

УДК 528.854

## ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ В ФИЛЬТРАЦИИ ГЕОИНФОРМАЦИИ

*д-р техн. наук, проф. А.С. ЯРМОЛЕНКО; О.В. СКОБЕНКО*  
(Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки)

Приведены основы теории преобразований Фурье в матричном виде в качестве исходной базы для программирования. С помощью специальных программ, составленных на языке Visual Basic Excel (VBE), исследована эффективность фильтрации шумов на основе преобразований Фурье. Показана возможность фильтрации случайных ошибок и сжатия геоинформации.

**Ключевые слова:** фильтрация, ряды Фурье, случайные ошибки, геоинформация.

**Введение.** Преобразование Фурье широко используется при обработке изображений. Фурье-образы позволяют анализировать частотный состав – спектр изображений. На основе анализа спектра выполняются сжатие изображений и их фильтрация, решаются задачи по улучшению и восстановлению изображений, по уменьшению смаза изображений и т.д. Фильтрация геоинформации необходима при определении отклонений показателей определенного явления от их средних или заданных (нормативных) значений, при мониторинге изменений различных явлений. Так, согласно [1], с помощью фильтрации можно осуществлять анализ сельскохозяйственных полей с посевами периодической структуры, выделять ярко выраженные темные и светлые пятна на изображениях полей сельскохозяйственных культур, определять области избыточного увлажнения, осушения почв, находить участки с недостающим количеством удобрений и с другими негативными отклонениями характеристик почв от нормальных параметров. Фильтрация необходима и для анализа рельефа местности по всем его характеристикам: высотам, уклонам, формам. Используя фильтрацию с помощью рядов Фурье можно подбирать проектные поверхности, наиболее подходящие к рельефу местности. Для практических целей важно отфильтровывать шумы (случайные ошибки): при топографических съемках – это ошибки определения координат точек, в том числе и высот; в технологиях точного сельского хозяйства [4] – это контуры, загрязняющие посевы; в мониторинге – это ошибки тематических данных или изменения параметров, характеризующих наблюдаемые объекты.

Исходя из того, что фильтрация геоинформации сопряжена с ее сжатием и сохранением необходимой точности, и учитывая неполную разработанность данного вопроса, тему представляемой работы следует признать актуальной.

**Краткие сведения о матричном представлении дискретных преобразований Фурье.** Основы матричного изложения теории рядов Фурье приведены в [2; 3]. При этом практическое значение имеют результаты работ [4; 5], полученные раньше, чем [2]. Согласно [2, с. 117], а также исходя из [4; 5] прямое преобразование Фурье (ППФ) может быть записано как

$$c = W_N \cdot Z. \quad (1)$$

Здесь

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^{1-1} & \omega_N^{1-2} & \dots & \omega_N^{1-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{2-1} & \omega_N^{2-2} & \dots & \omega_N^{2-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_N^{(N-1)-1} & \omega_N^{(N-1)-2} & \dots & \omega_N^{(N-1)-(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а  $\omega_N^{nm} = e^{-i \frac{2\pi}{N} nm}$ ;  $i$  – комплексное число ( $\sqrt{-1}$ );  $n$  – номер гармоники;  $m$  – номер наблюдения  $Z_N$  (дискретное значение функции);

$$Z = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_{N-1} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{N-1} \end{pmatrix},$$

$c_N$  – коэффициент гармоники  $n$  ряда Фурье.

Обратное преобразование Фурье (ОПФ) будет иметь вид

$$Z = F \cdot c, \quad (3)$$

где

$$F = \frac{1}{N} \bar{W}_N. \quad (4)$$

Элементы матрицы  $\bar{W}_N$  вычисляются следующим образом:

$$\omega_N^{-mn} = e^{i \frac{2\pi}{N} mn}. \quad (5)$$

В быстром преобразовании Фурье (БПФ-преобразовании) согласно [1, с. 157] и [5, с. 22–23] вектор значений функции  $Z$  можно представить в виде двух векторов:  $U$  и  $V$ . Причем  $U_k = Z_{2k}$ ,  $V_k = Z_{2k+1}$  для  $k = 0, 1, \dots, M-1$  и  $M = N/2$ .

Другими словами, вектору  $Z$  соответствует пара векторов:

$$U = (Z_0, Z_2, \dots, Z_{2M-2}); \quad (6)$$

$$V = (Z_1, Z_3, \dots, Z_{2M-1}), \quad (7)$$

и находятся векторы

$$C_U = W_M^U; \quad C_V = W_M^V,$$

где  $C_U = (c_{U_0}, c_{U_1}, \dots, c_{U_{M-1}})^T$ ;  $C_V = (c_{V_0}, c_{V_1}, \dots, c_{V_{M-1}})^T$ .

Тогда, согласно лемме 2.37 [2, с. 158] для  $m = 0, 1, \dots, M-1$

$$c_m = c_{U_m} + e^{-i \frac{2\pi}{N} m} c_{V_m}, \quad (8)$$

а для  $m = M, M+1, \dots, N$

$$c_m = c_{U_l} - e^{-i \frac{2\pi}{N} l} c_{V_l} \quad (9)$$

при  $l = 0, 1, M-1$ .

Если ввести обозначение

$$\omega_N^m = e^{-i \frac{2\pi}{N} m}, \quad (10)$$

можно составить следующую квазидиагональную (двухдиагональную) матрицу  $V$ :

$$\begin{pmatrix} 1\omega_N^0 & & & & & & & \\ & 01\omega_N^1 & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & 1\omega_N^{M-1} & & & & \\ & & & & 1-\omega_N^0 & & & \\ & & & & & 1-\omega_N^1 & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & 1-\omega_N^{M-1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а исходя из выражений (8), (9) вектор  $\bar{c}$  выразим из формулы

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_U^U \\ c_V^U \end{pmatrix}, \quad (12)$$

в которой

$$c_V^U = \begin{pmatrix} c_{U_0} \\ c_{V_0} \\ c_{U_1} \\ c_{V_1} \\ \dots \\ c_{U_{M-1}} \\ c_{V_{M-1}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда с учетом (11), (12), (13) вектор  $c$  можно представить как

$$c = V \cdot \bar{c}, \quad (14)$$

что идентично выражениям (8), (9).

**Основные теоретические положения по теории фильтрации сигналов.** Согласно теореме 3.3 в [6, с. 73] отфильтрованный сигнал может быть записан в непрерывном случае следующим образом:

$$f \cdot h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) \cdot d\omega, \quad (15)$$

где  $\hat{h}(\omega)$  – передаточная функция (фильтр), ослабляющая или усиливающая частотные компоненты  $\hat{f}(\omega)$  сигнала. Величины  $\hat{f}(\omega)$  и  $\hat{h}(\omega)$  являются преобразованиями Фурье функций  $f$  и  $h$ . При этом  $h$  называют характеристической функцией. Согласно [6, с. 40] фильтр определяется как оператор свертки.

Согласно лемме 2.30 [2, с. 144] преобразование Фурье свертки осуществляется так:

$$(Z \cdot \omega)^{\wedge}(m) = \hat{Z}(m) \hat{\omega}(m), \quad (16)$$

где  $\hat{Z}(m)$ ,  $\hat{\omega}(m)$  – соответственно преобразования Фурье функций  $Z$  и  $w$ . Построение фильтров является к настоящему времени сложной задачей [2, с. 186; 7, с. 265; 8, с. 262]. Однако их реализация возможна при анализе поведения волновых чисел соответственно амплитуд и фаз коэффициентов Фурье. Известно [2, с. 123], что в базисе Фурье низкие амплитуды преобразования Фурье группируются возле  $m = N/2$ , высокие – возле 0 и  $N-1$ . При этом по модулю амплитуды и фазы симметричны относительно  $N/2$ , а фазы гармоник от  $N/2 + 1$  до  $N - 1$  имеют обратный знак к фазам гармоник от 0 до  $N$ . Это обстоятельство позволяет хранить без потери информации лишь первую половину коэффициентов Фурье. Для практических целей может использоваться фильтр частот [6, с. 74], задаваемый передаточной функцией

$$\hat{h}(\omega) = 1[a, b](\omega), \quad (17)$$

равной 1 на  $[a, b]$  и нулю вне этого интервала. При этом волновое число в (17)

$$\omega = \frac{2\pi m}{N}. \quad (18)$$

Таким образом с учетом (18), (19), (20) дискретный частотный фильтр (17) может быть записан как

$$Z_m \cdot h(n) = f \cdot h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} c_m \cdot \hat{h}(\omega)^{+i \frac{2\pi}{N} mn}. \quad (19)$$

**Исследование эффективности фильтрации шумов с использованием рядов Фурье.** В основу исследований положены специально составленные авторами на языке Visual Basic Excel (VBE) программы алгоритмов преобразования Фурье – быстрого и обычного. В качестве модели исследований принята модель рельефа, приведенная в таблице 1.

Значения высот  $Z$  принимаются в качестве истинных, на основе которых будут моделироваться высоты, отягощенные случайными ошибками.

Таблица 1. – Исходные данные

	X	Y	Z
1	2000	1000	103,52
2	2000	1020	103,81
3	2000	1040	103,76
4	2000	1060	103,64
5	2000	1080	102,24
6	2020	1000	103,51
7	2020	1020	104,11
8	2020	1040	106,11
9	2020	1060	104,11
10	2020	1080	103,45
11	2040	1000	102,63
12	2040	1020	103,23
13	2040	1040	104,13
14	2040	1060	104,32
15	2040	1080	103,45

Соответствующий таблице 1 рельеф приведен на рисунке 1.

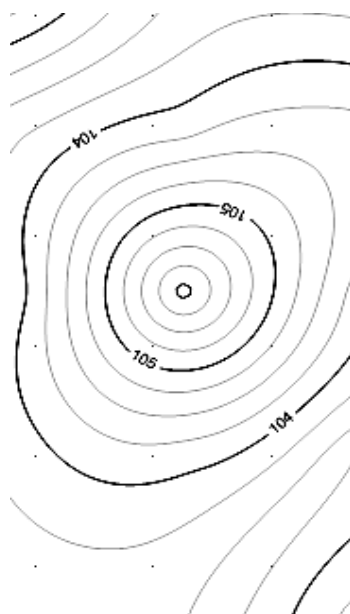


Рисунок 1. – Рельеф в горизонталях, построенный по высотам таблицы 1, принятым в качестве истинных, с сечением рельефа 0,25 м

В составленной программе фильтрации заданных высоких частот (остаются только низкие частоты) *Sub МодФилВысЧ()* высоты  $Z$  представлены массивом  $cc1()$ . Массив этих же высот, отягощенных случайными ошибками, в данной программе обозначен через  $cm()$ . В программе они представляют модель рельефа, которая будет описываться рядами Фурье и на которой исследуется эффективность фильтрации шумов (случайных ошибок высот). Связь настоящих массивов определяется формулой

$$cm(i) = cc1(i) + delta, \quad (20)$$

где  $i$  изменяется от 0 до  $N - 1$ ,

$$delta = Randbetween(-t, +t) \cdot Std, \quad (21)$$

а функция языка VBE генерирования случайного числа в интервале значений квантиля от  $-t$  до  $+t$ ;  $Std$  – задаваемый стандарт случайных ошибок (шумов).

Исследование эффективности фильтрации осуществляется циклом изменения параметра фильтра от значений  $F1$  до  $N+2$ . Значение  $F1$  может приниматься произвольным, но в данной исследовательской программе оно принято равным двум с тем, чтобы исследовать эффективность фильтрации на всех гармониках.

Значение среднего квадратического отклонения  $Sko$ , характеризующего эффективность фильтрации, вычисляется по формуле

$$Sko = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (cm1(i) - cc1(i))^2}{N}}, \quad (22)$$

где  $cm1(i)$  –  $i$ -тый элемент массива, отфильтрованного (восстановленного) сигнала.

Эффективность фильтрации оценивалась по минимальным значениям  $Sko$ .

Например, при  $N = 15$ ,  $Std = 0,3$  м и данным таблицы 1 получены следующие моделированные по формуле (20) значения случайных ошибок и высот, приведенные в таблице 2. Здесь значения высот найдены как сумма истинных высот, приведенных в таблице 1, и случайных ошибок таблицы 2.

Таблица 2. – Моделированные значения случайных ошибок и высот

Номер точек	Высота, м	Случайная ошибка
1	104,42	0,9
2	104,11	0,3
3	104,66	0,9
4	102,74	-0,9
5	102,24	0,0
6	103,51	0,0
7	104,41	0,3
8	106,11	0,0
9	103,81	-0,3
10	103,45	0,0
11	102,63	0,0
12	102,63	-0,6
13	103,83	-0,3
14	104,92	0,6
15	103,45	0,0

Высотам таблицы 2 соответствует массив  $cm(i)$  исследовательской программы.

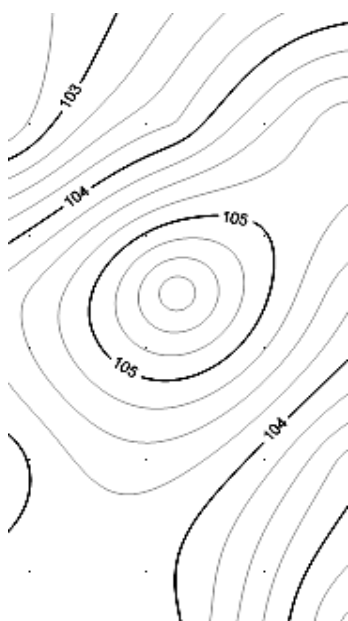
В таблице 3 приведены средние квадратические отклонения (22) по каждому фильтру и при различных значениях параметра точности  $Std$ .

Таблица 3. – Средние квадратические отклонения  $Sko$  по каждому фильтру в метрах в зависимости от стандартов  $Std$  распределения случайных ошибок высот

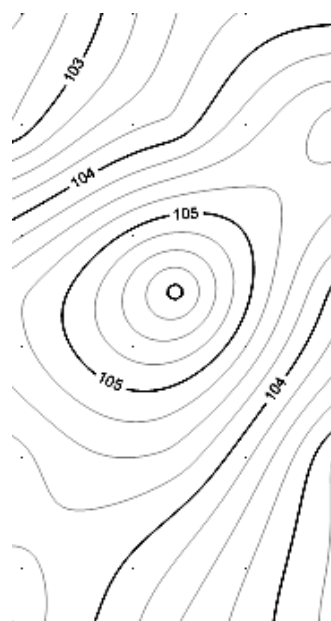
Гармоники	F1	Значения Std				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	2	0,833138	0,839700	0,833138	0,833324	0,910034
1	3	0,826894	0,832564	0,825931	0,851096	0,945270
2	4	0,680786	0,686109	0,680398	0,875126	0,821394
3	5	0,405096	0,423988	<b>0,408310</b>	<b>0,705958</b>	<b>0,624400</b>
4	6	0,404258	0,426542	0,421105	0,725719	0,624152
5	7	0,403558	0,430582	0,419046	0,728568	0,622929
6	8	0,381967	0,465022	0,412499	0,770333	0,773699
7	9	0,319604	0,403263	0,428946	0,738055	0,743841
8	10	0,289355	0,375102	0,567903	0,729367	0,728843
9	11	0,286904	0,380272	0,579253	0,730186	0,727725
10	12	0,277077	0,372638	0,593035	0,757414	0,765087
11	13	0,273641	0,396876	0,603354	0,790928	0,782243
12	14	0,235953	0,375108	0,586672	0,841022	0,848991
13	15	0,222214	<b>0,363145</b>	0,574015	0,867669	0,867067
14	16	<b>0,180739</b>	0,406612	0,584808	0,857904	0,885061

Из данных таблицы 3 следует, что восстановление рельефа рядом Фурье с максимальной точностью достигается в интервале между 1 и 15 гармониками. При этом чем больше ошибки исходных данных (больше величина  $Std$ ), тем меньшее число гармоник требуется, чтобы хранить данные в памяти компьютера с последующим восстановлением рельефа. Так, при стандарте высот 0,5 м средняя квадра-

тическая ошибка восстановления рельефа будет минимальной при использовании лишь пяти гармоник и составит 0,624 м (в таблице 3 приведены результаты фильтрации, начиная с первой гармоники  $F1 = 2$ ). Отсюда следует, что для повышения эффективности (достижения максимальной точности) представления рельефа при определении числа гармоник необходимо исходить из точности определения высот как математической основы рельефа. Чем менее точны высоты, тем меньшее число гармоник необходимо для их хранения в памяти компьютера. На рисунке 2 представлен рельеф, полученный при использовании лишь 3-х гармоник ряда Фурье из 15-ти при значении  $Std = 0,3$  м. На рисунке 3 представлен моделированный при тех же случайных ошибках (восстановленный по всем 15 гармоникам) рельеф, соответствующий высотам таблицы 2.



**Рисунок 2. – Отфильтрованный рельеф, полученный при использовании лишь 3-х гармоник ряда Фурье из 15 при значении  $Std = 0,3$  м**



**Рисунок 3. – Моделированный (восстановленный без фильтрации по всем 15-ти гармоникам) рельеф, соответствующий высотам таблицы 2**

Не только по минимальному значению  $Sko$ , но и визуально видна большая близость рельефа, полученного по 3-м гармоникам, к принятому за истинный (см. рисунок 1), чем рельефа, отягощенного случайными ошибками (рисунок 3) и получаемого при полном числе гармоник. Таким образом, доказывается возможность сокращения числа гармоник в рядах Фурье и повышения точности восстановления рельефа, отягощенного случайными ошибками.

Покажем влияние и систематической части ошибок самого метода Фурье. В таблице 4 приведены средние квадратические отклонения (22) по каждому фильтру, полученные при нулевых значениях средних квадратических ошибок высот рельефа. То есть моделированные высоты здесь принимались всегда равными приведенным в таблице 1. Соответствующее графическое представление рельефа при использовании всех 15-ти гармоник соответствует рисунку 1.

**Таблица 4. – Средние квадратические отклонения по каждому фильтру при высотах, не отягощенных случайными ошибками**

Номер гармоники	$Sko$	Номер гармоники	$Sko$
0	0,832	8	0,251
1	0,825	9	0,247
2	0,677	10	0,234
3	0,3999	11	0,230
4	0,398	12	0,182
5	0,396	13	0,129
6	0,374	14	0
7	0,292		

Данными таблицы 4 характеризуется внутренняя точность самого метода Фурье. Здесь значения средних квадратических ошибок (СКО) представления рельефа рядом Фурье вычислены по формуле (22),

где  $cm1(i)$  – массив отфильтрованных значений истинных высот, а  $cc1(i)$  – сами значения истинных высот, приведенные в таблице 1. На практике при таком тестировании модели вместо истинных высот следует принять реальные. Из сравнения таблиц 3 и 4 можно сделать вывод, что число гармоник для хранения информации о рельефе необходимо устанавливать из условия равенства средней квадратической ошибки высот среднему квадратическому отклонению, рассчитанному (см. таблицу 4) по каждому фильтру при истинных или одних и тех же реальных высотах.

Таким образом, методика расчета числа гармоник хранения высот и соответственно восстановления рельефа может быть следующей:

1) задаемся средней квадратической ошибкой  $Std$  известных высот рельефа. На практике такая величина известна всегда, так как способы оценки точности полученного при съемке рельефа общеизвестны;

2) сравниваем значение  $Std$  с предвычисленными для каждой фильтрующей гармоники значениями средних квадратических отклонений (см. таблицу 4) с использованием реальных высот. Из равенства этих значений определяем число гармоник. Например, значение  $Std = 0,1$  м, исходя из таблицы 4, находится в интервале от 0 до 0,129 м. Следовательно, для хранения высот рельефа заданной точности необходимо использовать полный ряд Фурье со всеми гармониками. При  $Std = 0,2$  м, попадающему в интервал от 0 до 0,230 (см. таблицу 4), можно ограничиться 12-ю гармониками (при их счете от 0). Аналогично при  $Std = 0,3$  м (интервал от 0 до 0,374 (см. таблицу 4)) – 7-ю гармониками, при  $Std = 0,4$  м (интервал от 0 до 0,677 (см. таблицу 4)) – 3-мя гармониками, и при  $Std = 0,5$  м – тоже 3-мя гармониками.

В таблице 3 выделены минимальные средние квадратические отклонения  $Sko$  из моделирования по каждому фильтру в зависимости от стандартов  $Std$  распределения случайных ошибок высот. Эти значения  $Sko$  соответствуют числу гармоник, получаемому из сформулированного выше правила равенства средней квадратической ошибки высот  $Std$  среднему квадратическому отклонению, рассчитанному по каждому фильтру при истинных или одних и тех же реальных высотах. Несовпадение для случая, когда  $Std$  равен 0,3 м, несущественно, так как при 7-ми гармониках среднее квадратическое отклонение равно 0,428946 и пренебрежимо мало отличается от значения 0,40831 при 3-х гармониках.

Таким образом, из сказанного выше следует вывод, что ряды Фурье позволяют как фильтровать случайные ошибки описываемых ими данных, так и сокращать объем информации о них без понижения точности конечных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шпаара, Д. Точное сельское хозяйство (Precision agriculture) / Д. Шпаара, А. Захаренко, В. Якушева ; под ред. Д. Шпаара. – СПб. ; Пушкин, 2009. – 398 с.
2. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер ; пер. с англ. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний. 2008. – 487 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления для вузов / Н.С. Пискунов. Т. 2. – М. : Наука, 1978. – 575 с.
4. Мазурова, Е.М. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье / Е.М. Мазурова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – № 3. – С. 18–35.
5. Мазурова, Е.М. Двумерное и матричное представление быстрого преобразования Фурье / Е.М. Мазурова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – № 4. – С. 3–12.
6. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала ; пер. с англ. – М. : Мир, 2005. – 671 с.
7. Шовенгердт, Р.А. Дистанционное зондирование, модели и методы обработки изображений / Р.А. Шовенгердт. – М. : Техносфера, 2010. – 560 с.
8. Журкин, И.Г. Автоматизированная обработка данных дистанционного зондирования : учеб. для вузов / И.Г. Журкин, Н.К. Шавенько ; под общ. ред. И.Г. Журкина. – М. : Диона, 2013. – 456 с.

Поступила 21.12.2018

#### APPLICATION OF FOURIER SERIES IN GEOINFORMATION FILTERING

A. YARMOLENKO, O. SKOBENKO

*Foundations of Fourier transforms theory in a matrix form referring to programming are described. Using special programs written in Visual Basic Excel (VBE) the effectiveness of noise-filtering based on Fourier transforms is investigated. Ability to filter both random error and compression of geo-information is shown. Provides the ability to filter both random error and compression of geoinformation.*

**Keywords:** filtering, Fourier series random errors, geoinformation.