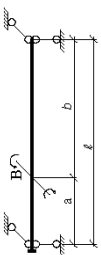
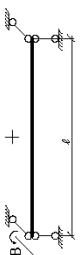
Продолжение таблицы 1

Схема балки и характер загрузки	Сечение	$\theta_{x=l,p}^0$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i,M_{i,n}}$	m
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{B}{GI_d} \cdot \left[1 - \frac{1}{chkl} \right]$	$\sum_{i=1}^t \left\{ M_{i,n}^0 \xi_{i,i} + M_{i,n}^1 \xi_{2,i} + k \left[M_{i,n}^1 (chkl - \eta_{1,shkl}) + \overline{M}_{i,n}^2 (chkl - \eta_{2,shkl}) \right] \right\}$ $1 + \frac{1}{kchkl \cdot B \left(1 - \frac{1}{chkl} \right)}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{1}{kchkl \cdot B \left(1 - \frac{1}{chkl} \right)}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{m_{кр} \cdot l^2}{2GI_d}$	$\sum_{i=1}^t \left[M_{i,n}^0 (1 - \alpha_{1,i}) + M_{i,n}^1 (1 - \alpha_{2,i}) + \frac{1}{l} (M_{i,n}^1 + \overline{M}_{i,n}^2) \right]$ $1 + 0.5 m_{кр} l$	$m = \frac{1}{1 + 0.5 m_{кр} l}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{M_{кр} c}{GI_d}$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i,M_{i,n}} = \frac{l}{GI_d} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^t M_{i,n}^0 \cdot (1 - \alpha_{1,i}) + M_{i,n}^1 \cdot (1 - \alpha_{2,i}) + \frac{1}{l} (M_{i,n}^1 + \overline{M}_{i,n}^2) \right\}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{M_{кр} \cdot c}{GI_d}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{M_{кр} l}{GI_d}$	$\sum_{i=1}^t \left[M_{i,n}^0 (1 - \alpha_{1,i}) + M_{i,n}^1 (1 - \alpha_{2,i}) + \frac{1}{l} (M_{i,n}^1 + \overline{M}_{i,n}^2) \right]$ $1 + \frac{M_{кр}}{GI_d}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{M_{кр}}{GI_d}}$
	$x = l$	$\theta_{l,p}^0 = \frac{B l}{GI_d}$	$\sum_{i=1}^t \left[M_{i,n}^0 (1 - \alpha_{1,i}) + M_{i,n}^1 (1 - \alpha_{2,i}) + \frac{1}{l} (M_{i,n}^1 + \overline{M}_{i,n}^2) \right]$ $1 + \frac{B}{GI_d}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{B}{GI_d}}$


Продолжение таблицы 1

Схема балки и характер загрузки	Сечение	$\theta_{x=\ell, p}^0$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}$	m
	$x = \ell$ $\theta_{\ell, p}^0 = \frac{B}{kGI_d}$	$\sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n} = \frac{1}{kGI_d} \times$ $\sum_{i=1}^t \left\{ M_{i, n}^0 \cdot \left[\frac{k\ell}{2} (1 - \alpha_{1, i}) - \nu_{1, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right] + \right.$ $+ M_{i, n}^1 \left[\frac{k\ell}{2} (1 - \alpha_{2, i}) - \nu_{2, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right] +$ $+ M_{i, n}^0 \left(\frac{k\ell}{2} \alpha_{1, i} - \beta_{1, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) +$ $+ M_{i, n}^1 \left(\frac{k\ell}{2} \alpha_{2, i} - \beta_{2, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) +$ $+ k \left[M_{i, n} \cdot r_1 \left(\frac{1}{2} - \xi_{1, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) + \right.$ $+ \overline{M}_{i, n} \cdot r_2 \left(\frac{1}{2} - \xi_{2, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) +$ $+ M_{i, n} \left(\frac{1}{2} - \eta_{1, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) +$ $\left. \left. + \overline{M}_{i, n} \left(\frac{1}{2} - \eta_{2, i} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right) \right] \right\}$	$m = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \left[M_{i, n}^0 (1 - \alpha_{1, i}) + M_{i, n}^1 (1 - \alpha_{2, i}) + \frac{1}{\ell} (M_{i, n} r_1 + \overline{M}_{i, n} r_2) \right]}{\frac{1}{\ell} \cdot B}}$	
	$\theta_{\frac{\ell}{2}, p}^0 = \frac{m_{kp}}{k^2 GI_d} \times$ $\times \left(\frac{k^2 \ell^2}{8} + \frac{1}{ch0.5k\ell} - 1 \right)$ <p style="text-align: center;">при $a < \frac{\ell}{2}$</p> $\theta_{\frac{\ell}{2}, p}^0 = \frac{M_{kp}}{kGI_d} \times$ $\times \left(\frac{ka \cdot shka \cdot shk \frac{\ell}{2}}{2 \cdot shk\ell} - 1 \right)$ <p style="text-align: center;">при $a > \frac{\ell}{2}$</p>	$m_1 = \frac{1}{1 + \frac{8k^2 GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{m_{kp} \left(k^2 \ell^2 + \frac{1}{ch0.5k\ell} - 8 \right)}}$ $m_{II} = \frac{1}{1 + \frac{2kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{M_{kp} \left(ka - 2 \frac{shka \cdot shk \ell}{shk\ell} \cdot sh0.5k\ell \right)}}$	$m_1 = \frac{1}{1 + \frac{2kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{M_{kp} \left(kb - 2 \frac{shkb \cdot shk \ell}{shk\ell} \cdot sh0.5k\ell \right)}}$ $m_{II} = \frac{1}{1 + \frac{2kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{M_{kp} \left(ka - 2 \frac{shka \cdot shk \ell}{shk\ell} \cdot sh0.5k\ell \right)}}$	
	$x = \frac{\ell}{2}$	$\theta_{\frac{\ell}{2}, p}^0 = \frac{m_{kp}}{kGI_d} \times$ $\times \left(\frac{kb \cdot shkb \cdot shk \frac{\ell}{2}}{2 \cdot shk\ell} - 1 \right)$	$m_1 = \frac{1}{1 + \frac{2kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{M_{kp} \left(kb - 2 \frac{shkb \cdot shk \ell}{shk\ell} \cdot sh0.5k\ell \right)}}$ $m_{II} = \frac{1}{1 + \frac{2kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{i, M_i, n}^1}{M_{kp} \left(ka - 2 \frac{shka \cdot shk \ell}{shk\ell} \cdot sh0.5k\ell \right)}}$	

Продолжение таблицы 1

Схема балки и характер загрузки	Сечение	$\theta_{x=l,p}^0$	$\sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}$	m	
	$\theta_{\ell}^0 = \frac{M_{сп}}{2 \cdot p} \times \left(\frac{k\ell - shk \frac{\ell}{2}}{2} \right)$ <p>при $a < \frac{\ell}{2}$</p> $\theta_{\ell}^0 = \frac{B}{2 \cdot p} \times \left(\frac{1 - chka \cdot shk \frac{\ell}{2}}{2} \right)$	$\sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n} = \frac{1}{kGI_d} \times \left\{ \sum_{i=1}^t M_{i,n}^0 \cdot \left[\frac{k\ell}{2} (1 - \alpha_{1,i}) - \alpha_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right] + k\tau_2 M_{i,n} \left(\frac{1}{2} - \xi_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right) \right\} +$ $\sum_{i=1}^{t+1} \left\{ M_{i,n} \cdot \left[\frac{k\ell}{2} (1 - \alpha_{2,i}) - \alpha_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right] + k\tau_2 M_{i,n} \left(\frac{1}{2} - \xi_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right) \right\} +$	$m_1 = \frac{1}{4kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_{сп}}{k\ell - 2th0.5k\ell}}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{B \left(1 - 2 \frac{chka \cdot shk \ell}{2} \right)}$	$m_1 = \frac{1}{4kGI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_{сп}}{k\ell - 2th0.5k\ell}}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{B \left(1 - 2 \frac{chka \cdot shk \ell}{2} \right)}$	
	<p>при $a > \frac{\ell}{2}$</p> $\theta_{\ell}^0 = \frac{B}{2 \cdot p} \times \left(\frac{1 - chkb \cdot shk \frac{\ell}{2}}{2} \right)$	$\sum_{i=1}^{t+1} \left\{ M_{i,n} \cdot \left[\frac{k\ell}{2} (1 - \alpha_{2,i}) - \alpha_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right] + k\tau_2 M_{i,n} \left(\frac{1}{2} - \xi_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right) \right\} +$ $\sum_{i=1}^{t+1} \left\{ M_{i,n}^0 \cdot \left(\frac{k\ell}{2} \alpha_{1,i} - \beta_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right) + k\tau_2 M_{i,n} \left(\frac{1}{2} - \eta_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right) \right\} +$	$m_1 = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{-B \left(1 - 2 \frac{chkb \cdot shk \ell}{2} \right)}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{-B \left(1 - 2 \frac{chkb \cdot shk \ell}{2} \right)}$	$m_1 = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{-B \left(1 - 2 \frac{chkb \cdot shk \ell}{2} \right)}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{-B \left(1 - 2 \frac{chkb \cdot shk \ell}{2} \right)}$	
	$\theta_{\ell}^0 = \pm \frac{B}{2 \cdot p} \times \left(\frac{1 - sh0.5k\ell}{2} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right)$	$\sum_{i=1}^{t+1} \left\{ M_{i,n}^1 \cdot \left(\frac{k\ell}{2} \alpha_{2,i} - \beta_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right) + k\tau_2 M_{i,n} \left(\frac{1}{2} - \eta_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right) \right\}$	$m_1 = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh0.5k\ell}{2} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right)}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh0.5k\ell}{2} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right)}$	$m_1 = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh0.5k\ell}{2} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right)}$ $m_{II} = \frac{1}{2GI_d \cdot \sum_{i=1}^t \theta_{\ell, M_i, n}^i} \cdot \frac{1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh0.5k\ell}{2} \cdot shk \frac{\ell}{2} \right)}$	

Окончание таблицы 1

Схема балки и характер загрузки	Сечение $x = \frac{\ell}{2}$	$\theta_{x=\ell/2}^0$	$\sum_{i=1}^{\ell} \theta_{i, M_{i,n}}$	m	m_{II}
	$\theta_{\frac{\ell}{2}, p}^0 = \pm \frac{B}{2 \cdot p} \cdot \frac{G I_d}{\left(\frac{1 - sh 0,5 k \ell}{2} - shk \ell \right)}$	$\sum_{i=1}^{\ell} \theta_{i, M_{i,n}}^1 = \frac{1}{k G I_d} \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ M_{i,n}^0 \times \left[\frac{k \ell}{2} (1 - \alpha_{1,i}) - \nu_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right] + M_{i,n}^1 \left[\frac{k \ell}{2} (1 - \alpha_{2,i}) - \nu_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right] + k r_1 M_{i,n} \left(\frac{1 - \xi_{1,i} shk \ell}{2} \right) + k r_2 M_{i,n} \left(\frac{1 - \xi_{2,i} shk \ell}{2} \right) + M_{i+\frac{\ell}{2}}^0 \left(\frac{k \ell}{2} \gamma_{1,i} - \varepsilon_{1,i} shk \frac{\ell}{2} \right) + M_{i+\frac{\ell}{2}}^1 \left(\frac{k \ell}{2} \gamma_{2,i} - \varepsilon_{2,i} shk \frac{\ell}{2} \right) - M_{i+\frac{\ell}{2}} \left(\frac{k \ell}{2} \right) \cdot k r_1 \left(\frac{1 - \lambda_{1,i} shk \ell}{2} \right) - \overline{M}_{i+\frac{\ell}{2}} \left(\frac{k \ell}{2} \right) \cdot k r_2 \left(\frac{1 - \lambda_{2,i} shk \ell}{2} \right) \right\}$	$m_i = \frac{1}{1 + \frac{2 G I_d \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{i, M_{i,n}}^1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh 0,5 k \ell}{sh k \ell} \right)}}$	$m_{II} = \frac{1}{1 + \frac{2 G I_d \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{i, M_{i,n}}^1}{\pm B \left(1 - 2 \frac{sh 0,5 k \ell}{sh k \ell} \right)}}$	

Заключение. В результате проведенного исследования получены значения коэффициентов крутильной жесткости, а также выражения углов закручивания для стержней с противокрутильными связями при различных способах закрепления опоры, приложения нагрузок, а также вида противокрутильной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М., 1940.
2. Папкович, П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович. – М.-Л., 1939.
3. Броуде, Б.М. Распределение сосредоточенного давления в стальных балках / Б.М. Броуде. – М.-Л., 1950.
4. Бирюлев, В.В. О работе стальных балок со стенками, усиленными наклонными ребрами жесткости / В.В. Бирюлев, И.И. Крылов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1971. – № 9.
5. Болотин, Б.В. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития / Б.В. Болотин, И.И. Гельденблат, А.Ф. Смирнов. – М. : Изд-во лит. по стр-ву, 1972.
6. Борисов, М.Б. Расчет на кручение спаренных планками тонкостенных стержней : дис. ... канд. техн. наук / М.Б. Борисов, 1948.
7. Борисов, М.Б. Расчет на кручение составных тонкостенных балок с учетом упругих деформаций соединительных планок / М.Б. Борисов // Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета. – 1953. – Вып. 23.
8. Бычков, Д.В. Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках / Д.В. Бычков // Исследование металлических конструкций. – 1940.
9. Бычков, Д.В. Кручение металлических балок / Д.В. Бычков, А.К. Мрошинский. – М. : Стройиздат, 1944.
10. Власов, В.З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие изгиба и кручения / В.З. Власов // Вестн. ВФ. – 1936. – № 20.
11. Власов, В.З. Кручение, устойчивость и колебание тонкостенных стержней / В.З. Власов // Прикладная математика и механика. – 1939. – Т. 3, вып. 1.

Поступила 02.12.2016

THE INFLUENCE OF TILTING STIFFENERS ON THE VALUE OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A ROD

V. KISELYOV, I. DAVYDENKO

The engineering method of calculation of thin prismatic bars open profile with oblique ribs on the torsional load is considered. Detailed expressions for the coefficients increase torsional rigidity and depending on the fastening ends of the rod acting on it an external load, and the type "antitorsional linkages" are given.

Keywords: torsional stiffness, the inclined ribs of expression ratios.