

## ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОЭКОЛОГИЯ

УДК 528.854

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ В ФИЛЬТРАЦИИ И СЖАТИИ ГЕОИНФОРМАЦИИ

*д-р техн. наук, проф. А.С. ЯРМОЛЕНКО; О.В. СКОБЕНКО*  
(Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки)

*Представлены построенные авторами ортонормированные базисы вейвлет-преобразований и фильтрации информации. Рассмотрен порядок создания вейвлет-фильтров последовательностью сверток, применением кратномасштабного анализа для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. Разработана методика определения значения фильтра в зависимости от точности исходной геоинформации. Реализована практическая возможность вейвлет-фильтрации на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геоинформации и изображений, сжатия данных и их фильтрации.*

**Ключевые слова:** базис вейвлет-преобразования, свертка, кратномасштабный анализ, фильтрация, сжатие, точность, программа, изображение, поле данных.

**Введение.** Сжатие геоинформации и ее фильтрация являются актуальной проблемой теории математической обработки как геодезической информации (измерений), так и изображений. При этом необходимо максимально использовать полученную информацию и получать конечные результаты с достаточной точностью и минимальными затратами при ее хранении, что связано со сжатием информации. Это важно при работе с геоинформацией в геодезии, землеустройстве, природообустройстве, мониторинге земель, при ведении точного сельского хозяйства [1, с. 200]. При этом алгоритмы должны обладать простотой и точностью вычислений. К настоящему времени для моделирования объектов, сжатия и фильтрации информации широко применяются преобразования Фурье [2–7]. Однако даже в своем быстром варианте (быстрое преобразование Фурье – БПФ) оно сопряжено с большим количеством вычислений. В свою очередь, в работах [2; 6] отмечается, что, в отличие от преобразований Фурье, возможны преобразования с другими базисами, восстанавливающие дискретные и непрерывные функции, но значительно сокращающие вычисления. Одним из таких базисов является вейвлетный, и в настоящее время он постепенно находит практическое применение [8–16]. Следует при этом отметить, что работы [8; 10; 11; 15; 16] носят лишь ознакомительный характер, в основательной работе [9] речь о применении вейвлетов не ведется, но детально описывается большинство фильтров подавления шумов, которые могут применяться при моделировании процессов на основе вейвлетного базиса. В трудах [12–14] приводятся основные теоретические положения по теории вейвлетов, базирующиеся на основе зарубежных исследований. И для создания технологий обработки геоинформации на основе этих работ необходимы дополнительные исследования. В вейвлет-преобразованиях [17] используются зарубежные пакеты при неизвестном алгоритме.

Перечисленные труды имеют практическое и теоретическое значение при обработке геоинформации, но в них теория вейвлетов не доведена до инженерного уровня их применения.

На основе отмеченного в представляемой нами работе с целью разработки детальной и доступной технологии применения вейвлетов в обработке геоинформации ставятся следующие задачи; 1) построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация; 2) порядок создания вейвлет-фильтров; 3) построение фильтров последовательностью сверток; 4) применение КМА-анализа (кратномасштабного анализа) для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования; 5) показать практическую возможность вейвлет-фильтрации на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геоинформации, сжатия данных и их фильтрации.

**Базовые положения.** В соответствии с [2] дадим следующие определения.

Оператором циклического сдвига последовательности  $Z$  [2, с. 125] на  $k$  позиций вправо является оператор  $R_k$ , осуществляющий создание новой последовательности  $R_k Z$  по формуле

$$(R_k Z) \cdot (n) = Z(n - k), \quad (1)$$

где  $n$  – номер элемента в создаваемой последовательности.

Пусть имеется ряд (вектор значений)

$$Z = (1, 0, 0, 1)^T \quad (2)$$

при  $N = 4$ .

Тогда

$$(R_1 Z)(0) = Z(0-1) = Z(-1) = Z(N-1) = Z(4-1) = Z(3) = 1;$$

$$(R_1 Z)(1) = Z(1-1) = Z(0) = 1;$$

$$(R_1 Z)(2) = Z(2-1) = Z(1) = 0;$$

$$(R_1 Z)(3) = Z(3-1) = Z(2) = 0.$$

Таким образом, получим новую последовательность – вектор

$$R_1 Z = (1, 1, 0, 0)^T. \quad (3)$$

При  $k = 4$  получаем исходный вектор

$$R_4 Z = (1, 0, 0, 1)^T. \quad (4)$$

Согласно определению 3.7 и теореме 3.8 [2, с. 176] при некоторых заданных векторах  $U$  и  $V$ , принадлежащих тому же пространству элементов, что и вектор  $Z$ , например (2), возможно построение ортонормированного базиса следующего вида:

$$B = \{R_{2k} V\}_{k=0}^{M-1} U \{R_{2k} U\}_{k=0}^{M-1} = \{V, R_2 V, R_4 V, \dots, R_{N-2} V, U, R_2 U, R_4 U, \dots, R_{N-2} U\}, \quad (5)$$

где  $U$ , согласно [2], можно назвать *отцовским* вейвлетом, а  $V$  – *материнским*.

В данном исследовании составляющие базиса, построенные по вектору  $U$ , будем называть *отцовскими*, а по вектору  $V$  – *материнскими*.

Ортонормированность (5) возможна лишь тогда [2, теорема 3.8; 6, с. 250–258, лемма 7.1], когда система

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{U}(n) & \hat{V}(n) \\ \hat{U}(n+M) & \hat{V}(n+M) \end{pmatrix} \quad (6)$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$  унитарна.

Под унитарной понимается такая матрица [2, с. 100], для которой

$$A^{-1} = A^*, \quad (7)$$

где  $A^{-1}$  обратная к  $A$  матрица;  $A^*$  – сопряженная к  $A$  матрица, получаемая взятием комплексно-сопряженных значений от всех элементов матрицы  $A^T$ , транспонированной к  $A$ .

**Построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация.** В качестве примера построения ортонормированного базиса примем векторы Хаара [2, с. 190; 6, с. 270]:

$$U = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right)^T; \quad (8)$$

$$V = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right)^T. \quad (9)$$

Поскольку в [2] установлено, что матрицы  $A(n)$  (6) для векторов  $U$  и  $V$  унитарны, пользуясь правилом (5), построим ортонормированный базис для вейвлет-преобразования вектора  $Z$ , например (2). Здесь  $N = 4$  и  $M = N/2 = 2$ . Тогда в соответствии с (5), (1) на основании (8), (9) можно составить ортонормированный вейвлет-базис

$$B = (V, R_2 V, U, R_2 U) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда вейвлет-преобразование на данном этапе будет

$$\hat{Z} = B \cdot Z. \quad (11)$$

В нашем примере

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а обратное преобразование, следуя (11), имеет вид

$$Z = B^{-1}\hat{Z} = B \cdot \hat{Z} = B^T \hat{Z}. \quad (13)$$

Теперь осуществим фильтрацию сигнала, то есть его разложение по отцовским и материнским составляющим вейвлет-базиса. Согласно [2, с. 99; 6, с. 26], в пространстве с комплексным скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и ортонормированным базисом  $R = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  для любого  $v$  этого пространства справедливо

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j. \quad (14)$$

Здесь  $v$  соответствует вектору данных  $Z$ , а базисные векторы  $u_j$  – всем столбцам матрицы (10). После подстановки их в (14) получим

$$Z = Q(Z) + P(Z), \quad (15)$$

где

$$Q(Z) = \frac{1}{2} \left( (1001) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1001) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P(Z) = \frac{1}{2} \left( (1001) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1001) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что  $Q(Z)$  – составляющая сигнала высоких частот, а  $P(Z)$  – составляющая низких частот. Следуя [2, с. 180], составляющую высоких частот сигнала представим в виде формулы

$$Q(Z) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \langle Z, R_{2^k} V \rangle R_{2^k} V = \left( \langle Z, R_0 V \rangle \right) R_0 V + \left( \langle Z, R_2 V \rangle \right) R_2 V + \dots + \left( \left\langle Z, R_{\frac{N}{2}-1} V \right\rangle \right) R_{\frac{N}{2}-1} V, \quad (16)$$

а составляющую низких частот в следующем виде:

$$P(Z) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \langle Z, R_{2^k} U \rangle R_{2^k} U = \left( \langle Z, R_0 U \rangle \right) R_0 U + \left( \langle Z, R_2 U \rangle \right) R_2 U + \dots + \left( \left\langle Z, R_{\frac{N}{2}-1} U \right\rangle \right) R_{\frac{N}{2}-1} U. \quad (17)$$

### Примеры фильтров на основе базисов Шеннона с вещественными и комплексными числами.

Если воспользоваться составляющими векторов  $\hat{U}$  и  $\hat{V}$  (преобразований Фурье) в [2, с. 179, 181], то при  $N = 4$  с использованием обратных преобразований Фурье можно по аналогии с (14)–(17) определить высоко- и низкочастотные составляющие для данных примеров и в этих базисах (таблица 1).

Из сравнения базисов, приведенных в таблице 1, а также базисов Мейера, Баттла – Лемарье, Добеши [6, с. 207] преимущество следует отдавать базису Хаара по следующим причинам:

- базис Хаара прост в вычислении;
- понятна на его основании и фильтрация сигнала; так, низкочастотная часть на первом этапе равна нулевому коэффициенту преобразования Фурье, высокочастотная соответствует отклонениям сигнала от его середины;

- в базисах, отличных от Хаара, задаются дополнительные требования к числу  $N$ . Например, в базисах Шеннона оно должно быть кратным 4, а в базисе Хаара достаточно лишь его четности; числом  $N$  определяется и вид базиса Добеши [2].

Таблица 1. – Разложение вектора  $Z$  по отцовскому и материнскому вейвлетам в различных базисах

Исходный вектор $Z$	Базисы		
	Хаара	Шеннона 1	Шеннона 2
$P(Z)$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$	1
$Q(Z)$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	0
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	0

**Построение фильтров последовательностью свертков.** В вейвлет-разложениях (16), (17) замечено, что коэффициенты при  $R_{2k}V$ ,  $R_{2k}U$  являются соответствующими скалярными произведениями, которые в виде свертков можно записать так [2; 6; 7]:

$$\langle Z, R_{2k}V \rangle = z \cdot \tilde{V}(2k); \quad \langle Z, R_{2k}U \rangle = z \cdot \tilde{U}(2k).$$

Настоящие выражения являются теоретической основой быстрого вейвлет-преобразования. Тогда фильтр на основе такой свертки строится следующим образом [2, с. 187; 6, с. 279]: 1) образуются векторы  $\tilde{U}, \tilde{V}$  (описаны в конце базовых положений); 2) осуществляются свертки  $Z \cdot \tilde{U}, Z \cdot \tilde{V}$ ; 3) вводится оператор децимации – удаления составляющих с нечетными номерами  $D(Z \cdot \tilde{U}), D(Z \cdot \tilde{V})$ ; 4) реализуется оператор разрезающей выборки – удваивания размера вектора вставкой нуля между двумя смежными значениями  $U(D(Z \cdot \tilde{U})), U(D(Z \cdot \tilde{V}))$ ; 5) осуществляется фильтрация – строится вектор низкочастотной составляющей в виде свертки  $P(Z) = U \cdot U(D(Z \cdot \tilde{U}))$  и высокочастотной  $Q(Z) = V \cdot U(D(Z \cdot \tilde{V}))$ ; 6) восстанавливается сигнал  $Z = P(Z) + Q(Z)$ .

На этом заканчивается первый этап разложения сигнала на высоко- и низкочастотные составляющие. Число всех этапов определяется по формуле  $p = \log_2 N$ .

Каждый последующий этап состоит из фазы анализа и фазы синтеза. В фазе анализа на этапе  $n$  осуществляется: 1) ввод вектора  $Z_{n-1}^T \cdot \tilde{U}_{n-1}$  и его децимация  $Z_n = D(Z_{n-1}^T \cdot \tilde{U}_{n-1})$ ; 2) ввод векторов  $U_n, V_n$  нормированного базиса размерности  $N_1 = N/2^{n-1}$ ; 3) осуществляются децимация и разреживание свертков  $Z_n^T \cdot \tilde{U}_n, Z_n^T \cdot \tilde{V}_n$ ,  $UDU_n = UD(Z_n^T \cdot \tilde{U}_n)$ ,  $UDV_n = UD(Z_n^T \cdot \tilde{V}_n)$ ; 4) вычисляются высоко- и низкочастотная составляющие вектора  $Z_n$ :  $Q(Z_n) = V_n \cdot U(D(Z_n \cdot \tilde{V}_n))$ ;  $P(Z_n) = U_n \cdot U(D(Z_n \cdot \tilde{U}_n))$ . В фазе синтеза осуществляется разреживание векторов  $Q(Z_n), P(Z_n)$ , при этом разреживание выполняется числом  $n-1$  раз до достижения размерности исходного сигнала  $U(Q(Z_n)), U(P(Z_n))$ ; операциями свертки получают высокочастотную и низкочастотную составляющие сигнала на этапе  $n$ :  $Q_n(Z) = U(Q(Z_n)) \cdot U_1$ ,  $P_n(Z) = U(P(Z_n)) \cdot U_1$ .

Окончательный результат анализа синтеза выражается формулой  $Z = P_1(Z) + \sum_{i=0}^{P-1} Q_{P-i}(Z)$ . Настоящий алгоритм реализован в специально составленной авторами программе **Sub Вейвлет Анализ Синтез ()**. Сигнал  $Z$  можно представить в виде разложения

$$Z = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \dots + c_{N-1} b_{N-1} \quad (18)$$

по базису  $B$  [2, с. 176, 185–186], который представляет собой совокупность ортонормированных базисов  $B = \{b_i\}_{i=0}^{N-1}$ . Очевидно, что в этом случае  $c_i = (Z b_i^T)$ .

Задача заключается в том, чтобы определить ортонормированные векторы в разложении (18). В теории вейвлетов [2, с. 209–225, определение 3.28] вместо (18) принимается следующая запись:

$$Z = \sum_{k=0}^{\binom{N/2^{P-1}}{}} c_{1,k} \Phi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{\binom{N/2^{P-1}}{}} c_{2,k} \Psi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{\binom{N/2^{P-1}-1}{}} c_{3,k} \Psi_{-p,k} + \dots + \sum_{k=0}^{\binom{N/2^{P(P-1)-1}}{}} c_{N/2,k} \Psi_{-p,k}. \quad (19)$$

Если принять что  $p = \log_2 N$ , то (19) переписывается в виде

$$Z = c_{1,0} \Phi_{-p,0} + c_{2,0} \Psi_{-p,0} + c_{2,0} \Psi_{-p,1} + \dots + c_{N/2,0} \Psi_{-1,0} + c_{N/2,1} \Psi_{-1,1} + \dots + c_{N/2,N/2-1} \Psi_{-1,N/2-1}. \quad (20)$$

Здесь все векторы базиса  $B$   $\Psi_{-j,k}$  записаны слева направо по степени детализации вектора  $Z$ .

В [2], наоборот, они записаны справа налево. Построение базисных векторов  $\Psi_{-j,k}$  осуществляется в следующем порядке [2, с. 225]: 1) применяется последовательность вейвлет-фильтров  $U_1, V_1; U_2, V_2; \dots U_p, V_p$ ; при этом  $U_l, V_l \in l^2(Z_{N/2})$ , например, исходя из (8), (9) при  $l = 2$  имеем  $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; 2) каждый из базисов  $\Psi_{-j,k}$  строится по формуле  $\Psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j$  [2, с. 225], где  $f_l = g_{l-1} U^{l-1}(V_l)$ , а  $g_l = g_{l-1} U^{l-1}(U_l)$  при начальных значениях, равных  $f_1 = V_1, g_1 = U_1$ .

В приведенных выражениях оператор  $U^{l-1}(\ )$  означает  $l-1$  – кратное разреживание вектора  $V_l$  или  $U_l$ . Элементы сверток  $f_l(n), g_l(n)$  для  $n = 0, 1, \dots, N-1$  вычисляются по формулам:

$$f_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} (g_{l-1}(m) U^{l-1}(V_l)(n-m)), \quad g_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} (g_{l-1}(m) U^{l-1}(U_l)(n-m)).$$

#### КМА-анализ для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования

В фундаментальных работах [2; 6; 7] вейвлет-разложение предполагает наличие масштабирующей и уточняющей функции. В [2, определение 5.30] масштабирующая функция еще называется отцовским вейвлетом. В [6, с. 103; 7, с. 44] термин «отцовский вейвлет» в определении масштабирующей функции не применяется. В тех же работах [2, с. 198; 7, с. 39–42] уточняющая функция (материнский вейвлет) просто названа вейвлетом.

В системе Хаара в соответствии с [2, (5.49)] отцовский вейвлет записан в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (21)$$

материнский вейвлет строится по формуле [2, с. 380]:

$$\psi(x) = \varphi(2x-1) - \varphi(2x), \quad (22)$$

и что легко показать, имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (23)$$

Отцовский и материнский вейвлеты позволяют построить ортонормированный базис вейвлет-преобразования для представления дискретно заданной геоинформации с целью ее обработки. Для этого в вейвлет-теории разработан так называемый кратномасштабный анализ. На его основе создается удобный в использовании алгоритм построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. Кратномасштабный анализ базируется на следующих функциях:

$$\varphi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - k); \quad (24)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k). \quad (25)$$

Эти формулы приведены в [2, с. 368; 6, с. 241; 7, с. 193; 10, с. 113, 28]. При этом в приведенных работах показателям степени в (24), (25) приписывается как положительный знак, так и отрицательный, как в нашем случае. При условии отрицательной степени график функции растягивается по оси  $x$ , а в случае положительной – сжимается. В данной работе нас интересует растяжение по оси  $x$ , поэтому принята запись степени с отрицательным знаком. При такой записи осуществляется уточнение значений функций в зависимости от числа ортонормированных векторов базиса вейвлет-разложения. То есть осуществляется увеличение деталей анализируемой информации или увеличение разрешения, поэтому в зарубежной литературе [10, с. 113] КМА-анализ справедливо называется многоразрешающим анализом (multiresolution analysis). Построение вейвлет-базисов в системе Хаара будем вести на основе (21)–(25) в следующем порядке:

1) построение базисного вектора нулевого приближения  $\varphi$ ;

2) построение последующих уточняющих базисных векторов.

**1. Построение базисного вектора нулевого приближения.** В основу построения всех базисных векторов положим вейвлет-базис вида [3, (3.67), (3.84)], применяемый нами в разложении (20). Хотя в теории вейвлетов [2–5] допускается возможность построения нескольких базисных векторов нулевого приближения, в данной работе мы ограничимся лишь одним в соответствии с данным разложением. При этом такое разложение наиболее часто применимо в различных рядах, в том числе и при разложении в ряд Фурье.

В соответствии с разложением (20), принятым здесь за основу, базисный вектор  $\varphi_{-p,k}$  единствен, так как  $k$  пробегает значения от 0 до  $\left(\left(\frac{N}{2^p}\right) - 1\right)$  [2, (3.67)]. Поскольку  $N = 2^p$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в (24)  $j = p$ ,  $k = 0$ . В соответствии с (21)  $0 \leq 2^{-p}x - k < 1$  или  $k \leq x < (1+k)/2^{-p}$ . При  $k = 0$   $0 \leq x < 1/2^{-p}$  и составляющие этого вектора определяются по формуле

$$\varphi_{j,k} = 2^{-\frac{p}{2}} \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2^p; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, на основе (26) получится вектор

$$\varphi_{p,0} = 2^{-\frac{p}{2}} (1, 1, \dots, 1) \quad (27)$$

с количеством одинаковых членов  $2^p$ .

**2. Построение последующих уточняющих базисных векторов.** Последующие уточняющие базисные векторы вычисляются по (25) с учетом (23). Порядок множества непересекающихся базисных векторов [2, (3.67)]  $U\{\psi_{-j,k}\}_{k=0}^{\left(N/2^j\right)-1}$  определяется значением  $j$ . Это значение изменяется от  $p-1$  до 0 с шагом  $-1$ . Тогда число базисных уточняющих векторов порядка  $j$  составит величину  $N/2^j$ . А значение  $k$  будет изменяться от 0 до  $N/2^j - 1$ .

Например, для  $j = p$  будем иметь следующий уточняющий вектор (единственный)  $\psi_{-p,0}$ . Для  $j = l$  уточняющими векторами порядка  $l$  будут  $\psi_{-l,0}; \psi_{-l,1}; \dots; \psi_{-l,(N/2^l)-1}$ .

Так, при  $N = 8$ ,  $p = 3$  уточняющими векторами порядка  $l = 1$  при верхнем пределе  $k$ , равном  $N/2^j - 1 = 2^p / 2 - 1 = 3$ , имеем  $\psi_{-1,0}; \psi_{-1,1}; \psi_{-1,2}; \psi_{-1,3}$ . Каждый из этих векторов при определенном  $k$  также определяется по (25) с учетом материнского вейвлета (23).

Таким образом, можно записать, что

$$\Psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}} \begin{cases} -1, 0 \leq 2^{-l}x - k < \frac{1}{2}; \\ 1, \frac{1}{2} \leq 2^{-l}x - k < 1; \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases} \quad \text{или} \quad \Psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}} \begin{cases} -1, k2^l \leq x < \left(\frac{1}{2} + k\right)2^l; \\ 1, \left(\frac{1}{2} + k\right)2^l \leq x < (1+k)2^l; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (28)$$

В качестве примера возьмем  $p = 3, l = 1, k = 2$ . Тогда  $\Psi_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{cases} -1, 4 \leq x < 5; \\ 1, 5 \leq x < 6; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

В таблице 2 дан пример вейвлет-разложения как методом сверток, так и КМА-методом.

Таблица 2. – Разложение вектора Z по составляющим  $\Phi$  и  $\Psi$

Исходный вектор	Составляющие							
	$c_{1,0} \cdot \Phi_{-3,0}$	$c_{2,0} \cdot \Psi_{-3,0}$	$c_{3,0} \cdot \Psi_{-3,0}$	$c_{3,1} \cdot \Psi_{-2,1}$	$c_{4,0} \cdot \Psi_{-1,0}$	$c_{4,1} \cdot \Psi_{-1,1}$	$c_{4,2} \cdot \Psi_{-1,2}$	$c_{4,3} \cdot \Psi_{-1,3}$
4	7,25	-3,25	-1	0	1	0	0	0
2	7,25	-3,25	-1	0	-1	0	0	0
3	7,25	-3,25	1	0	0	-2	0	0
7	7,25	-3,25	1	0	0	2	0	0
10	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	1	0
8	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	-1	0
10	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	-2
14	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	2

Можно отметить, что каждая составляющая вычислялась по формулам: для низкочастотной части  $P_{i,j} = 1/2^{p-j} \sum_{i=1}^{N/2^{p-j}} P_{i,j-1}$ , высокочастотной  $Q_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i,j}$ . Здесь  $j$  – номер этапа,  $i$  – номер составляющей сигнала в группе (группа состоит соответственно из 2, 4, ...  $2^p$  элементов в зависимости от порядкового номера этапа),  $p$  – число этапов. Окончательный результат выразим следующей формулой:  $Z = P_1 + \sum_{i=0}^{p-1} Q_{p-i}$ , где  $P_1$  – составляющая нулевой частоты (вектор  $\Psi_{-3,0}$  в примере таблица 2),  $Q_{p-i}$  – уточняющие составляющие.

В приведенных преобразованиях на каждом этапе при нецелом  $p$  возможен остаток элементов, число которых меньше числа  $2^{ip}$  при  $ip = 1, 2, \dots, 2^p$ . По этому остатку находится также среднее значение TZ, которое записывается в старшей строке  $p_{ip}$  на место этого остатка элементов. В последней строке, следующей сразу после строки с номером целой части  $p$ , обозначаемой через  $pf$ , находится среднее по всем элементам предыдущей строки  $P_{pf}$ . Это среднее является одним и тем же для строки  $P_{pf+1}$ . Подстрока  $q_{pf+1}$  вычисляется в общем порядке:

$$q_{pf+1} = P_{pf} - P_{pf+1}.$$

**Исследование эффективности сжатия геоинформации и фильтрации шумов с помощью вейвлетов.**

В основу исследований положены специально составленные авторами программы на языках VISUAL BASIC Excel (VBE) и IDL системы ENVI по сжатию и фильтрации геоинформации. В качестве первого объекта исследований принята модель рельефа, приведенная в [8].

В VBE-программе **Sub МакросВЕЙВЛсИстОш()** истинные высоты точек представлены массивом **cc1()**, а высоты, отягощенные случайными ошибками – массивом **cm()**. Так же как и в [8], связь настоящих массивов определяется формулой  $cm(i) = cc1(i) + delta$ , где  $i$  изменяется от 0 до  $N - 1$ ,

а  $\text{delta} = \text{Randbetween}(-t.+t)*\text{Std}$  – функция языка VBE генерирования случайного числа в интервале значений квантиля от  $-t$  до  $+t$ ,  $\text{Std}$  – задаваемый стандарт случайных ошибок (шумов). Именно высоты массива  $\mathbf{cm}()$  подвержены вейвлет-разложению по частотам. При вейвлет-сжатии и соответственно фильтрации оставались самые большие по амплитуде члены разложения на всех частотах. Фильтрационный вектор представлен массивом  $\mathbf{Filt} = \mathbf{Array}(1, 0.8, 0.6, 0.5, 0.25, 0.15, 0.1, 0)$ .

Например, при значении фильтра  $\text{Filter} = \text{Filt}(0) = 0.8$  на всех частотах разложения оставались значения, большие 0.8, остальные значения обнулялись. На выходе формировался отфильтрованный массив высот  $\mathbf{Tw}()$ . Средняя квадратическая ошибка отфильтрованных высот определялась по формуле

$$Sko = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Tw(i) - ccl(i))^2}{N}}$$

В таблице 3 приведены значения  $Sko$  в зависимости от значения фильтра,  $\text{Filter}$  и точности отмоделированных высот, величины  $\text{Std}$ . Оставшаяся информация в процентах вычислена как процентное отношение числа наибольших оставшихся коэффициентов к их общему числу до сжатия, равному 15.

Таблица 3. – Средние квадратические отклонения  $Sko$  по каждому фильтру в метрах в зависимости от стандартов  $\text{Std}$  распределения случайных ошибок высот

Filter	Оставшаяся информация в процентах	Значения Std				
		0,05	0,1	0,3	0,4	0,5
1	25	0,66	0,88	0,71	0,93	0,94
0,8	33	0,55	<u>0,35</u>	<u>0,63</u>	<u>0,86</u>	<u>0,88</u>
0,6	40	0,23	0,26	0,63	0,86	0,94
0,5	48	0,23	0,26	0,64	0,86	0,94
0,25	51	0,19	0,24	0,63	0,86	0,99
0,15	66	0,15	0,20	0,64	0,86	0,99
0,1	70	0,11	0,17	0,63	0,86	0,99
0	<u>100</u>	<u>0,09</u>	<u>0,18</u>	0,63	0,86	0,99

Влияние систематической части вейвлет-сжатия на точность конечного результата после обнуления деталей показано в таблице 4.

Таблица 4. – Средние квадратические отклонения по каждому фильтру при высотах, не отягощенных случайными ошибками

СКО по каждому фильтру								
Filter	1	0,8	0,6	0,5	0,25	0,15	0,1	0
СКО	0,55	0,34	0,25	0,23	0,15	0,10	0,06	0

Из экспериментальных исследований (таблицы 3, 4) вытекает следующее:

1) для сохранения максимально высокой точности исходных высот при их вейвлет-разложении сжатие информации недопустимо; даже при отсутствии сжатия ( $\text{Filter} = 0$ ) и наличии случайных ошибок среднее квадратическое отклонение результирующих высот больше их стандартного отклонения на входе;

2) сжатие информации можно допускать, но при этом следует учитывать порог понижения точности изображения рельефа; например, при трехкратном сжатии ( $\text{Filter} = 0,8$ ) и  $\text{Std} = 0,1$  среднее квадратическое отклонение высот на выходе  $Sko = 0,35$  больше  $\text{Std}$  в 3,5 раза, в остальных случаях оно больше в 2 раза; на рисунке 1 показан рельеф, построенный по истинным высотам, а на рисунке 2 – рельеф, полученный при трехкратном вейвлет-сжатии ( $\text{Filter} = 0,8$ ) и стандарте ошибок высот 0,3 м ( $\text{Std} = 0,3$  м);



3) закономерности влияния вейвлет-сжатия на точность получаемой на выходе информации такие же, как и при фильтрации информации в рядах Фурье [8], но здесь объем вычислений ничтожно мал по сравнению с преобразованиями Фурье.

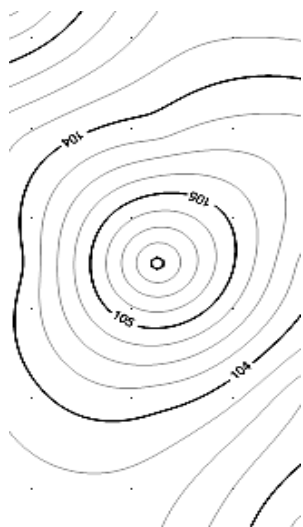


Рисунок 1. – Рельеф в горизонталях, построенный по высотам, принятым в качестве исходных [8] (сечение рельефа 0,25 м)



Рисунок 2. – Отфильтрованный рельеф при трехкратном (Filter = 0,8, Std = 0,3 м) вейвлет-сжатии информации

Одновременно авторами составлена программа *pro oroi\_data\_corr24bitWAVE* на алгоритмическом языке IDL системы ENVI вейвлет-фильтрации (сжатия) изображений.

На рисунке 3 приведены изображения: исходное (а) – оно же и восстановленное по всем вейвлет-элементам); сжатое (б) в 2,5 раза с отфильтрованными значениями составляющих вейвлет-разложения по модулю меньше 4 единиц; отмечены несовпадения с оригиналом. При большем сжатии несовпадений больше, и они представляют собой уже шумы, при которых изображение не пригодно к использованию.

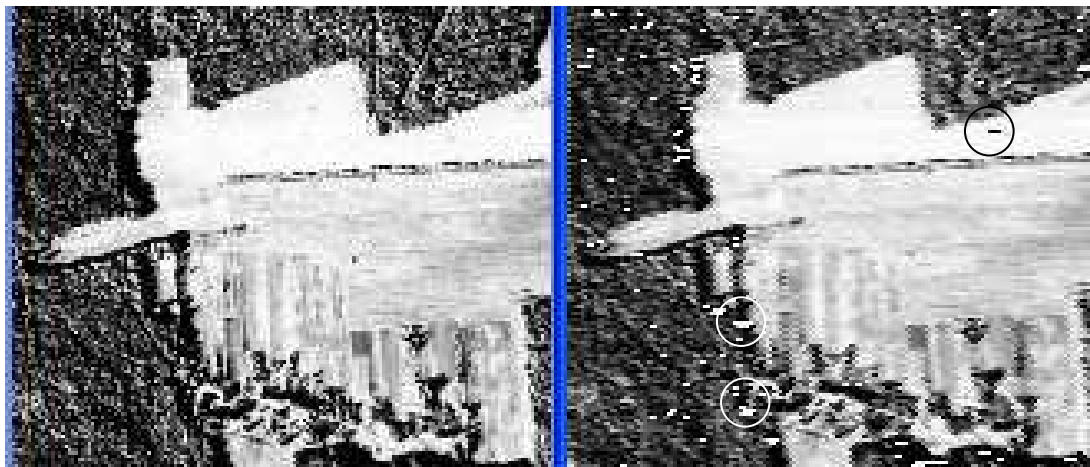


Рисунок 3. – Исходное (а) и сжатое в 2,5 раза (б) с отфильтрованными значениями составляющих вейвлет-разложения по модулю, меньшими 4 единиц

Таким образом, при сжатии изображения рекомендуется также подобрать вначале фильтр в соответствии с пунктами 1–3 в случае рельефа, или при котором отсутствуют видимые несовпадения. И лишь при нем осуществлять вейвлет-сжатие.

**Заключение.** Методика расчета значения фильтра для сжатия информации о высотах рельефа может быть изложена в следующей последовательности:

1) определяется по известной методике оценка стандарта высот рельефа Std в виде средней квадратической ошибки съемки рельефа;

2) для данного объекта определяются средние квадратические отклонения (СКО) по каждому фильтру (таблица 4);

3) если значение средней ошибки рельефа, полученное как  $0,8Std$ , меньше трети высоты сечения рельефа, по полученной экспериментально таблице 4 можно выбрать порог (величину СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе при определенном значении фильтра (Filter). Если средняя ошибка рельефа больше трети высоты сечения рельефа и приближается к величине СКО, получаемой при 25...30%-ном сжатии информации (то есть трех- и четырехкратном сжатии), в таком случае значение порога (величины СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе не имеет значения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шпаара, Д. Точное сельское хозяйство (Precision agriculture) / Д. Шпаара, А. Захаренко, В. Якушева ; под ред. Д. Шпаара. – СПб. ; Пушкин, 2009. – 398 с.
2. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер ; пер. с англ. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. – 487 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления для вузов / Н.С. Пискунов. Т. 2. – М. : Наука, 1978. – 575 с.
4. Мазурова, Е.М. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье / Е.М. Мазурова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – № 3. – С. 18–35.
5. Мазурова, Е.М. Двумерное и матричное представление быстрого преобразования Фурье / Е.М. Мазурова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – № 4. – С. 3–12.
6. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала ; пер. с англ. – М. : Мир, 2005. – 671 с.
7. Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи ; пер. с англ. – М. : Мир, 2001. – 412 с.
8. Ярмоленко, А.С. Фильтрация геоинформации в рядах Фурье / А.С. Ярмоленко, О.В. Скобенко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 1. – С. 107–113.
9. Шовенгердт, Р.А. Дистанционное зондирование, модели и методы обработки изображений / Р.А. Шовенгердт. – М. : Техносфера, 2010. – 560 с.
10. Журкин, И.Г. Автоматизированная обработка данных дистанционного зондирования : учеб. для вузов / И.Г. Журкин, Н.К. Шавенько ; под общ. ред. И.Г. Журкина. – М. : Диона, 2013. – 456 с.
11. Дьяконов, В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М. : Солон-Р, 2002. – 448 с.
12. Уэлстид, С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии / С. Уэлстид. – М. : Изд-во Триумф, 2003. – 320 с.
13. Воробьев, В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. – СПб. : ВУС, 1999. – 204 с.
14. Яковлев, А.Н. Введение в вейвлет-преобразование : учеб. пособие / А.Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
15. Красильников, Н.П. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений : учеб. пособие / Н.П. Красильников. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 608 с.
16. Малинников, В.А. Анализ методов формирования мультифрактальной меры, основанных на вейвлет-обработке экспериментальных данных / В.А. Малинников, Д.В. Учаев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 6. – С. 57–61.
17. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Недра, 1977. – 367 с.

Поступила 13.03.2018

#### APPLICATION OF WAVELETS IN FILTERING AND COMPRESSION OF GEO-INFORMATION

A. YARMOLENKO, O. SKOBENKO

*Built bases orthonormal wavelet transforms and filter information. You learned how to create a wavelet filters a sequence of folds, applying multiresolution-analysis to develop bases orthonormal wavelet transform. A method for determining the filter values depending on the accuracy of the original geo-information is developed. Implements the feasibility of wavelet filter based on written specific simulation software geinformation data fields and image, data compression and filtering.*

**Keywords:** *basis Wavelet transform, convolution, multiresolution-analysis, filtering, compression, precision, program, image, data field.*