

## ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОЭКОЛОГИЯ

УДК 528.854.4

### РАСЧЕТ ВЗАИМНОЙ ИНФОРМАЦИИ МЕЖДУ РАСПОЗНАВАЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ ДЕШИФРИРОВАНИИ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*д-р техн. наук, проф. А.С. ЯРМОЛЕНКО**(Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого);**О.А. КУЦАЕВА**(Белорусская государственная орденов Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени сельскохозяйственная академия, Горки)*

*Представлен вывод формулы зависимости взаимной информации от определителей ковариационных матриц оцениваемых и эталонных объектов. На ее основе приводятся частные случаи коррелированности признаков, которые проявляют влияние коэффициентов корреляции на значение взаимной информации. По результатам теоретических исследований разработан алгоритм распознавания, основанный на расчете взаимной информации между объектами для дешифрования многоканальных изображений по её максимуму на алгоритмическом объектно-ориентированном языке IDL. Приведен пример тестирования разработанного алгоритма. Показаны его состоятельность, новизна – возможность распознавания объектов по количеству взаимной информации, учитывающей множество корреляционных зависимостей между составляющими вектора признаков эталонных и распознаваемых объектов, что актуально при распознавании многоканальных изображений.*

**Ключевые слова:** *распознавание образов, взаимная информация, дешифрование изображений.*

**Введение.** О возможности применения взаимной информации в распознавании образов указывается в [1]. Ею определяется количество информации, которое содержит один объект о другом. В этом заключается универсальность подхода к оценке образов при любом распределении значений признаков распознаваемых объектов. Поскольку в [1] и других известных авторам литературных источниках отсутствуют выводы для определения взаимной информации при множестве признаков распознаваемых объектов, то считаем выполнение данных исследований актуальным, особенно в свете широких возможностей современных информационно-коммуникационных технологий.

Из базового курса теории информации известно, что взаимная информация двух изображений  $\alpha$  и  $\beta$  друг относительно друга определяется формулой [2, с. 120]:

$$I(\beta, \alpha) = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha, \beta), \quad (1)$$

где  $H(\alpha)$ ,  $H(\beta)$  – энтропия образа  $\alpha$ ,  $\beta$  соответственно;  $H(\alpha, \beta)$  – совместная энтропия этих образов (энтропия совместного появления событий  $\alpha$  и  $\beta$ ).

Событиями считаются образы (изображения)  $\alpha$  и  $\beta$ . Отметим, что взаимная информация может быть выражена и через условную энтропию [2, с. 119], но в данной работе принимаем (1) как удобную в соответствии с [2]. Совместная энтропия может быть вычислена согласно [2, с. 90] или [3, (1.30)]. В соответствии с терминологией [3] под сообщением будем понимать набор значений пикселей изображения, ограниченных определенной областью, задаваемой правильной геометрической фигурой – квадратом, прямоугольником, кругом, эллипсом. Поскольку результаты исследований реализованы в программном комплексе ENVI [4], то в нем такие области называются ROI (Regions of Interests). Символом источника сообщения принимаются значение яркости пикселя в интервале от 0 до 255 в каждом канале изображения.

**Основная часть.** Вначале в качестве признака, характеризующего образ, принимаем распределенное значение пикселей по области ROI изображения. Значением пикселя может быть его яркость на определенном канале изображения. В качестве модели для исследования примем нормальный закон распределения значений пикселей изображения. Для таких исследований выводы, получаемые на основе этого закона, являются гарантированными по точности, то есть в соответствии с полученными на основе [5–7] выводами [8–10], минимаксными, а если предполагаются известными и параметры распределения, то и самыми точными. Несколько другими словами минимаксность нормального закона распределения сигнала источника сообщений выражена в [3, (1.27)]. Этот закон в [11], по нашему мнению, обоснованно принимается как пример функции плотности распределения признаков дешифрования.

В данной работе предполагаем возможность достоверного определения дисперсии, среднего значения символов сообщения, коэффициентов корреляции между рядами символов сообщений.

Пусть значения пикселей образа  $\alpha$  имеют плотность распределения

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (2)$$

а значения пикселей образа  $\beta$  – плотность распределения

$$f_{\beta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}. \quad (3)$$

Плотность совместного распределения значений пикселей изображений  $\alpha$  и  $\beta$  представим следующим образом [12, (9.1.1)]:

$$f_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}\right)}. \quad (4)$$

В формуле (4) все обозначения общепринятые;  $r$ , как известно, – коэффициент корреляции значений пикселей этих двух образов. Значения  $a$  и  $b$  могут быть найдены как средние значения пикселей по области ROI для каждого канала изображения. Коэффициент корреляции устанавливается для значений пикселей каждой пары каналов. Тогда с учетом (2)–(4) взаимная информация (1) примет вид:

$$I(\beta, \alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(x) \ln f_{\alpha}(x) dx + \left(-\int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}(y) \ln f_{\beta}(y) dy\right) - \left(-\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha\beta}(x, y) \ln f_{\alpha\beta}(x, y) dx dy\right). \quad (5)$$

После несложных преобразований найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(x) \ln f_{\alpha}(x) dx = -\ln(\sqrt{2\pi\sigma_x}) - \frac{1}{2} = -\ln(\sqrt{2\pi e}\sigma_x). \quad (6)$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}(y) \ln f_{\beta}(y) dy = -\ln(\sqrt{2\pi e}\sigma_y). \quad (7)$$

Для определения дифференциальной энтропии совместного распределения признака образов  $\alpha$  и  $\beta$  вначале сделаем замену переменных:

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left( \frac{(x-a)}{\sigma_x} - \frac{r(y-b)}{\sigma_y} \right); \quad (8)$$

$$v = \frac{(y-b)}{\sigma_y}. \quad (9)$$

В общем случае, если задана плотность распределения  $f_1(z)$  вектора  $z$  и определена зависимость

$$w = \varphi(z), \quad (10)$$

плотность распределения вектора  $w$  будет [13]

$$f_2(w) = f_1(\varphi^{-1}(w)) \cdot |J(w)|, \quad (11)$$

где  $J(w)$  – якобиан преобразований при переходе к переменной  $w$ , вычисляется как

$$J(w) = \frac{\partial \varphi^{-1}(w)}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}(w)}{\partial w_n} \\ \frac{\partial \varphi_2^{-1}(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial \varphi_2^{-1}(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2^{-1}(w)}{\partial w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n^{-1}(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial \varphi_n^{-1}(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n^{-1}(w)}{\partial w_n} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\varphi^{-1}(w) = z; \quad (13)$$

$n$  – число составляющих  $w_i$  вектора  $w$ .

В случае (8), (9)

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \varphi_1^{-1}(w) = x \\ z_2 &= \varphi_2^{-1}(w) = y \\ w_1 &= u \\ w_2 &= \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Следовательно,

$$x = \sigma_x(u\sqrt{1-r^2} + r\vartheta) + a; \quad (15)$$

$$y = \sigma_y\vartheta + b. \quad (16)$$

В соответствии с (15) и (16)

$$J(w) = \begin{pmatrix} \sigma_x\sqrt{1-r^2} & \sigma_x \cdot r \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$|J(w)| = \sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}. \quad (18)$$

С учетом (18), (11), (15) и (16) после логарифмирования запишем энтропию совместного появления образов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$H(\alpha, \beta) = \ln(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}) + 1 = \ln(2\pi\sigma_x\sigma_y e\sqrt{1-r^2}). \quad (19)$$

При вычислении (19) принимались следующие определенные интегралы [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}; \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}. \quad (21)$$

После подстановки (19), (7), (6) в (5) находим

$$I(\beta, \alpha) = \ln \frac{2\pi e\sigma_x\sigma_y}{2\pi e\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} = -\frac{1}{2} \ln(1-r^2). \quad (22)$$

Из (22) следует, что количество взаимной информации определяется коэффициентом корреляции образов  $\alpha$  и  $\beta$ . Однако это справедливо лишь в случае наличия одного признака объекта, тем более без вывода эта формула дана в [1]. В случае более одного признака необходимы дополнительные исследования, выполненные нами далее.

**Взаимная информация при наличии многих признаков распознавания образов.** Пусть изображения  $\alpha$  и  $\beta$  многоканальные. В каждом канале яркость одного и того же пикселя будет различной. Однако эти яркости между каналами также могут различаться. В таком случае один пиксель будет характеризоваться вектором значений яркостей. Размерность такого вектора будет равна числу каналов изображения. Представим вектор значений яркостей в следующем виде:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (23)$$

Здесь  $n$  – число каналов изображения;  $x_i$  – яркость пикселя на канале  $i$ , которую определим как признак с номером  $i$ . В общем случае эти признаки могут быть и коррелированы между собой. Ковариационная матрица составляющих вектора признаков может быть записана в виде:

$$K_1 = \begin{pmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & D_n \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $D_i = K_{ij}$  – дисперсия  $i$  составляющей вектора (22);  $K_{ij}$  – ковариационный момент составляющих  $i$  и  $j$  этого вектора.

В соответствии с [13, с. 158] можно записать функцию плотности нормального распределения вектора  $X$ :

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{D_1}} e^{-\frac{1}{2}(x-A)^T K_1^{-1}(x-A)}, \quad (25)$$

где  $A$  – вектор математических ожиданий составляющих вектора  $X$ ;  $K_1$  – ковариационная матрица признаков, составляющих вектор  $X$ ;  $D_1$  – определитель матрицы  $K_1$ .

Будем считать, что функция (25) записана для вектора характеристик входного образа  $\alpha$ .

Для эталонного образа  $\beta$  такую же функцию запишем следующим образом:

$$f_{\beta}(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{D_2}} e^{-\frac{1}{2}(y-B)^T K_2^{-1}(y-B)}, \quad (26)$$

где  $B$  – вектор математических ожиданий составляющих вектора  $Y$  признаков образа  $\beta$ ;  $K_2$  – ковариационная матрица признаков составляющих вектор  $Y$ ;  $D_2$  – определитель матрицы  $K_2$  признаков образа  $\beta$ .

Значение взаимной информации между образами  $\alpha$  и  $\beta$  можно по аналогии с (1) и (5) записать так:

$$I(\beta, \alpha) = -\int_X f_{\alpha}(x) \ln f_{\alpha}(x) dx + \left( -\int_Y f_{\beta}(y) \ln f_{\beta}(y) dy \right) - \left( -\int_{XY} f_{\alpha\beta}(x, y) \ln f_{\alpha\beta}(x, y) dx dy \right), \quad (27)$$

где символы  $X$ ,  $Y$ ,  $XY$  у знаков интегралов указывают на области интегрирования по многомерным переменным  $x$ ,  $y$  в каждой из трех составляющих данного выражения.

Согласно (27) можно записать

$$\ln f_{\alpha}(x) = -\ln\left((\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{D_1}\right) - \frac{1}{2}(x-A)^T K_1^{-1}(x-A). \quad (28)$$

Тогда первое выражение в (27) будет:

$$H_{\alpha} = \int_X \left( \ln\left((\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{D_1}\right) + \frac{1}{2}(x-A)^T K_1^{-1}(x-A) \right) f_{\alpha}(x) dx. \quad (29)$$

Для определения такого интеграла прибегают к диагонализации формы:

$$(x-A)^T K_1^{-1}(x-A). \quad (30)$$

Суть диагонализации заключается в следующем [15]. Если дана некоторая прямоугольная матрица (необязательно квадратная и симметричная)  $W_{n \times p}$  ( $n$  – число строк,  $p$  – число столбцов), ее можно представить в виде:

$$W = P \cdot \Sigma \cdot Q^T, \quad (31)$$

где  $P$  – матрица, образованная  $p$  ортогональными собственными векторами, соответствующими  $p$  наибольшим собственным значениям матрицы  $WW^T$ . Размерность матрицы составляет  $n \times p$ ;  $Q$  – ортогональная матрица, образованная ортогональными векторами матрицы  $W^T W$ ;  $\Sigma$  – диагональная матрица, составленная из квадратных корней собственных значений матрицы  $W^T W$ .

Если же матрица  $W$  квадратная неособенная и симметричная размерности  $n \times n$ , то существует такая ортогональная матрица  $H$ , при которой справедливо произведение

$$H^T W H = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (32)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $W$ .

Для приведения квадратичной формы (30) к диагональному виду введем обозначение:

$$Z = H^T (x - A), \quad (33)$$

из которого следует

$$(x - A) = HZ. \quad (34)$$

Подстановка (34) в (30) приводит к форме

$$Z^T H^T K^{-1} H Z. \quad (35)$$

Можно подобрать такую ортогональную матрицу  $H$ , чтобы форма (30) была выражена как

$$Z_1^2 \cdot \frac{1}{\sigma_1^2} + Z_2^2 \cdot \frac{1}{\sigma_2^2} + \dots + Z_n^2 \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \cdot \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (36)$$

В формуле (36)  $\frac{1}{\sigma_i^2}$  – собственные числа матрицы  $K^{-1}$ .

С учетом преобразования (36) плотность (25) запишем следующим образом:

$$f_{\alpha}(Z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{D_1}} |H| e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (37)$$

где  $|H|$  – определитель матрицы  $H$  как якобиана преобразования (33).

Поскольку  $H$  – ортогональная матрица, то определитель

$$|H| = 1. \quad (38)$$

Аналогично можно переписать и выражение (28)

$$\ln f_{\alpha}(z) = -\ln\left((\sqrt{2\pi})^n \sqrt{D_1}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \cdot \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (39)$$

Тогда с учетом (37), (39) можно вычислить дифференциальную энтропию

$$-\int_X f_{\alpha}(x) \ln f_{\alpha}(x) dx = -\int_Z f_{\alpha}(Z) \ln f_{\alpha}(Z) dZ = \int_Z \left( \ln\left((\sqrt{2\pi})^n \sqrt{D_1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \frac{1}{\sigma_i^2} \right) f_{\alpha}(Z) dZ. \quad (40)$$

Для вычисления выражения (40) воспользуемся интегралами (20), (21). В них

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_i}. \quad (41)$$

С учетом (41) первое выражение (40) после интегрирования будет

$$\ln\left((\sqrt{2\pi})^n \sqrt{D_1}\right). \quad (42)$$

Второе выражение с учетом интеграла (21) и обозначения (41) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n (\sqrt{2\pi})^n}{(\sqrt{2\pi})^n \cdot \sqrt{D_1}} = n. \quad (43)$$

Поскольку

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n = \sqrt{D_1}, \quad (44)$$

то с учетом (42), (43) дифференциальная энтропия (40) будет

$$H_{\alpha} = \ln\left((\sqrt{2\pi})^n \sqrt{D_1}\right) + n = \ln\left((\sqrt{2\pi})^n e \sqrt{D_1}\right). \quad (45)$$

Дифференциальные энтропии образа  $\beta$  и совместно образов  $\alpha$  и  $\beta$  по аналогии с (45) можно записать

$$H_{\beta} = \ln\left((\sqrt{2\pi})^n e^n \sqrt{D_2}\right); \quad (46)$$

$$H_{\alpha\beta} = \ln\left((\sqrt{2\pi})^{2n} e^{2n} \sqrt{D}\right), \quad (47)$$

где  $D_2$  и  $D$  – определители матриц  $K_2$  и  $K$ . Причем матрица  $K$  является ковариационной матрицей вектора

$$(X - A, X - B)^T. \quad (48)$$

Ее можно представить так:

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_2 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где  $K_{12}$  – ковариационный момент векторов  $(X - A)$  и  $(X - B)$ .

После подстановки (46), (47) в (27) найдем

$$I(\alpha, \beta) = \ln\left((\sqrt{2\pi})^n e^n \sqrt{D_1}\right) + \ln\left((\sqrt{2\pi})^n e^n \sqrt{D_2}\right) - \ln\left((\sqrt{2\pi})^{2n} e^{2n} \sqrt{D}\right), \quad (50)$$

или

$$I(\alpha, \beta) = \ln \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D}}. \quad (51)$$

**Вычисление взаимной информации при известных ковариационных матрицах их признаков.**

Будем считать, что в (49) все матрицы известны. Для определения определителя  $D$  матрицы  $K$  приведем ее путем гауссовых преобразований к треугольному виду [16]. Для этого вычтем из второй строки (49) первую, умноженную на  $-K_{21} \cdot K_1^{-1}$ . Получим

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_{12} \\ 0 & K_2 - K_{21} K_1^{-1} K_{12} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Определитель такой матрицы равен

$$D = |K_1| |K_2 - K_{21} K_1^{-1} K_{12}| \quad (53)$$

или, поскольку

$$|K_1| = D_1, \quad (54)$$

то

$$D = |D_1| |K_2 - K_{21} K_1^{-1} K_{12}|. \quad (55)$$

На основании (51) с учетом (53) будем иметь

$$I(\alpha, \beta) = \ln \sqrt{\frac{D_2}{|K_2 - K_{21} K_1^{-1} K_{12}|}}. \quad (54)$$

Некоторое преимущество формулы (54) заключается в том, что в ней вычисляется определитель матрицы меньшего размера. Кроме того, на ее основе можно осуществить качественный анализ взаимной информации и коррелированности признаков.

Пусть признаки образа  $\alpha$  характеризуются следующей ковариационной матрицей

$$K_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

где  $\alpha_{ij}$  – ковариационные моменты признаков  $i, j$  образа  $\alpha$ .

Такие же (или иные) признаки образа  $\beta$  характеризуются ковариационной матрицей

$$K_2 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

где  $\beta_{ij}$  – ковариационные моменты признаков  $i, j$  образа  $\beta$ .

Совместная ковариационная матрица признаков образов  $\alpha$  и  $\beta$  имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{12} & \cdots & \alpha\beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \alpha\beta_{21} & \alpha\beta_{22} & \cdots & \alpha\beta_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \alpha\beta_{n1} & \alpha\beta_{n2} & \cdots & \alpha\beta_{nn} \\ \beta\alpha_{11} & \beta\alpha_{12} & \cdots & \beta\alpha_{1n} & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta\alpha_{21} & \beta\alpha_{22} & \cdots & \beta\alpha_{2n} & \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \beta\alpha_{n1} & \beta\alpha_{n2} & \cdots & \beta\alpha_{nn} & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Здесь  $\alpha\beta_{ij}$  – ковариационный момент признака  $i$  образа  $\alpha$  и признака  $j$  образа  $\alpha\beta$ .

Очевидно, что

$$\alpha\beta_{ij} = \beta\alpha_{ij}. \quad (58)$$

Здесь

$$K_{12} = \begin{pmatrix} \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{12} & \cdots & \alpha\beta_{1n} \\ \alpha\beta_{21} & \alpha\beta_{22} & \cdots & \alpha\beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha\beta_{n1} & \alpha\beta_{n2} & \cdots & \alpha\beta_{nn} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$K_{21} = K_{12}^T. \quad (60)$$

Возможен частный случай матрицы (59), когда

$$K_1 = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{nn}); \quad (61)$$

$$K_2 = \text{diag}(\beta_{11}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{nn}); \quad (62)$$

$$K_{12} = \text{diag}(\alpha\beta_{11}, \alpha\beta_{22}, \cdots, \alpha\beta_{nn}). \quad (63)$$

С учетом (61)–(63) перепишем количество взаимной информации в следующем виде

$$I(\alpha, \beta) = \ln \sqrt{\frac{D_2}{|K_2(E - K_2^{-1}K_{21}K_1^{-1}K_{12})|}}. \quad (64)$$

Полагая диагональность матриц  $K_1, K_2, K_{12}$ , найдем

$$K_2^{-1}K_{21} = \text{diag}\left(\frac{\beta\alpha_{11}}{\beta_{11}}, \frac{\beta\alpha_{22}}{\beta_{22}}, \cdots, \frac{\beta\alpha_{nn}}{\beta_{nn}}\right); \quad (65)$$

$$K_1^{-1}K_{12} = \text{diag}\left(\frac{\alpha\beta_{11}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha\beta_{22}}{\alpha_{22}}, \cdots, \frac{\alpha\beta_{nn}}{\alpha_{nn}}\right). \quad (66)$$

Произведение матриц (65)–(66) будет следующим:

$$\text{diag}\left(\frac{\beta\alpha_{11}\alpha\beta_{11}}{\beta_{11}\alpha_{11}}, \frac{\beta\alpha_{22}\alpha\beta_{22}}{\beta_{22}\alpha_{22}}, \cdots, \frac{\beta\alpha_{nn}\alpha\beta_{nn}}{\beta_{nn}\alpha_{nn}}\right). \quad (67)$$

Очевидно, что в (67)

$$\beta\alpha_{ii} = \alpha\beta_{ii}, \quad (68)$$

и каждый элемент можно представить как

$$r_i^2 = \left(\frac{\alpha\beta_{ii}}{\sqrt{\beta_{ii}}\sqrt{\alpha_{ii}}}\right)^2. \quad (69)$$

Тогда (67) можно переписать так

$$K_2^{-1}K_{21}K_1^{-1}K_{12} = \text{diag}(r_1^2, r_2^2, \cdots, r_n^2). \quad (70)$$

Поскольку

$$|K_2| = D_2, \quad (71)$$

то (64) можно переписать в следующем виде:

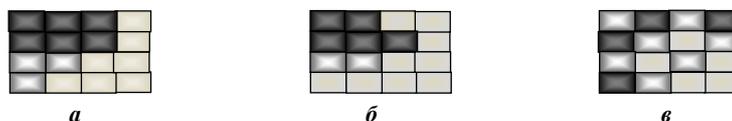
$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln \left| \left( E - \text{diag}(r_1^2, r_2^2, \cdots, r_n^2) \right) \right|; \quad (72)$$

$$I(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln \left( (1-r_1^2), (1-r_2^2), \cdots, (1-r_n^2) \right). \quad (73)$$

Частным случаем (73) является формула (22) двумерного случая.

В программе ENVI распознавание осуществляется при помощи инструмента ROI (Region of Interest). Суть инструмента заключается в наложении на распознаваемый объект правильной площадной фигуры. Это может быть квадрат, треугольник, эллипс, круг и др. Этому распознаваемому объекту вменяется опреде-

ленный цвет при распознавании. Пусть в границах этой области (ROI) определяется цвет пикселя (канал) и его яркость (рисунок). Это разные величины, но взаимосвязанные. В таблице 1 приведены значения цветов пикселей двух ROI соответствующих объектов. В таблице 2 – значения яркостей соответствующих пикселей.



Объект, который подлежит распознаванию (а); эталон 1 (б); эталон 2 (в)

Таблица 1 – Значения цветов пикселей ROI двух эталонных объектов

Объекты	Значения цветов пикселей															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	250	250	100	100	250	250	250	100	180	180	100	100	100	100	100	100
2	180	250	180	250	250	180	100	180	180	100	180	200	250	180	100	100

Таблица 2 – Значения яркостей пикселей ROI двух эталонных объектов

Объекты	Значения яркостей пикселей															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100	100	200	200	200	200	200	200	100	100	150	150	200	200	100	100
2	200	100	200	100	100	200	200	100	100	200	100	200	200	200	100	100

Данные таблиц 1 и 2 являются обучающими для распознавания третьего объекта. Цвет пикселей и значения яркостей приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения цвета и яркости пикселей ROI распознаваемого объекта

Признаки	Значения цветов и яркостей пикселя															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Цвет	250	250	200	100	250	250	250	100	150	150	100	100	150	100	100	100
Яркость	100	100	100	200	100	100	120	200	150	160	110	120	160	110	110	100

Для решения задачи по взаимной информации необходимо определить ковариационные матрицы признаков  $K_1$ ,  $K_2$  по формулам (55), (56) сравниваемого и обучающего образов. Эти матрицы будут отнесены соответственно к распознаваемому образу и образу 1 ( $K_1$ ,  $K'_2$ ), к распознаваемому образу и образу 2 ( $K_1$ ,  $K''_2$ ).

Совместная ковариационная матрица образов  $\alpha$  и  $\beta$  (57) здесь будет строиться для распознаваемого образа и образа 1 ( $K'$ ) и для распознаваемого образа и образа 2 ( $K''$ ).

По формуле (64) будет определено два значения взаимной информации. Большее из них укажет на распознавание образа.

Согласно данным таблицы 1 ковариационная матрица  $K_1$  цвета и яркости (далее – признаков) распознаваемого образа равна

$$K_1 = \begin{pmatrix} 4610,06 & -1125,21 \\ -1125,21 & 1216,25 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Ковариационная матрица признаков  $K_2$  обучающего образа 1, вычисленного по данным таблиц 1 и 2, равна

$$K'_2 = \begin{pmatrix} 4902,92 & 628,33 \\ 628,33 & 3380,00 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Общая ковариационная матрица  $K'$  признаков образа распознаваемого и обучающего объекта 1

$$K' = \begin{pmatrix} 4610,06 & -1125,21 & 4297,54 & 1071,17 \\ -1125,21 & 1216,25 & -919,58 & 331,67 \\ 4297,54 & -919,58 & 4902,92 & 628,33 \\ 1071,17 & 331,67 & 628,33 & 3380,00 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Ей соответствующая корреляционная матрица

$$K_{1об} = \begin{pmatrix} 1 & -0,47519 & 0,90394 & 0,27136 \\ -0,47519 & 1 & -0,37658 & 0,16358 \\ 0,90393 & -0,37658 & 1 & 0,15435 \\ 0,27136 & 0,16358 & 0,15435 & 1 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Определители соответственно равны:

$$D_1 = 4340894,7; D_2 = 16177055,6; D = 9,6353E + 12. \quad (78)$$

Взаимная информация

$$I(\beta, \alpha) = 0,9993118. \quad (79)$$

Распознаваемый образ сравнивался с другим обучающим объектом.

Здесь

$$K_2'' = \begin{pmatrix} 2291,67 & 666,67 \\ 666,67 & 2666,67 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Общая ковариационная матрица признаков этих двух образов равна

$$K'' = \begin{pmatrix} 4610,06 & -1125,21 & 276,25 & 1030,00 \\ -1125,21 & 1216,25 & 345,83 & -366,67 \\ 276,25 & 345,83 & 2291,67 & 666,67 \\ 1030,00 & -366,67 & 666,67 & 2666,67 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Ей соответствующая корреляционная

$$K_{2об} = \begin{pmatrix} 1 & -0,47519 & 0,08499 & 0,29377 \\ -0,47519 & 1 & 0,20715 & 0,20360 \\ 0,08499 & 0,20715 & 1 & 0,26968 \\ 0,29377 & 0,20360 & 0,26968 & 1 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

И определители:

$$D_1 = 4340894,7; D_2 = 5666666,7; D = 2,015E + 13. \quad (83)$$

Взаимная информация, вычисленная по (64)

$$I(\beta, \alpha) = 0,099705. \quad (84)$$

Поскольку взаимная информация (79) больше, то распознаваемый образ следует отнести к классу образа 1.

Вычисление взаимной информации по упрощенной формуле (73) приводит к результатам:

- из сравнения с образом 1

$$I(\beta, \alpha) = -\frac{1}{2} \ln((1-0,903^2)(1-0,163^2)) = 0,863; \quad (85)$$

- из сравнения с образом 2

$$I(\beta, \alpha) = -\frac{1}{2} \ln((1-0,085^2)(1-(-0,204^2))) = 0,025. \quad (86)$$

Из сравнения (85) и (86) подтверждается отнесение распознаваемого образа к образу 1. Отметим, что значения, полученные по упрощенным формулам, значительно отличаются от строгих значений, поэтому применять упрощенные формулы на практике не рекомендуется.

В соответствии с разработанным алгоритмом авторами составлена программа [17] на алгоритмическом объектно-ориентированном языке IDL системы распознавания (дешифрирования) многоканальных изображений. Название программы OROI\_DATA\_CORR24BITINFO.

Программа тестирована на обновлении ЗИС одного из хозяйств Беларуси площадью 6361,67 га. Выборка состояла из 12 видов (кодов) земель сельскохозяйственного назначения. Площади участков варьировали от 4 до 100 га. Всего исследовано 48 земельных участков. Изменения контуров за 16 лет составляли по модулю от 0,12 до 23,89 га. Средняя квадратическая ошибка определения точек измененных границ по 28 контрольным натурным геодезическим определениям составила 2,6 м. Наибольшие ошибки контура в двух точках по модулю составили соответственно 10,4 и 11,8 м. Поскольку настоящая величина

средней квадратической ошибки согласно «ТКП 010-2005 ЗИС РБ. Основные положения (пункт 5)» соответствует точности ЗИС Республики Беларусь, то выполненная работа была принята для ее обновления.

**Заключение.** Настоящий алгоритм и созданная на алгоритмическом языке IDL в системе ENVI программа обладает следующей новизной по отношению к существующим алгоритмам:

- распознавание площадных объектов теперь возможно на количестве взаимной информации, учитывающей множество корреляционных зависимостей между составляющими вектора признаков эталонного и распознаваемого объектов, что актуально при распознавании многоканальных изображений; по максимуму количества взаимной информации унифицируется процесс отнесения объекта к определенному классу;
- программирование алгоритма может быть реализовано на любом алгоритмическом объектно-ориентированном языке по аналогии с его авторской реализацией на IDL в системе ENVI;
- программированием обеспечивается гибкость, оперативность решения специальных задач дешифрирования, а также возможностью изменения параметров для удобства решения конкретной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин, С. Нейронные сети : полный курс / С. Хайкин. – 2-е изд. испр. ; пер. с англ. – М. : И.Д. Вильямс, 2006. – 1104 с.
2. Яглом, А.М. Вероятность и информация / А.М. Яглом, И.М. Яглом. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 512 с.
3. Журкин, И.Г. Автоматизированная обработка данных дистанционного зондирования: учеб. для вузов / И.Г. Журкин, Н.К. Шавенько ; под общ. ред. И.Г. Журкина. – М. : ООО «Диона», 2013. – 456 с.
4. Ярмоленко, А.С. Технология, точность и экономическая эффективность автоматизированного дешифрирования сельскохозяйственных земель / А.С. Ярмоленко, О.А. Куцаева // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 3. – С. 64–71.
5. Закс, Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – М. : Мир, 1975. – 776 с.
6. Хьюбер, П.Дж. Робастность в статистике / П.Дж Хьюбер. – М. : Мир, 1984. – 304 с.
7. Кульбак, С. Теория информации и статистика / С. Кульбак ; пер. с англ. – М. : Наука, 1967. – 408 с.
8. Ярмоленко, А.С. Определение функции плотности распределения ошибок измерений с применением вариационного исчисления / А.С. Ярмоленко // Геодезия и картография. – 1992. – № 8. – С. 7–10.
9. Ярмоленко, А.С. Минимаксное оценивание параметра положения в одномерном случае / А.С. Ярмоленко // Геодезия и картография. – 1993. – № 6. – С. 5–9.
10. Ярмоленко, А.С. О формальном применении теории энтропии для сравнения точности геодезических приборов / А.С. Ярмоленко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1993. – № 4. – С. 88–94.
11. Шавенько, Н.К. Алгоритмы обработки изображений / Н.К. Шавенько. – М. : МИИГАиК, 2002. – 62 с.
12. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
13. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 496 с.
14. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 544 с.
15. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
16. Гантмахер, Ф.А. Теория матрицы / Ф.А. Гантмахер. – М. : Наука, 1968. – 576 с.
17. Расчет взаимной информации между объектами для дешифрирования многоканальных изображений по её максимуму : свидетельство № 2015613067 РФ / А.С. Ярмоленко, О.А. Куцаева ; дата публ. 03.03.2015.

Поступила 22.04.2016

#### THE CALCULATION OF MUTUAL INFORMATION BETWEEN OBJECTS FOR THE INTERPRETATION OF MULTIBAND IMAGES IN ITS MAXIMUM

A. YARMOLENKO, O. KUTSAEVA

*Given the derivation of the formula based mutual information of determinants of covariance matrices of the estimated and reference objects. On its basis are special cases of correlation that show the influence of correlation coefficients on the value of mutual information. According to the results of theoretical researches of the developed recognition algorithm based on the calculation of mutual information between objects for decryption multi-channel images in its maximum algorithmic object-oriented language IDL. An example of testing the developed algorithm. The research results show the viability of the developed algorithm. The novelty of this algorithm is the possibility of recognition of objects by the number of mutual information that takes into account the multiple correlations between the components of the feature vector and reference recognized objects, which is very important for recognition of multi-channel images.*

**Key words:** pattern recognition, mutual information, decryption of images.