

УДК 528.63

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ ТОЧЕК НА РЕЗУЛЬТАТЫ ТРАНСФОРМАЦИИ

А.С. ИВАШНЁВА

(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрена двумерная трансформация – преобразование из одной прямоугольной координатной системы в другую. Данные линейные преобразования на плоскости наиболее простые как по форме, так и по содержанию, часто являются достаточными для решения подавляющего числа задач на трансформацию, возникающих в геодезии. Вместе с тем, несмотря на широту использования и кажущуюся понятность процесса двумерной трансформации, есть ряд важных вопросов, которые на сегодняшний день требуют дополнительного исследования. Один из них – влияние геометрии расположения общих точек на результаты трансформации. Представлены результаты вычислительного эксперимента, в ходе которого были получены элементы трансформации для нескольких вариантов расположения общих точек. По полученным результатам проанализировано поведение деформационных элементов двумерной трансформации по мере приближения к наилучшей геометрии.

**Ключевые слова:** двумерная трансформация, геометрия расположения общих точек, линейные преобразования, деформационные элементы.

В трансформации координатных систем при двумерном преобразовании могут участвовать всего шесть элементов:  $t_x$  – сдвиг по оси  $X$ ;  $t_y$  – сдвиг по оси  $Y$ ;  $\varphi$  – угол поворота осей одной координатной системы относительно другой;  $m_x$  – величина изменения масштаба по оси  $X$ ;  $m_y$  – величина изменения масштаба по оси  $Y$ ;  $\varepsilon$  – угол неортогональности между осями двух координатных систем.

В зависимости от того, какими элементами преобразования представлена трансформация, выделяют следующие традиционные модели планового преобразования координат [1]:

- 1) твердотельные, при которых происходит равномерный разворот всех точек на угол  $\varphi$  и сдвиг по осям на величины  $t_x$  и  $t_y$  соответственно (преобразование квадрата в квадрат);
- 2) конформные, когда выполнен равномерный разворот всех точек на угол  $\varphi$ , сдвиг по осям на величины  $t_x$  и  $t_y$  и равномерно изменен масштаб на величину  $m$  (преобразование квадрата в подобный квадрат);
- 3) ортогональные, где выполнен равномерный разворот всех точек на угол  $\varphi$ , сдвиг по осям на величины  $t_x$  и  $t_y$  и масштаб изменен на величины  $m_x$  и  $m_y$  соответственно (преобразование квадрата в прямоугольник);
- 4) аффинные, у которых произведен сдвиг по осям на величины  $t_x$  и  $t_y$  и масштаб изменен на величины  $m_x$  и  $m_y$ , а поворот для точек выполнен относительно одной оси на угол  $\varphi_1$ , другой – на угол  $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon$ , т.е. с нарушением ортогональности исходной системы координат (преобразование квадрата в параллелограмм).

Аффинная модель включает в себя все шесть элементов преобразования и является наиболее общей моделью трансформации. Очевидно, что алгоритм аффинных преобразований дает идентичные результаты для любых других видов преобразований, если в них отсутствуют не свойственные им параметры и погрешности координат. Именно поэтому в ходе вычислительного эксперимента для получения элементов деформации были выбраны аффинные преобразования.

Аффинные преобразования в матричном виде могут быть представлены следующим образом [2]:

$$\begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\varepsilon) \\ 0 & \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = R \cdot M \cdot C \cdot K_c + s, \quad (1)$$

или

$$\begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \cdot \cos(\varphi) & -m_y \cdot \sin(\varphi + \varepsilon) \\ m_x \cdot \sin(\varphi) & m_y \cdot \cos(\varphi + \varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = T \cdot K_c + s, \quad (2)$$

где  $X_C, Y_C$  – координаты в старой системе координат;  $X_H, Y_H$  – координаты в новой системе координат;  $R$  – матрица вращения;  $M$  – диагональная матрица изменения масштабов по осям;  $C$  – матрица нарушения ортогональности;  $s$  – вектор сдвига по осям;  $T$  – матрица трансформации;  $a, b, d, e, c, f$  – коэффициенты линейного преобразования на плоскости.

В алгебраической форме аффинную модель преобразования можно представить как [2]:

$$\begin{aligned} X_H &= t_x + m_x \cdot X_C \cdot \cos\varphi - m_y \cdot Y_C \cdot (\sin\varphi + \sin\varepsilon \cdot \cos\varphi), \\ Y_H &= t_y + m_x \cdot X_C \cdot \sin\varphi - m_y \cdot Y_C \cdot (\cos\varphi - \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} X_n &= aX_c + bY_c + c \\ Y_n &= dX_c + eY_c + f, \end{aligned} \quad (4)$$

что является обычным представлением плоского аффинного преобразования.

Решая систему (4) любым известным способом на основе метода наименьших квадратов (например, методом растягивания) по алгоритму регрессии с двумерным откликом или используя теоремы о характеристиках многомерного условного закона распределения [1; 3–5] (в нашем случае использовался алгоритм регрессии с двухмерным откликом), можно получить неизвестные коэффициенты преобразования, по которым, в свою очередь, можно рассчитать элементы преобразования по следующим формулам [2]:

$$\begin{cases} m_x = \sqrt{a^2 + d^2}, \\ m_y = \sqrt{b^2 + e^2}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{d}{a}\right), \\ (\varphi + \varepsilon) = \arctg\left(\frac{-b}{e}\right). \end{cases} \quad (5)$$

Следует отметить, что сдвиги по осям  $t_x$  и  $t_y$  в ходе решения системы (2) получаются в чистом виде.

Исходя из предположения, что геометрия расположения общих точек при решении задачи трансформации с их избыточным числом в какой-то мере должна значимо влиять на результаты трансформации, было исследовано влияние геометрии по предварительно полученным элементам преобразования.

В ходе вычислительного эксперимента координаты пяти точек преобразовывались в другую систему по известным (заранее заданным) элементам аффинной модели трансформации. Полученные таким образом две системы координат искажались случайными ошибками с известными характеристиками. Затем по двум испорченным системам координат вычислялись элементы аффинного преобразования и проводилось их сравнение с изначально заложенными элементами трансформации. При этом данный алгоритм вычислений повторялся при различных вариантах расположения пяти точек. Изначально общие точки располагались максимально хаотично, а именно: четыре по углам и одна – посередине. По ходу вычислений угловые точки постепенно приближались к линии, проходящей через центральную точку. Варианты расположения общих точек, по которым проводились расчеты, представлены на рисунке 1.

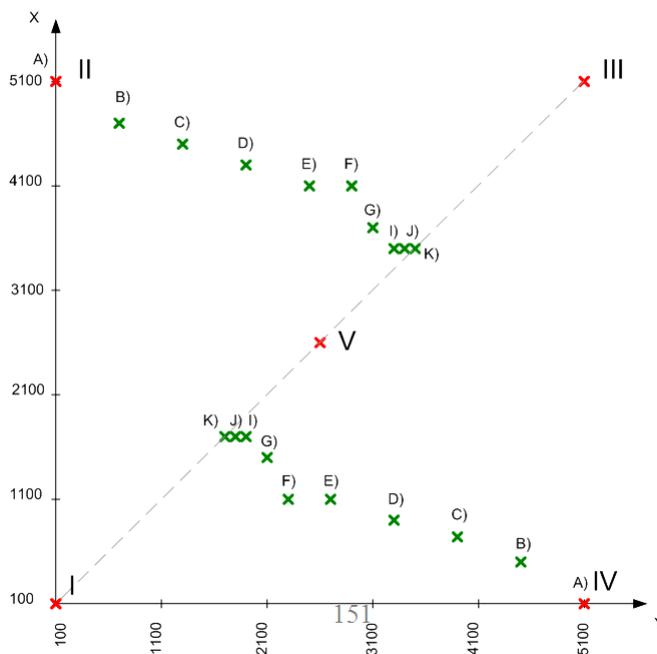


Рисунок 1. – Схематическое расположение общих точек

Для преобразования координат пяти точек в другую систему координат были заложены следующие элементы трансформации:

- угол вращения, равный  $30^\circ$ ;
- угол нарушения ортогональности –  $3^\circ$ ;
- масштаб по оси  $X$  – 1,2;
- масштаб по оси  $Y$  – 1,5;
- сдвиг по оси  $X$  – 100 м;
- сдвиг по оси  $Y$  – 200 м.

Системы координат были испорчены ошибками, составляющими 0,05 м.

Полученные по двум системам координат элементы аффинного преобразования для предложенных вариантов геометрии расположения общих точек представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Вычисленные элементы трансформации

Геометрия общих точек	Угол вращения	Угол нарушения ортогональности	Масштаб по оси $X$	Масштаб по оси $Y$	Сдвиг по оси $X$ , м	Сдвиг по оси $Y$ , м
A)	29°59'59"	3°00'01"	1,2000	1,5000	99,994	200,006
B)	29°59'59"	3°00'00"	1,2000	1,5000	100,025	200,109
C)	29°59'56"	3°00'02"	1,2000	1,5000	99,926	200,067
D)	29°59'59"	2°59'53"	1,2000	1,5000	99,920	199,993
E)	29°59'45"	3°00'08"	1,2000	1,5000	99,865	200,070
F)	29°59'53"	3°00'11"	1,2000	1,5000	99,936	200,021
G)	29°59'35"	3°00'27"	1,2000	1,5002	99,966	199,856
I)	30°00'57"	2°58'40"	1,1998	1,4997	99,869	199,992
J)	29°58'09"	3°01'25"	1,1998	1,5006	100,073	200,027
K)	57°16'40"	-51°38'02"	0,6507	1,3169	100,036	200,102

Используя вычисленные элементы трансформации (см. табл. 1) произведен расчет отклонений данных элементов от заложенных элементов трансформации. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Отклонения вычисленных элементов трансформации от заложенных элементов трансформации

Геометрия точек	Угол вращения, "	Угол нарушения ортогональности, "	Масштаб по оси $X$	Масштаб по оси $Y$	Сдвиг по оси $X$ , м	Сдвиг по оси $Y$ , м
A)	-1	1	0	0	-0,006	0,006
B)	-1	0	0	0	0,025	0,109
C)	-4	2	0	0	-0,074	0,067
D)	-1	-7	0	0	-0,080	-0,007
E)	-15	8	0	0	-0,135	0,070
F)	-7	11	0	0	-0,064	0,021
G)	-25	27	0	0,002	-0,034	-0,144
I)	57	-80	-0,0002	-0,003	-0,131	-0,008
J)	-111	85	-0,0002	0,006	0,073	0,027
K)	27°16'40"	-48°38'02"	-0,5493	-0,1831	0,036	0,102

По абсолютным величинам полученных отклонений построены графики влияния геометрии расположения общих точек на элементы трансформации (рис. 2–4). В построении графиков не участвовали некорректные результаты расчета для геометрии расположения общих точек  $K$ ), так как в этом случае точки выстроены в одну линию, что приводит к математически вырожденной системе уравнений.

На основе полученных результатов отклонений вычисленных элементов трансформации от заложенных элементов трансформации можно проанализировать изменения деформационных элементов по мере приближения к наихудшей геометрии расположения общих точек.

Полученные результаты показали:

- геометрия расположения общих точек сильно влияет на угловые деформационные элементы (угол вращения, угол нарушения ортогональности);

- отклонения величин изменения масштабов по оси  $X$  и по оси  $Y$  незначительно возрастают по мере приближения к наихудшему варианту расположения точек, в свою очередь, зависимости искажений таких элементов, как сдвиги по  $X$  и по  $Y$ , от геометрии расположения общих точек не наблюдается.

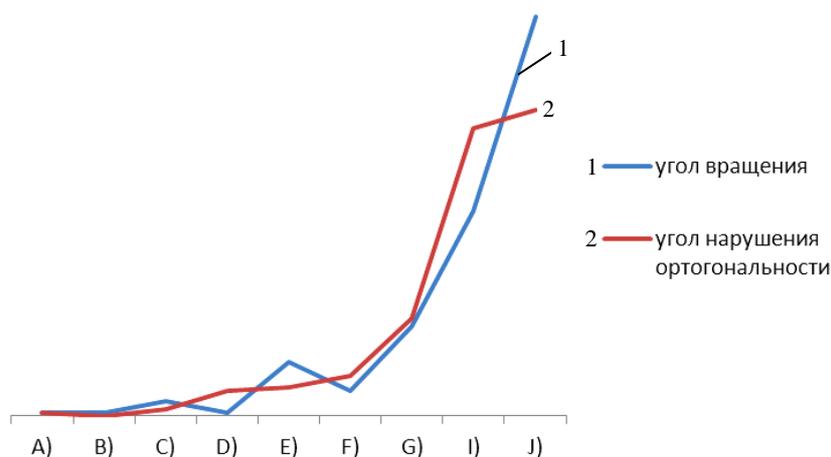


Рисунок 2. – Влияние геометрии расположения общих точек на элементы трансформации: угол вращения ( $\varphi$ ); угол нарушения ортогональности ( $\epsilon$ )

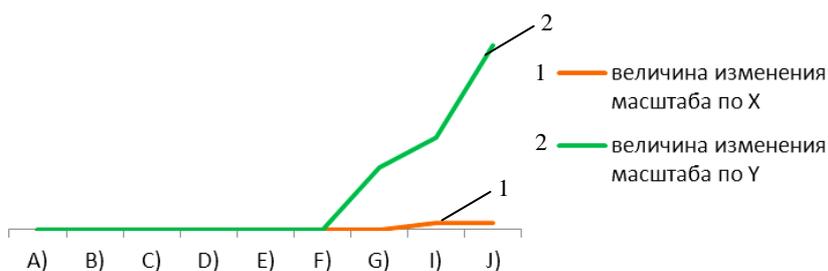


Рисунок 3. – Влияние геометрии расположения общих точек на элементы трансформации: величину изменения масштаба по оси  $X$  ( $m_x$ ); величину изменение масштаба по оси  $Y$  ( $m_y$ )

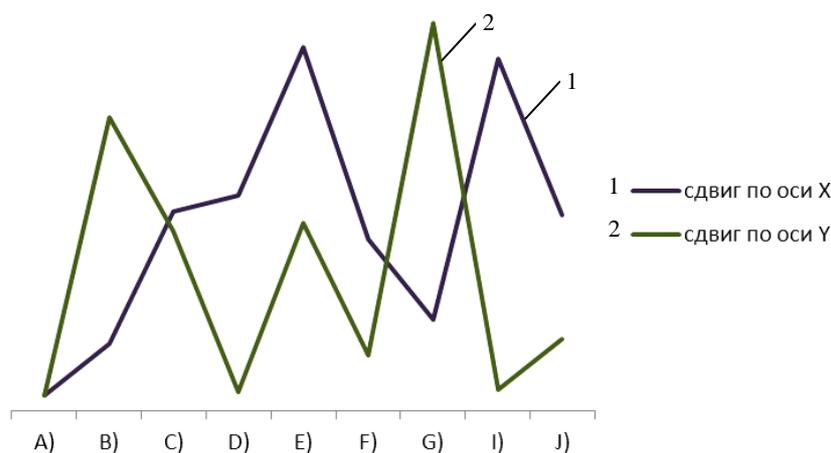


Рисунок 4. – Влияние геометрии расположения общих точек на элементы трансформации: сдвиг по оси  $X$  ( $t_x$ ); сдвиг по оси  $Y$  ( $t_y$ )

Очевидно, что самая плохая геометрия опорных точек для трансформации при расположении их в одну линию (или когда они почти на одной линии), так как тогда мы имеем обычную линейную зависи-

мость и получаем математически вырожденную (или очень плохо-обусловленную) систему уравнений для нахождения коэффициентов преобразования. Данный вопрос требует дальнейших исследований, так как существуют ситуации, когда необходимо трансформировать координаты линейных объектов (мосты, дороги и т.д.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярев, А.М. Идентификация модели трансформации в геодезии на основе аффинного преобразования / А.М. Дегтярев, В.В. Ялтыхов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2013. – № 2 (49). – С. 71–74.
2. Deakin, R.E. Coordinate transformation in surveying and mapping / R.E. Deakin // Geospatial science [Electronic resource]. – Mode of access: [http://www.mygeodesy.id.au/documents/COTRAN\\_1](http://www.mygeodesy.id.au/documents/COTRAN_1). – Date of access: 20.02.2016.
3. Ghilani, Charles D. Adjustment computations: spatial data analysis / Charles D. Ghilani, Paul R. Wolf. – Hoboken: JOHN WILEY & SONS, INC., 2006. – 632 с.
4. Zellner, A. An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias / A. Zellner // Journal of the American Statistical Association. – 1962. – Vol. 57, No. 298. – Jun. – С. 348–368.
5. Себер, Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер, В.П. Носко ; под ред. М.Б. Малютова. – М. : Мир, 1980. – 456 с.

Поступила 04.04.2016

#### INFLUENCE OF THE GEOMETRY LOCATION OF THE COMMON POINTS ON THE RESULTS OF TRANSFORMATION

A. IVASHNIOVA

*Two-dimensional transformation is a transformation of a rectangular coordinate system to another. These linear transformations in the plane are the simplest in form and content, however, often are sufficient for solution of the overwhelming number of tasks on the transformation occurring in geodesy. However, despite the breadth of use and apparent clarity of the process of two-dimensional transformation, there are a number of important questions which require further research today. One of such question is the influence of geometry of the common points on the results of the transformation. The article presents the results of numerical experiments, in which the elements of the transformation were obtained for several variants of location of common points. By the received results has been analyzed the behavior of deformation elements of two-dimensional transformation in process of approach to worst geometry.*

**Keywords:** *two-dimensional transformation geometry at common points, linear transformations, deformation elements.*