

УДК 624.012.4545

DOI 10.52928/2070-1683-2022-32-14-29-44

**РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ****д-р техн. наук, проф. Д.Н. ЛАЗОВСКИЙ, канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ,  
канд. техн. наук, доц. Е.Д. ЛАЗОВСКИЙ, А.И. ГИЛЬ****(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)**

*В материале статьи объединены методы расчета основных параметров сопротивления железобетонных конструкций: деформационная расчетная модель поперечного сечения на основе диаграмм деформирования бетона и арматуры, блочная модель на основе закона сцепления арматуры с бетоном и метод конечных элементов для вычисления внутренних усилий. На примере неразрезной балки показана возможность вычисления параметров напряженно-деформированного состояния в любом поперечном сечении, на любой стадии работы конструкции, избегая использования эмпирических зависимостей.*

*Выполнено моделирование работы железобетона с трещинами при изгибе. Представлен алгоритм расчета параметров напряженно-деформированного состояния неразрезной изгибаемой конструкции при действии нагрузки с моделированием эквивалентного равновесного состояния поперечного сечения при образовании трещины. Выполнено сопоставление экспериментальных и расчетных параметров статически неопределимой железобетонной балки. Определены направления дальнейших исследований.*

**Ключевые слова:** сопротивление железобетона, деформационная модель, блочная модель, метод конечных элементов, неразрезная балка, напряженно-деформированное состояние.

**Введение.** Сопротивление железобетона внешним воздействиям отличается от других материалов строительных конструкций. Основное отличие заключается в возможности появления трещин в бетоне. Проявление этого характеристического свойства железобетона при работе конструкции под нагрузкой не является критическим с точки зрения прочности и долговечности, если раскрытие трещин не превышает допустимой величины. Особенность работы железобетона с трещинами проявляется в распределении внутренних усилий в статически неопределимых конструкциях, зависящем от их жесткости, которая резко снижается в сечениях конструкций вблизи трещин. Величина жесткости строительной конструкции используется и для вычисления ее деформаций (прогибов), частот собственных колебаний при различных воздействиях.

Работа железобетонной конструкции под нагрузкой разделяется на несколько стадий [1; 2], основными из которых являются: до и в момент появления трещин; после появления трещин до начала разрушения; в момент разрушения. Согласно [2], в теории сопротивления железобетона при проектировании необходимо рассчитать четыре основных параметра: момент образования трещин; раскрытие трещин после их появления; жесткость и связанные с ней деформации (прогибы); несущую способность (прочность).

Современный этап развития теории сопротивления железобетона внешним воздействиям характеризуется широким применением сложных математических моделей его работы и вычислительных средств для расчетов. Используемые методы расчета основных параметров сопротивления железобетонных конструкций: деформационная расчетная модель поперечного сечения на основе диаграмм деформирования бетона и арматуры, блочная модель на основе закона сцепления арматуры с бетоном и метод конечных элементов для вычисления внутренних усилий.

Названные методы для расчета статически неопределимых изгибаемых железобетонных элементов в нормативных документах<sup>1,2,3</sup> не находятся в методическом единстве. Так, деформационная расчетная модель используется для вычисления момента образования трещин и прочности элемента; блочная модель железобетона между трещинами – для вычисления раскрытия трещин; методы строительной механики (в т.ч. метод конечных элементов) на основе жесткости элементов – для вычисления их внутренних усилий и прогибов. При вычислении жесткости железобетонного элемента с использованием деформационной модели не учитывается работа растянутого бетона над трещиной и на участке между трещинами или учитывается эмпирическими зависимостями. Относительные деформации (напряжения) арматуры в поперечном сечении с трещиной нормального отрыва для вычисления ширины раскрытия по блочной модели рассчитывают на основе деформационной модели сечений по внутренним усилиям, полученным методами строительной механики. Вычисленные параметры железобетонной конструкции при этом оказывают взаимное влияние друг на друга.

Цель настоящей работы: методически объединить названные методы расчета напряженно-деформированного состояния и отдельных параметров железобетонной конструкции и показать на примере неразрезной балки возможность их вычисления в любом поперечном сечении, на любой стадии работы конструкции, избегая использования эмпирических зависимостей.

**Исходные данные.** Шарнирно опертая неразрезная двухпролетная железобетонная балка с расстоянием между осями опор 1800 мм поперечным сечением 120×190 мм, загруженная сосредоточенными силами в третях пролетов

<sup>1</sup>CEB-FIB Model Code for Concrete Structures 2010. URL: <https://www.wiley.com/en-us/fib+Model+Code+for+Concrete+Structures+2010-p-9783433604083>.

<sup>2</sup>СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения : СП 63.13330.2018. – Введ. 20.06.19. – М. : Стандартинформ, 2018. – 143 с.

<sup>3</sup>Бетонные и железобетонные конструкции : СП 5.03.01-2020. – Введ. 16.11.20. – Минск : Стройтехнорм, 2020. – 236 с.

(по две в каждом пролете). Ширина опор балки составляет 100 мм. Балка симметрично армирована в верхней и нижней зонах продольной стержневой арматурой (по  $2\phi 12$  мм,  $A_s=A_{s1}=226,19$  мм<sup>2</sup>) с пределом текучести 528,7 МПа, временным сопротивлением 592,8 МПа и относительным удлинением при разрыве 7,6%. Расстояние от верхней и нижней граней балки до центра тяжести поперечного сечения арматуры составляет 25 мм. Призменная прочность бетона при сжатии  $f_{cm}=32,6$  МПа, начальный модуль упругости при сжатии 31,38 ГПа, прочность бетона при растяжении  $f_{ctm}=2,53$  МПа. Бетон балки изготовлен на бездобавочном портландцементе с гранитным щебнем крупностью 5...20 мм.

Диаграмма деформирования продольной стержневой арматуры балки при растяжении и сжатии принимается билинейной с ограничением относительных деформаций ее удлинением при разрыве.

Диаграмма деформирования бетона при сжатии принимается в виде криволинейной с нисходящей ветвью без ограничения ее длины по деформациям с целью получения полного перераспределения усилий между зонами в пролете и на опоре статически неопределимой балки. Для получения полной нелинейной диаграммы деформирования бетона изгибаемой конструкции на растяжение при изгибе вычисляем согласно<sup>4</sup> прочность бетона на растяжение при изгибе  $f_{ctm,fl}$  и согласно<sup>5</sup> [3; 4] начальный модуль упругости при растяжении  $E_{ct}$ , относительные деформации  $\varepsilon_{ctm,1}$  в пиковой точке диаграммы деформирования и предельную растяжимость бетона  $\varepsilon_{ctm,u}$ :

$$f_{ctm,fl} = f_{ctm} \cdot \left[ 1,6 - \frac{h}{1000} \right], \quad (1)$$

$$E_{ct} = \frac{10^7 \cdot f_{ctm}}{750 + 81,55 \cdot f_{ctm}}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ctm,1} = \frac{2 \cdot f_{ctm}}{E_{ct}}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ctm,u} = \frac{K \cdot \varepsilon_{ctm,1}}{2}, \quad (4)$$

$$K = 6,4 + 0,1223 \cdot f_{cm}. \quad (5)$$

Результаты вычислений для бетона рассматриваемой неразрезной балки следующие:  $f_{ctm,fl}=3,57$  МПа;  $E_{ct}=26,46$  ГПа;  $\varepsilon_{ctm,1}=19,1 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{ctm,u}=1 \cdot 10^{-3}$ .

**Деформационная расчетная модель поперечного сечения при изгибе.** В последнее время находит широкое применение метод сечений с использованием деформационной модели. При действии изгибающих моментов рассматривают сечения, нормальные к продольной оси элемента. Если элемент находится в равновесии, можно составить уравнения равновесия. Характерной особенностью модели является применение кроме уравнений равновесия условий деформирования сечения и диаграмм состояния бетона и арматуры. Согласно деформационной модели, поперечное сечение изгибаемого в одной плоскости элемента рассматривается как совокупность элементарных площадок (слоев), в пределах которых напряжения считаются равномерно распределенными.

Распределение деформаций по высоте поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента до появления трещин подчиняется гипотезе плоских сечений. После появления трещин в момент разрыва бетона растянутой зоны появляется сдвиг между арматурой и бетоном, сечение искривляется. По длине элемента деформации сжатой и растянутой зон сечения переменные, а нейтральная ось волнообразная (рисунок 1, а). При этом в сечении с трещиной участок поперечного сечения железобетонного элемента над трещиной остается плоским. Для поперечных сечений, расположенных на участке между трещинами, при отсутствии сдвига между арматурой и бетоном также справедлива гипотеза плоских сечений [2] (рисунок 1, б).

Многочисленные экспериментальные исследования показали справедливость названной гипотезы для железобетонных элементов, длина которых в 5 и более раз превышает максимальный размер поперечного сечения. Гипотеза плоских сечений широко используется в качестве допущения для железобетонных элементов, имеющих трещины в растянутой зоне, для осредненных продольных деформаций растянутой и сжатой зоны (рисунок 1, в). Но для оценки напряженно-деформированного состояния, вычисления жесткости после появления трещин и прочности изгибаемого железобетонного элемента следует рассматривать поперечное сечение с трещиной, по которому и происходит разрушение и для которого из-за сдвигов между арматурой и бетоном растянутой зоны гипотеза плоских сечений не справедлива. Кроме того, в сечениях между трещинами растягивающие усилия воспринимаются бетоном и арматурой, уменьшая деформации изгибаемого элемента.

В расчетной деформационной модели работа растянутой зоны бетона после образования трещин в постановке [2; 5] учитывается путем трансформирования диаграммы растяжения свободной арматуры (без бетона, в сечении с трещиной) в диаграмму, в которой напряжения  $\sigma_s$  приняты как свободной арматуры для сечения с трещиной, а относительные деформации  $\varepsilon_s$  – для осредненного сечения в соответствии с гипотезой плоских сечений, т.е. скорректированы в меньшую сторону с учетом коэффициента  $\psi_s$ <sup>6,7</sup> [6]. Коэффициент  $\psi_s$  вычисляется по формуле:

$$\psi_s = 1 - 0,75 \cdot \varphi_{sl} \frac{\sigma_{cr,c}}{\sigma_s}, \quad (5)$$

<sup>4</sup> См. сноску 3.

<sup>5</sup> Kolleger, J. Comparison of Fixed and Rotating Crack Models in the Analysis of Panels, Plates and Shells Subjected to Shear // Proceedings Symposium on Concrete Shear in Earthquake, Houston. – P. 216–225.

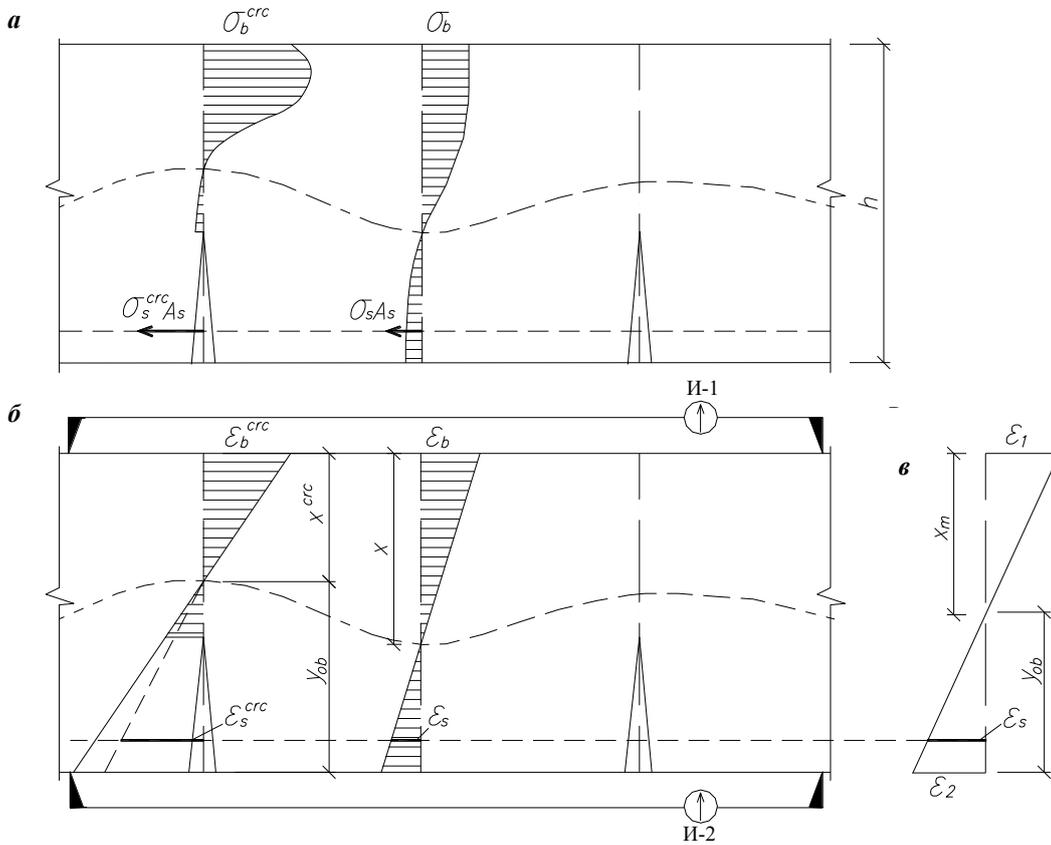
<sup>6</sup> Методическое пособие. Статически неопределимые железобетонные конструкции. Диаграммные методы автоматизированного расчета и проектирования. – М.: М-во стр-ва и жилищно-коммунального хоз-ва Рос. Федерации, 2017. – 197 с.

<sup>7</sup> Карпенко, С.Н. Модели деформирования железобетона в приращениях и методы расчета конструкций: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / С.Н. Карпенко; Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук. – М., 2010. – 48 с.

где  $\sigma_{crc}$  и  $\sigma_s$  – напряжения в арматуре в поперечном сечении с трещиной соответственно в момент образования трещины и текущее;

$\varphi_{sl} = 1$  – при кратковременном действии напряжений;

$\varphi_{sl} = 0,8$  – то же, при длительном.



**а** – распределение напряжений в поперечных сечениях; **б** – распределение относительных деформаций в поперечных сечениях; **в** – распределение средних относительных деформаций на участке элемента с трещинами

**Рисунок 1. – Напряженно-деформированное состояние изгибаемого железобетонного элемента после образования трещин**

Для изгибаемых железобетонных элементов уравнения напряженно-деформированного состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sigma_{ci} A_{ci} (y_0 - y_{ci}) + \sum_{i=k+1}^n \sigma_{si} A_{si} (y_0 - y_{si}) - M &= 0; \\ \sum_{i=1}^k \sigma_{ci} A_{ci} + \sum_{i=k+1}^n \sigma_{si} A_{si} &= 0; \\ \varepsilon_{(c,s)i} &= \frac{1}{r} (y_0 - y_{(c,s)i}), \quad \sigma_{ci} = f(\varepsilon_{ci}), \quad \sigma_{si} = f(\varepsilon_{si}), \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\sigma_{(c,s)i}$  – нормальные напряжения в  $i$ -ой элементарной площадке бетона или арматуры;

$\varepsilon_{(c,s)i}$  – продольные деформации  $i$ -ой элементарной площадки бетона или арматуры;

$A_{(c,s)i}$  и  $y_{(c,s)i}$  – соответственно площадь сечения и расстояние от выбранной оси до центра тяжести  $i$ -той элементарной площадки бетона или арматуры.

Критерием образования трещин нормального отрыва является достижение элементарным слоем бетона на уровне центра тяжести арматурного стержня предельных относительных деформаций  $\varepsilon_{ctm,u}$ .

Максимальное значение внешней нагрузки, при котором выполняются условия равновесия (6) во всех поперечных сечениях, соответствует несущей способности статически неопределимой железобетонной конструкции.

Вычисление жесткости участка по длине изгибаемой железобетонной конструкции с трещинами производится с учетом работы растянутого бетона как среднее значение суммы жесткостей элементарных площадок бетона и арматуры по границам участка:

$$(EI)_j = \frac{[\sum_{i=1}^n E_{(c,s)i} A_{(c,s)i} (y_0 - y_{(c,s)i})^2]_j + [\sum_{i=1}^n E_{(c,s)i} A_{(c,s)i} (y_0 - y_{(c,s)i})^2]_{j+1}}{2}. \tag{7}$$

**Блочная расчетная модель железобетонного элемента при изгибе.** Описывает параметры напряженно-деформированного состояния железобетона между трещинами<sup>8,9</sup> [7–9]. Исходными данными кроме характеристик бетона и арматуры являются напряжения (относительные деформации) в арматуре в поперечном сечении с трещиной.

Основными предпосылками модели для изгибаемого элемента являются<sup>10</sup>: изгибаемый железобетонный элемент – совокупность железобетонных блоков, разделенных в растянутой зоне трещинами нормального отрыва и связанных между собой бетоном сжатой зоны и растянутой арматурой; арматура и бетон растянутой зоны, которые работают совместно в соответствии с законом сцепления<sup>11</sup> [9], устанавливающим зависимость касательных напряжений по площади контакта арматуры диаметром  $\varnothing$  с бетоном от их взаимного сдвига  $\tau(s)$ ; напряжения в бетоне растянутой зоны, которые распределяются равномерно по эффективной площади  $A_{c,eff}$ .

Распределение относительных деформаций растянутого бетона и арматуры по длине блока описывается следующей системой уравнений (решается последовательными приближениями метода конечных разностей (рисунок 2)):

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} s = \varepsilon_s(\sigma_s) - \varepsilon_c \left( \frac{N - \sigma_s \cdot A_s}{A_{c,eff}} \right) \\ \frac{d}{dx} \sigma_s = \frac{4}{\varnothing} \cdot \tau(s) \end{cases} \quad (8)$$

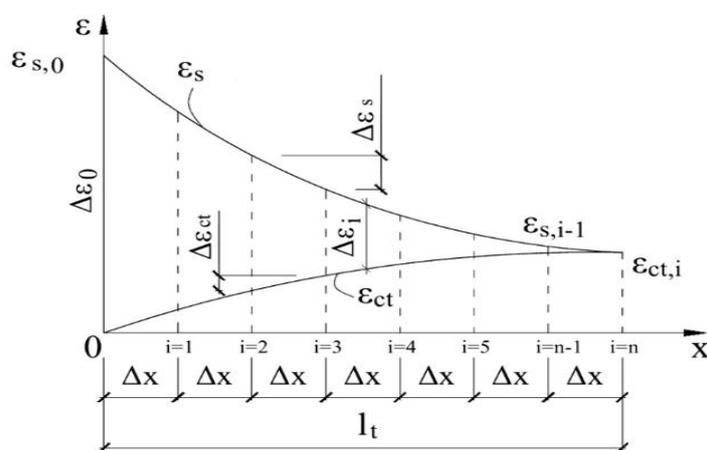


Рисунок 2. – Распределение относительных деформаций бетона и арматуры в железобетонном блоке со стороны трещины

Рассматривают две стадии трещинообразования в работе под нагрузкой изгибаемого железобетонного элемента<sup>9</sup>: первая – неустановившегося трещинообразования, когда при увеличении изгибающего момента по длине железобетонного элемента появляются трещины нормального отрыва; вторая – установившегося трещинообразования, когда количество трещин практически не увеличивается (происходит перераспределение усилий между арматурой и бетоном по длине железобетонного блока в соответствии с взаимными сдвигами из-за нарушения сцепления).

На первой стадии трещинообразования в железобетонном блоке относительные деформации бетона не превышают значений предельной растяжимости бетона, т.е. зоны сдвигов (перераспределения) со стороны двух смежных трещин не перекрываются (рисунок 3, а). При увеличении изгибающего момента относительные деформации бетона на уровне центра тяжести арматуры в зоне совместного деформирования достигают значений  $\varepsilon_{ct,u}$ , происходит деление новыми трещинами нормального отрыва на более мелкие железобетонные блоки.

На второй стадии трещинообразования по всей длине железобетонного блока относительные деформации бетона на уровне центра тяжести арматуры  $\varepsilon_{ctm} \leq \varepsilon_{ctm,u}$ , т.е. зоны перераспределения двух смежных трещин перекрываются (рисунок 3, б). При увеличении изгибающего момента от внешней нагрузки происходят взаимные сдвиги арматуры и бетона (что проявляется в раскрытии трещин) и перераспределение усилий с бетона на арматуру.

Ширина раскрытия трещины нормального отрыва вычисляется как сумма взаимных смещений  $s(x)$  арматуры и растянутого бетона в смежных железобетонных блоках по длине зон перераспределения  $l_t$  слева ( $l$ ) и справа ( $r$ ) от краев трещины нормального отрыва:

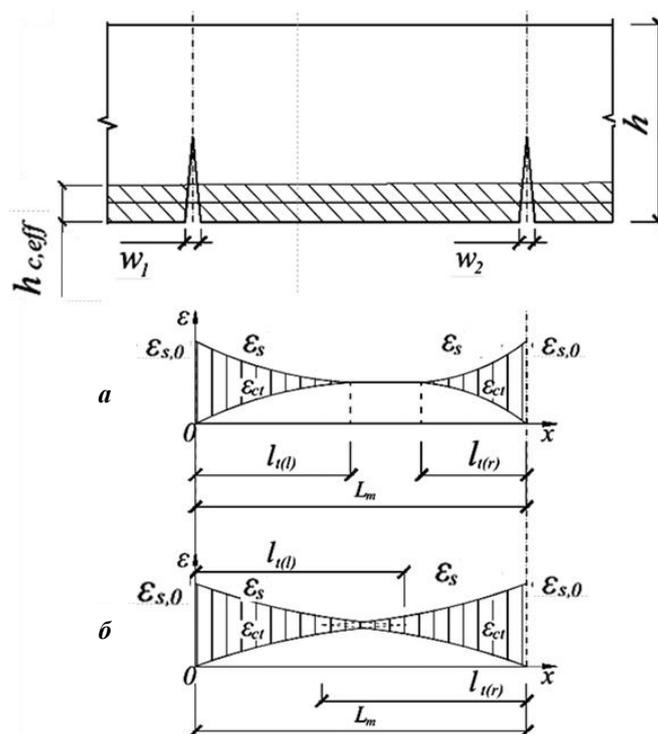
$$w = \int_{-l_t(l)}^{l_t(r)} s(x) dx = \int_{-l_t(l)}^{l_t(r)} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_{ct}(x)] dx. \quad (9)$$

<sup>8</sup> Васильев, П.И. Раскрытие швов и трещин в массивных бетонных конструкциях / П.И. Васильев, Е.Н. Пересыпкин // Аннотации законченных в 1967 г. научно-исследовательских работ по гидротехнике. – Л. : Энергия, 1968. – С. 292–294.

<sup>9</sup> Починок, Ю.В. Блочная деформационная модель в расчетах железобетонных стержневых изгибаемых элементов с трещинами : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Ю.В. Починок. – Ростов на Дону, 2004. – 241 л.

<sup>10</sup> Лазовский, А.Д. Сопротивление изгибу железобетонных многослойных плит перекрытий безопалубочного формирования в составе платформенных стыков зданий : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / А.Д. Лазовский. – Новополоцк, 2017. – 152 л.

<sup>11</sup> См. сноску 3.



*a* – на первой стадии трещинообразования; *b* – на второй стадии трещинообразования

Рисунок 3. – Распределение относительных деформаций бетона и арматуры по длине железобетонного блока

**Метод конечных элементов.** Для вычисления внутренних усилий и деформаций от действия внешних нагрузок в изгибаемых балочных конструкциях применяются стержневые конечные элементы. Неразрезная опора моделируется двумя точечными опорами с расстоянием между ними, равным ее ширине (100 мм). Напряженно-деформированное состояние железобетонной конструкции определяется уравнением метода конечных элементов для вычисления перемещений:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{F\}, \quad (10)$$

где  $\{\delta\}$  – вектор перемещений;  
 $\{F\}$  – вектор внешней нагрузки;  
 $[K]$  – глобальная матрица жесткости системы.

Вектор внутренних усилий отдельно взятого конечного элемента определяют произведением локальной матрицы жесткости и вектора перемещений узлов конечного элемента. Построенная конечно элементная модель подвергается адаптивной дискретизации. Элементы модели подстраиваются под аналитические оценки зон проскальзывания арматуры, определенные с использованием блочной модели железобетона. Исходя из условия малости конечных элементов, рассматривают жесткостные характеристики элемента (участка изгибаемой неразрезной балки) как осредненные на его длине (формула (7)).

**Моделирование работы железобетона с трещинами при изгибе.** В изгибаемом железобетонном элементе до появления трещин в бетоне сопротивление растяжению оказывает бетон и продольная арматура. Относительные деформации растянутого бетона и арматуры благодаря сцеплению между ними равны между собой. С увеличением нагрузки в зоне максимальных изгибающих моментов на наиболее ослабленных участках (вследствие неоднородности структуры бетона и частично арматуры) растягивающие относительные деформации в бетоне приближаются к предельным и появляются трещины нормального отрыва. В сечении с трещиной и вблизи него сцепление нарушается, растягивающие усилия воспринимаются арматурой. После образования трещины напряжения (относительные деформации) по краям трещины в бетоне становятся равными нулю, и возникает разность относительных деформаций бетона и арматуры  $\Delta\varepsilon$ . В соответствии с законом сцепления эта разность деформаций на расстоянии  $L$  от трещины уменьшается до нуля или до области, где относительные деформации в бетоне достигают предельных значений на растяжение. Если разбить участок сдвига арматуры и бетона растянутой зоны на ряд элементарных фрагментов, то на каждом  $i$ -ом фрагменте участка сдвига разность относительных деформаций имеет значение  $\Delta\varepsilon_i$ , что определяет в арматуре дополнительное напряжение  $\Delta\sigma_i$  (рисунок 2). Величина дополнительных относительных деформаций (дополнительного напряжения) изменяется по длине растянутого бетонного блока в зависимости от его значения в поперечном сечении с трещиной и значения взаимного сдвига арматуры и бетона (рисунок 4).

Дополнительное напряжение в арматуре, обусловленное возникшей разностью относительных деформаций между растянутой арматурой и бетоном, приводит к новому равновесному состоянию поперечного сечения под нагрузкой. Изгибающий момент от внешней нагрузки в поперечном сечении с трещиной и между трещинами одинаков. В [10, с. 423–425] это явление называется «дополнительным состоянием».

Предлагается в деформационной модели поперечного сечения железобетонного элемента влияние дополнительного напряжения в арматуре учитывать, задавая соответствующее дополнительное напряжение (относительные деформации) арматурным стержням (аналогично моделированию предварительного напряжения арматуры) и анализируя состояние поперечного сечения в предыдущем моменте трещинообразования (рисунок 5).

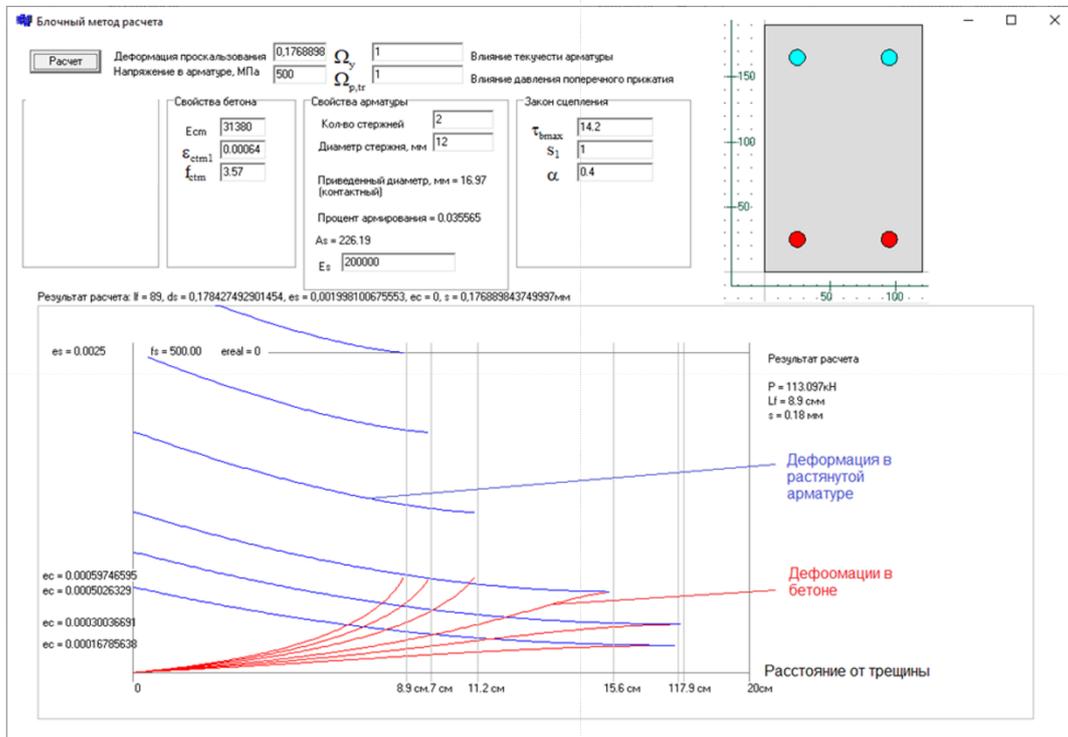
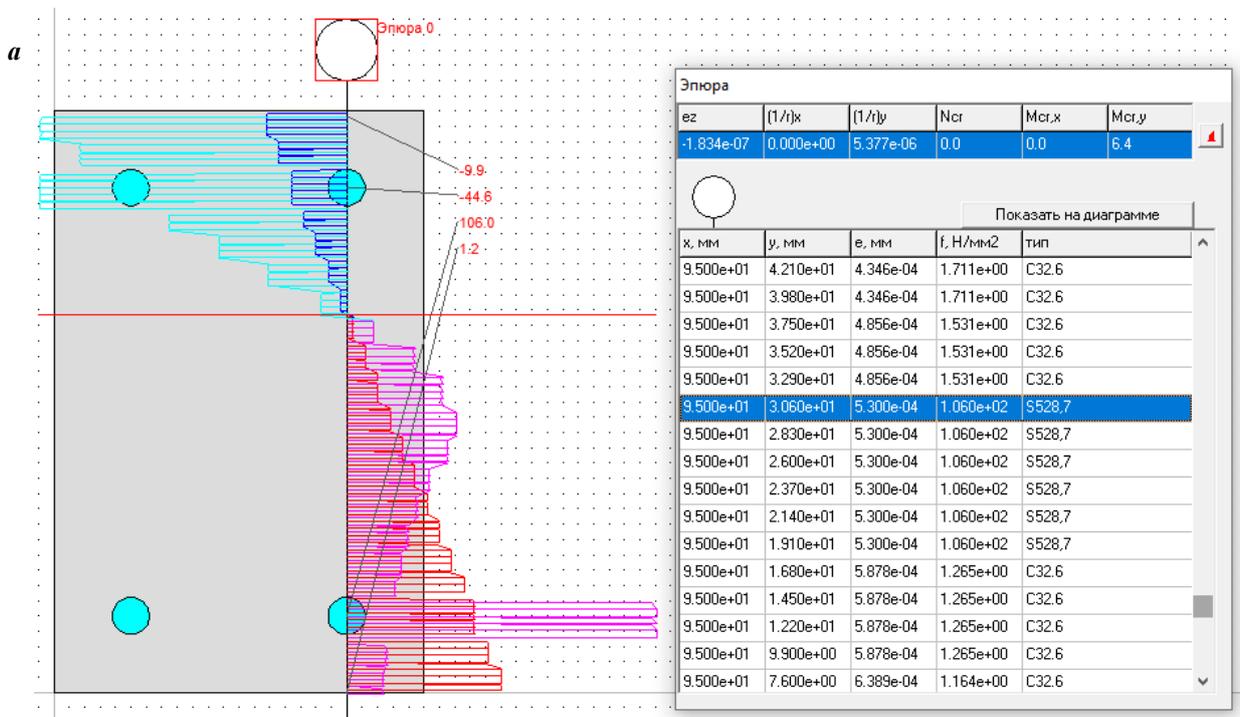
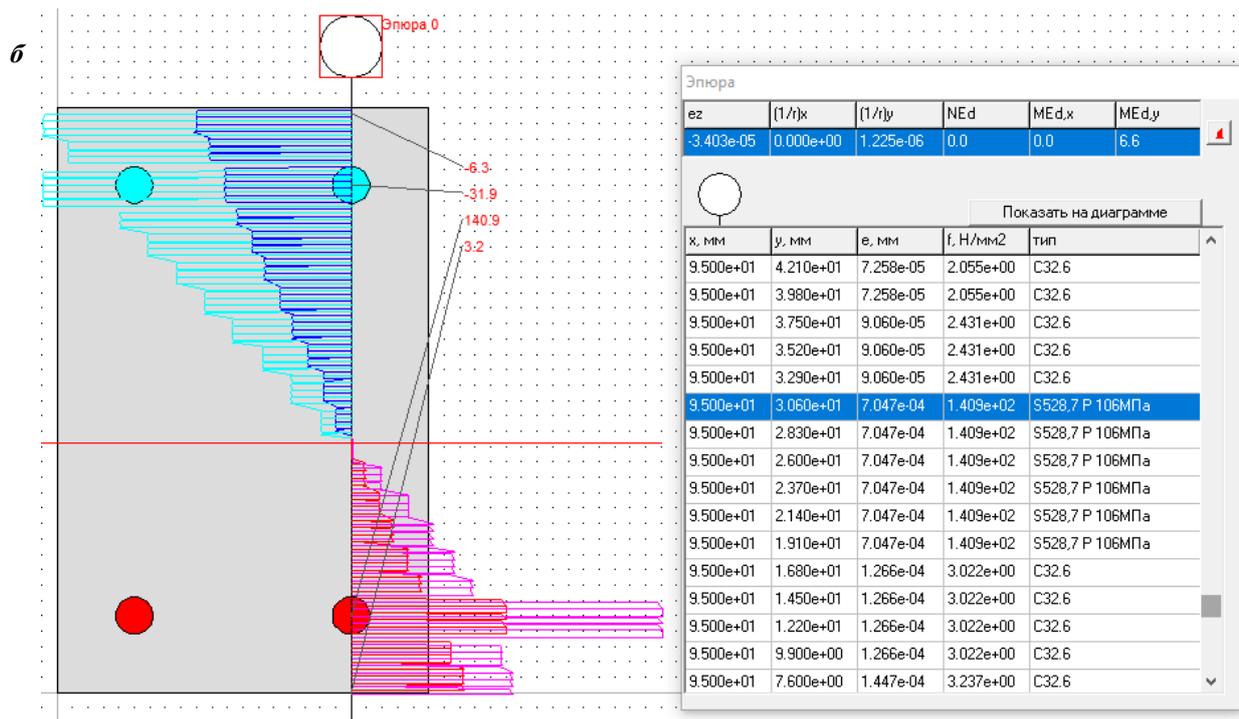


Рисунок 4. – Изменение относительных деформаций в растянутой арматуре и бетоне в зависимости от расстояния от трещины нормального отрыва при соответствующих значениях напряжения в растянутой арматуре в поперечном сечении с трещиной



а – перед образованием трещины (синим и красным цветом показано распределение по высоте поперечного сечения относительных деформаций соответственно в сжатой и растянутой зонах; голубым и розовым – аналогично, нормальных напряжений)

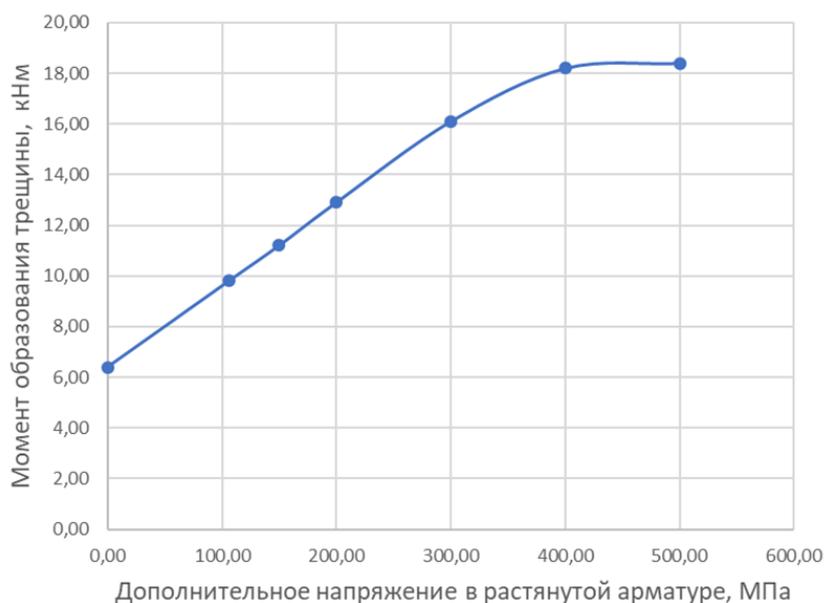
Рисунок 5. – Моделирование влияния дополнительного напряжения в арматуре на равновесное состояние участка блока балки без трещины (начало)



**б** – после приложения дополнительного усилия от взаимного сдвига бетона и арматуры (цифры на выносных линиях – нормальные напряжения в МПа) (синим и красным цветом показано распределение по высоте поперечного сечения относительных деформаций соответственно в сжатой и растянутой зонах; голубым и розовым – аналогично, нормальных напряжений)

**Рисунок 5.** – Моделирование влияния дополнительного напряжения в арматуре на равновесное состояние участка блока балки без трещины (окончание)

Важным эффектом в поперечных сечениях железобетонного элемента без трещины с дополнительным напряжением в растянутой арматуре является повышение изгибающего момента трещинообразования при увеличении нагрузки (рисунок 6) и, соответственно, повышение изгибной жесткости соседних с трещиной участков (рисунок 7). Изменения напряжения в растянутой арматуре и положения нейтральной линии в поперечном сечении с трещиной при увеличении изгибающего момента в зависимости от величины дополнительного напряжения в арматуре от сдвига представлены на рисунке 8.



**Рисунок 6.** – Зависимость изгибающего момента образования трещины от дополнительного напряжения в растянутой арматуре

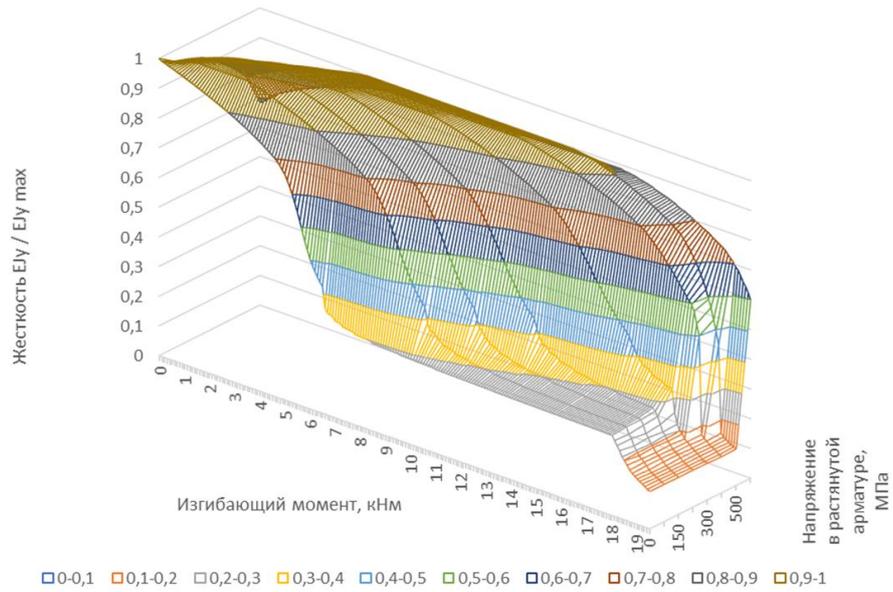
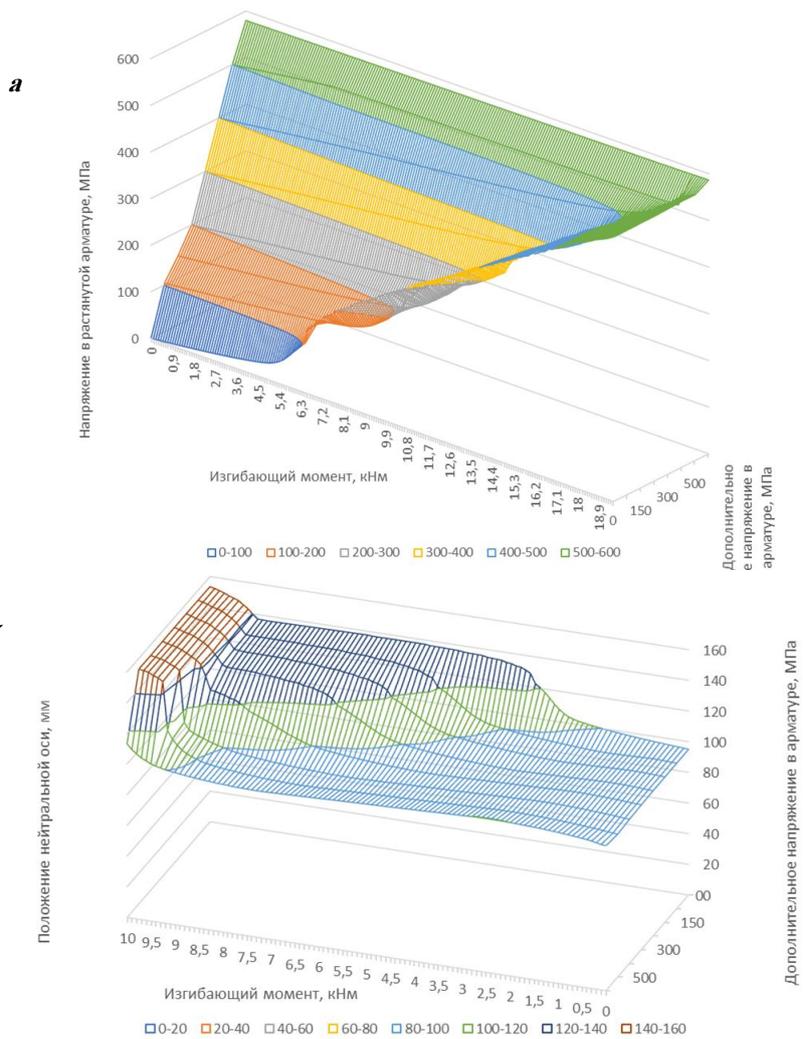


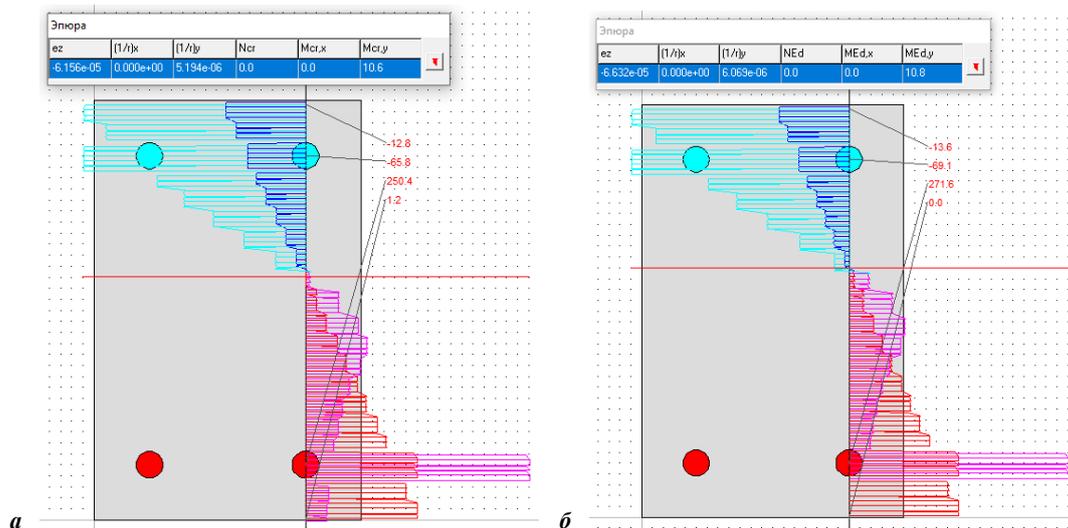
Рисунок 7. – Влияние дополнительного напряжения в растянутой арматуре в сечении с трещиной на изменение изгибной жесткости конечного элемента



**а** – напряжения в растянутой арматуре в поперечном сечении с трещиной;  
**б** – положения нейтральной оси элемента  $y_0$

Рисунок 8. – Зависимость от изгибающего момента при различных значениях дополнительного напряжения в растянутой арматуре в сечении с трещиной

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в поперечных сечениях с трещиной и по длине бетонного блока между трещинами. На рисунке 9, *а* представлены распределение относительных деформаций и напряжений в поперечном сечении, где возможно появление трещины на второй стадии трещинообразования. Трещина нормального отрыва появляется в растянутом блоке в поперечном сечении между уже имеющимися трещинами, где дополнительное напряжение в результате взаимного сдвига арматуры и растянутого бетона не равно нулю. Например, дополнительное напряжение в арматуре от ближайшей трещины 130 МПа, что соответствует изгибающему моменту перед трещинообразованием 10,6 кНм (см. рисунок 6) и суммарному напряжению в арматуре  $120,4+130=250,4$  МПа. Далее при увеличении нагрузки при изгибающем моменте 10,8 кНм появляется вторичная трещина, напряжения в арматуре в этом поперечном сечении резко возрастают до  $141,8+130=271,8$  МПа, нейтральная ось смещается в направлении сжатой зоны (рисунок 9, *б*).



*а* – перед образованием трещины в растянутом блоке между трещинами; *б* – после образования трещины; (цифры на выносных линиях – нормальные напряжения в МПа) (синим и красным цветом показано распределение по высоте поперечного сечения относительных деформаций соответственно в сжатой и растянутой зонах; голубым и розовым – аналогично, нормальных напряжений)

Рисунок 9. – Моделирование напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении изгибаемого элемента

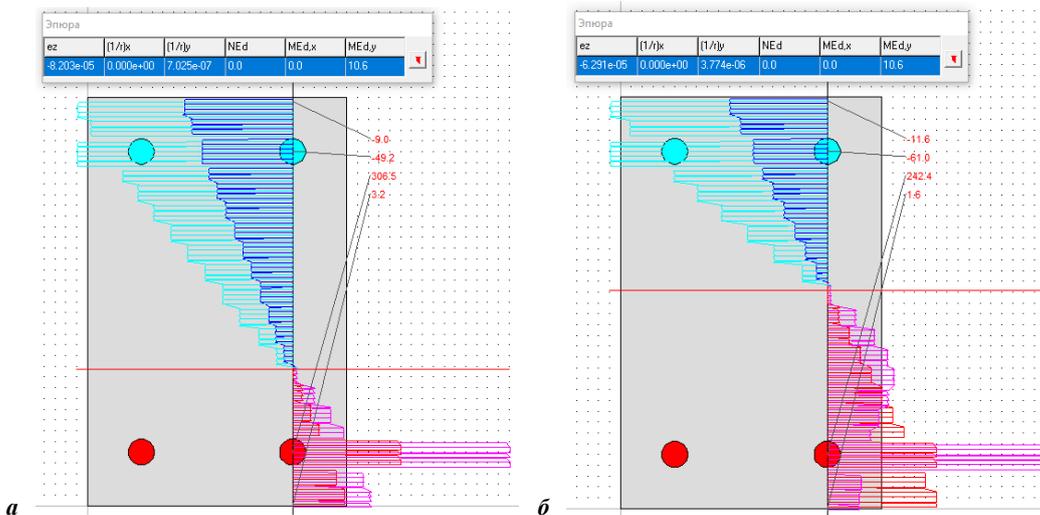
В поперечном сечении, проходящем по краю трещины, напряжения величиной 250,4 МПа в трещине за счет взаимного сдвига из-за потери сцепления арматуры и бетона становятся дополнительным напряжением (аналогично предварительному напряжению арматуры передпуском), а относительные деформации в бетоне резко уменьшаются на величину упругих деформаций до нулевых значений напряжения. В этом поперечном сечении трещины нет и не предвидится до изгибающего момента в нем 14,4 кНм (см. рисунок 6). В результате перераспределения усилий (арматура деформируется вместе в релаксирующем бетоне) напряжение в арматуре увеличилось до 306,5 МПа (рисунок 10, *а*). Увеличение напряжения в арматуре на величину  $306,5-250,4=56,1$  МПа происходит в результате сжатия (релаксации) растянутого бетонного блока после образования трещины. Такое же напряжение (306,5 МПа) и в поперечном сечении с трещиной. Если рассматривать это состояние с точки зрения моделирования работы растянутого бетона путем трансформирования диаграммы деформирования арматуры с помощью коэффициента  $\psi_s$ , то при одних и тех же относительных деформациях в арматуре напряжения больше в сечении с трещиной. Это значение напряжения (56,1 МПа) в арматуре в предлагаемой модели учитывается повышением изгибающего момента образования трещин (на арматуру передано усилие с треснувшего растянутого бетона и его релаксации до нулевых напряжений).

В поперечном сечении в середине бетонного блока между трещинами дополнительное напряжение от сдвига составляет 150 МПа и напряжения в арматуре при том же изгибающем моменте 10,6 кНм равны 242,4 МПа при отсутствии трещины (рисунок 10, *б*).

Вычислив, согласно блочной модели, дополнительные относительные деформации (напряжения) в арматуре по длине участка ее сдвига в бетоне растянутой зоны и учитывая, согласно деформационной модели, новое равновесное состояние любого поперечного сечения (в том числе и сечения с трещиной), устанавливается соответствие распределения относительных деформаций бетона и арматуры по высоте поперечных сечений гипотезе плоских сечений. Таким образом, работа растянутого железобетона с трещинами в деформационной модели поперечного сечения с трещиной моделируется без применения коэффициента  $\psi_s$ . Получив в результате расчета распределение напряжений в растянутой арматуре по длине изгибаемой железобетонной конструкции с трещинами, само значение коэффициента  $\psi_s$  для анализа участия растянутой зоны бетона в работе изгибаемого железобетонного элемента вычисляется как отношение площади эпюры напряжений арматуры на длине блока, отделенного трещинами, к площади трапециевидной эпюры с ординатами-напряжениями в поперечных сечениях с трещинами по его концам.

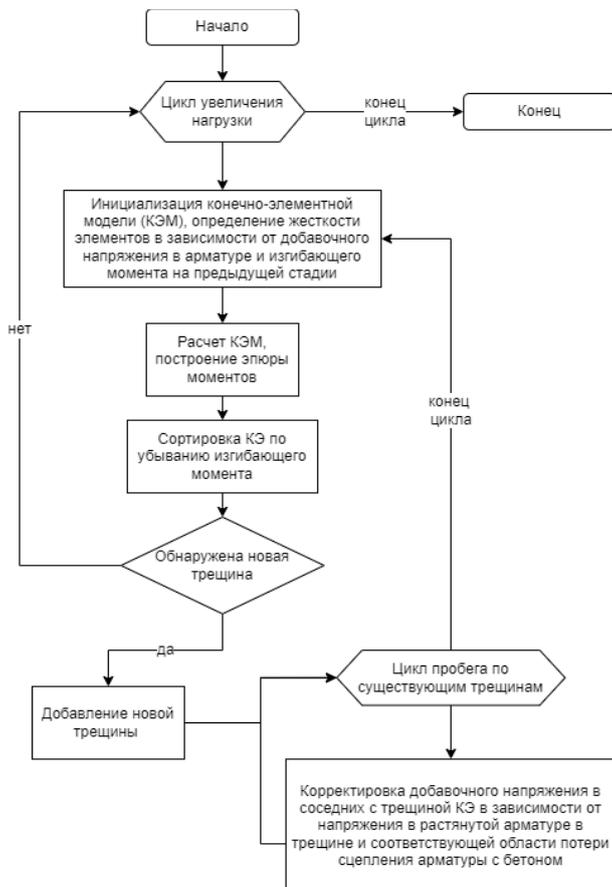
Определив, согласно деформационной модели, распределение жесткостей по длине статически неопределимой железобетонной конструкции методами строительной механики (метод конечных элементов), вычисляют распределение внутренних усилий (изгибающих моментов) и деформаций (прогибов) по ее длине. Алгоритм расчета

параметров напряженно-деформированного состояния неразрезной изгибаемой конструкции при действии нагрузки с моделированием эквивалентного равновесного состояния поперечного сечения при образовании трещины представлено на рисунке 11.



**а** – по краю трещины; **б** – в середине бетонного блока между трещинами (цифры на выносных линиях – нормальные напряжения в МПа) (синим и красным цветом показано распределение по высоте поперечного сечения относительных деформаций соответственно в сжатой и растянутой зонах; голубым и розовым – аналогично, нормальных напряжений)

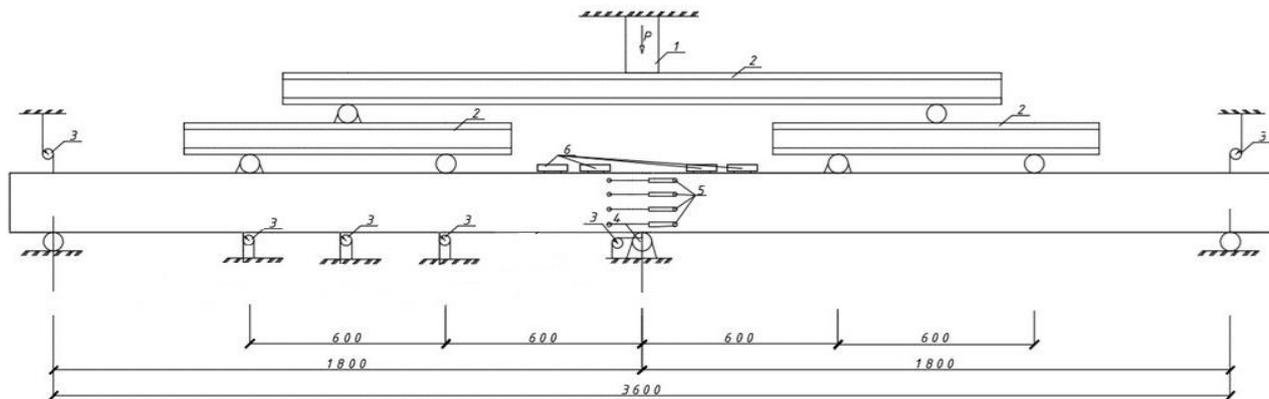
**Рисунок 10. – Моделирование напряженно-деформированного состояния изгибаемого элемента в поперечном сечении**



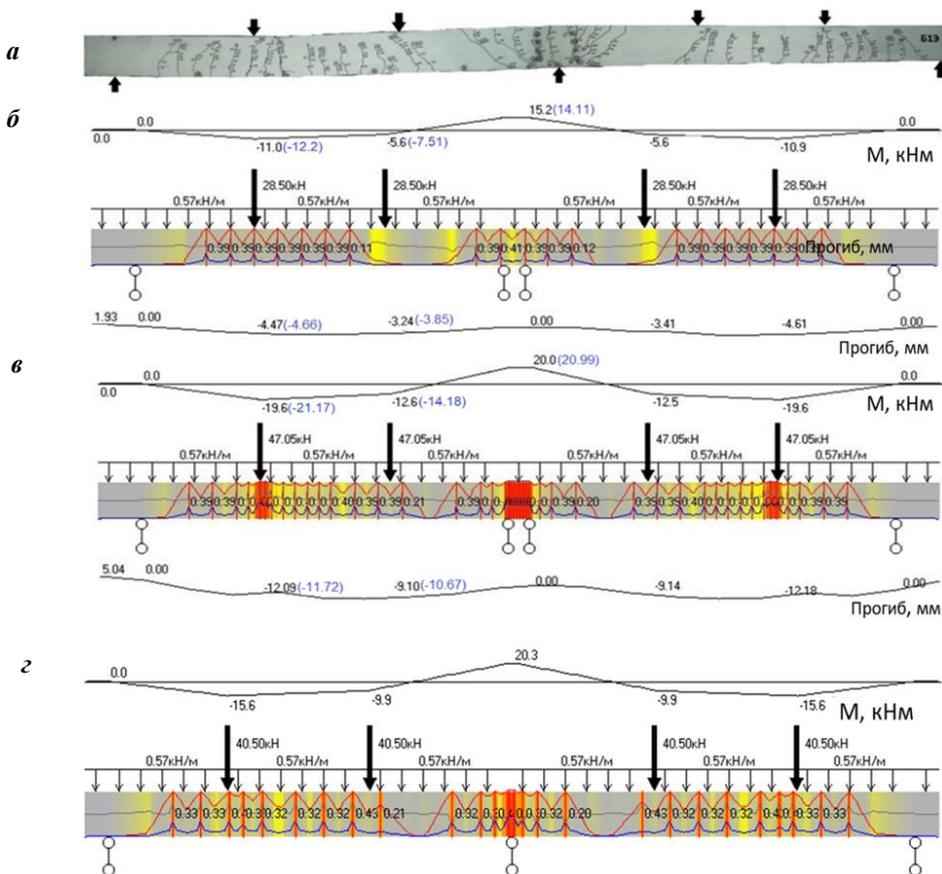
**Рисунок 11. – Алгоритм расчета параметров напряженно-деформированного состояния статически неопределимой конструкции**

**Сопоставление результатов моделирования и испытаний неразрезной железобетонной балки.** В соответствии с исходными данными была изготовлена и испытана до разрушения неразрезная железобетонная балка. Схема испытания балки приведена на рисунке 12. В процессе нагружения кратковременной нагрузкой с помощью

приборов фиксировались основные параметры железобетонной конструкции: изгибающий момент образования трещин; раскрытие трещин после их появления; прогибы; сосредоточенные усилия от внешней нагрузки, соответствующие несущей способности (прочности). Для раскрытия статической неопределенности на неразрезной опоре применялся динамометр. При вычислении распределения изгибающих моментов учитывалась разность осадок балки на неразрезной опоре и крайних опорах. Это позволило получить фактическую картину распределения экспериментальных изгибающих моментов и сопоставить с расчетными по предлагаемой методике на различных этапах нагружения. На рисунке 13 приведены: общий вид балки после разрушения; эпюры экспериментальных и расчетных изгибающих моментов при нагрузке, соответствующей несущей способности балки; расчетная модель балки перед разрушением.



1 – гидравлический домкрат; 2 – распределительная траверса; 3 – прогибомер;  
4 – образцовый динамометр; 5 – измерители деформаций; 6 – электронный инклинометр  
Рисунок 12. – Схема испытания неразрезной балки на изгиб

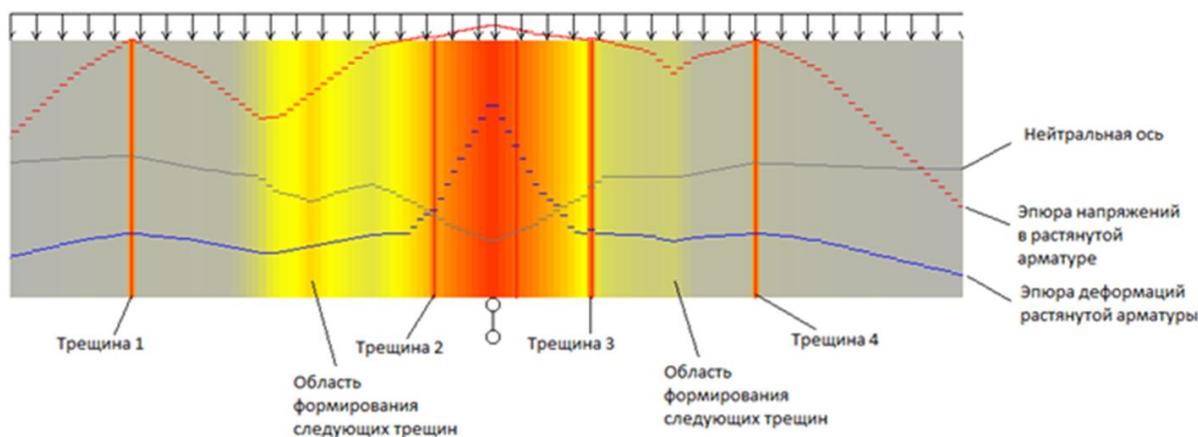


а – общий вид после разрушения; результат моделирования балки: б, в – соответственно при характеристическом значении нагрузки (28,5 кН) и перед разрушением (47,05 кН); г – перед разрушением (40,5 кН) при точечном опирании на средней опоре: эпюры расчетных (экспериментальных) изгибающих моментов (цифры в кНм), расчетная модель балки с местами трещин и шириной их раскрытия (вертикальные линии и цифры в мм), распределением относительных деформаций (синяя линия) и напряжений (красная линия) в арматуре, а также положения нейтральной линии (серая линия), прогибы балки арматуре, а также положения нейтральной линии (серая линия)

Рисунок 13. – Экспериментальная неразрезная железобетонная балка

Предложенная модель позволяет получить распределение всех параметров напряженно-деформированного состояния по длине неразрезной балки на любом этапе нагружения. Особенностью данной модели вследствие значительного шага увеличения внешней нагрузки являются несимметричные значения вычисленных параметров в двух пролетах. При появлении трещины в одном поперечном сечении в одном из пролетов балки происходит перераспределение жесткостей и, соответственно, усилий, которые перестают быть симметричными на следующем шаге увеличения нагрузки.

В предельном состоянии (перед разрушением) вблизи поперечных сечений с критическими трещинами (с максимальными изгибающими моментами на неразрезной опоре и в пролете) наблюдается резкое увеличение относительных деформаций в растянутой арматуре и близкое к равномерному распределение напряжений в арматуре по длине балки из-за нарушения сцепления с бетоном (рисунок 14). Это увеличение деформаций растянутой арматуры в поперечном сечении с критической трещиной увеличивает ширину ее раскрытия. При этом в соседних поперечных сечениях, в которых имеются трещины, происходит резкое уменьшение высоты сжатой зоны при практически тех же напряжениях в растянутой арматуре, что и в критической трещине.



**Рисунок 14. – Фрагмент расчетной модели балки у промежуточной опоры в предельном состоянии с местами трещин (вертикальные линии), распределением относительных деформаций (синяя линия) и напряжений (красная линия) в арматуре, а также положения нейтральной линии (серая линия)**

**Заключение.** На примере неразрезной двухпролетной железобетонной балки продемонстрирована возможность методического объединения деформационной и блочной модели совместно с методом конечных элементов для вычисления напряженно-деформированного состояния и параметров железобетонной конструкции в любом поперечном сечении и на любой стадии ее работы.

Расчетная схема чувствительна к деталям (моделирование площадок опирания балок, ширины зоны передачи сосредоточенных нагрузок, точность в размерах). Например, в предельном состоянии для одной и той же балки с моделью опирания на площадку шириной 100 мм (см. рисунок 13, в) и моделью с идеализованным точечным опиранием (см. рисунок 13, з) предельные значения нагрузки отличаются более чем на 10%.

Моделирование работы статически неопределимой конструкции показывает, что при увеличении нагрузки в балке идет постоянный процесс перераспределения усилий, при этом при появлении новой трещины у опоры изгибающий момент «ползет» в пролет, при появлении трещины в пролете изгибающий момент «перетекает» к опоре. Происходят «качели», чем больше трещин, тем активнее, но с меньшими амплитудами идет раскочка. Каждая новая трещина разгружает прилегающие участки за счет проскальзывания арматуры в бетоне и уменьшения жесткости и, как следствие, за счет «утекания» изгибающего момента. Это приводит к уменьшению раскрытия трещин на участках балки, разгружаемых по изгибающему моменту. Перераспределение усилий идет в конкурирующих направлениях, этот процесс не направлен в одну сторону (с опоры в пролет или наоборот).

Моделирование процесса трещинообразования статически неопределимой конструкции показало, что область трещинообразования существенно шире точечного шарнира на неразрезной опоре в моделях статически неопределимых железобетонных конструкций (рисунок 15).

В таблице 1 приведено сопоставление экспериментальных [11] и расчетных (по предлагаемой модели) параметров для неразрезной железобетонной балки с выше названными исходными данными. Максимальное значение экспериментального и расчетного прогиба, а также ширины раскрытия трещин неразрезной балки определялось при нагрузке 28,5 кН, соответствующей ее характеристическому значению.

**Таблица 1. – Сопоставление экспериментальных и расчетных параметров статически неопределимой железобетонной балки**

Наименование параметра	Опытное значение	Расчетное значение	Отношение опытного значения к расчетному
Изгибающий момент образования трещин, кНм	5,92	6,6	0,89
Сосредоточенное усилие при разрушении, кН	46,95	47,05	0,99
Максимальное значение прогиба в пролете при 28,5 кН, мм	4,66	4,61	1,01
Максимальное раскрытие трещин в пролете при 28,5 кН, мм	0,33	0,39	0,82
Максимальное раскрытие трещин на опоре при 28,5 кН, мм	0,35	0,41	0,85

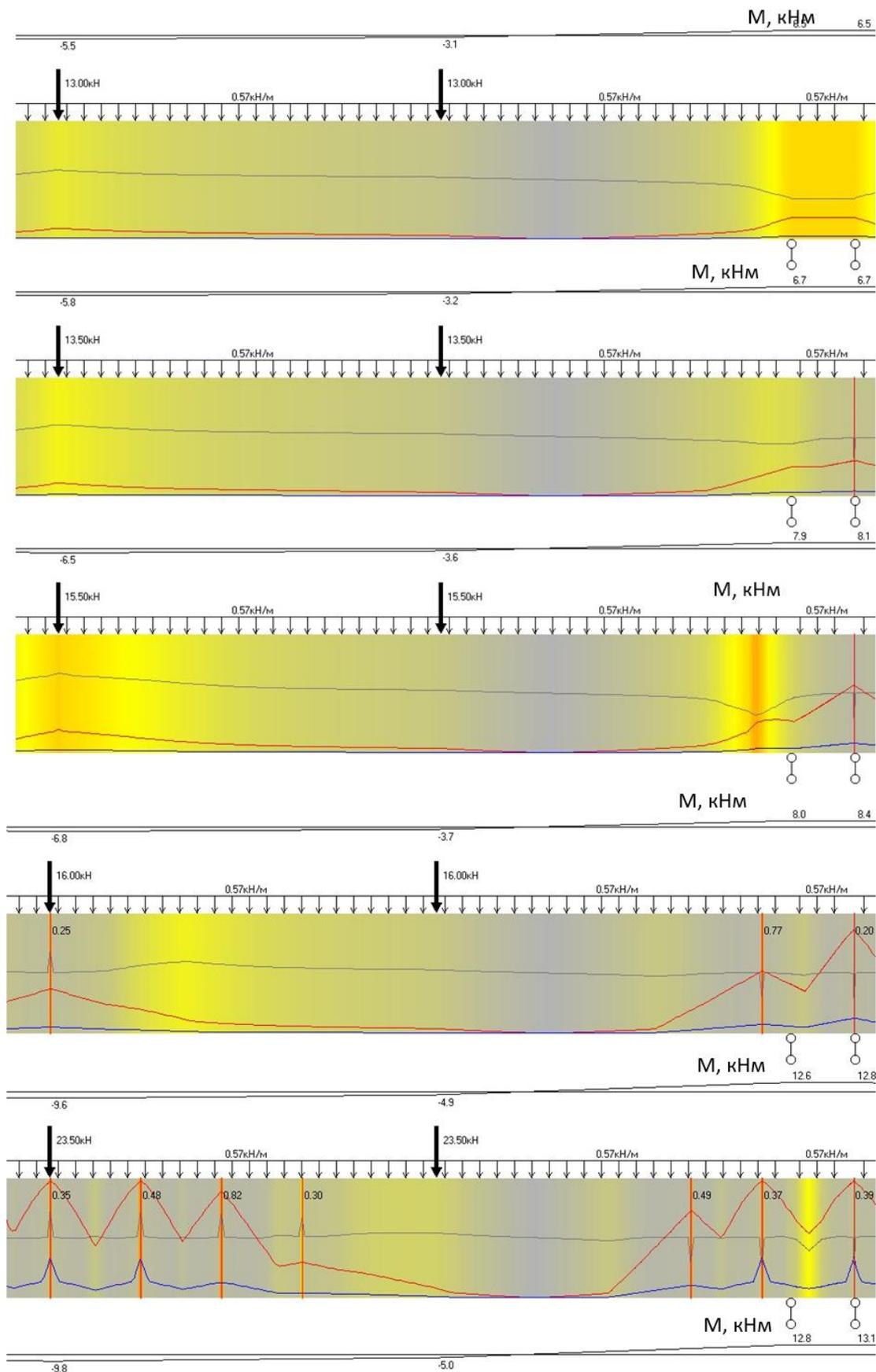
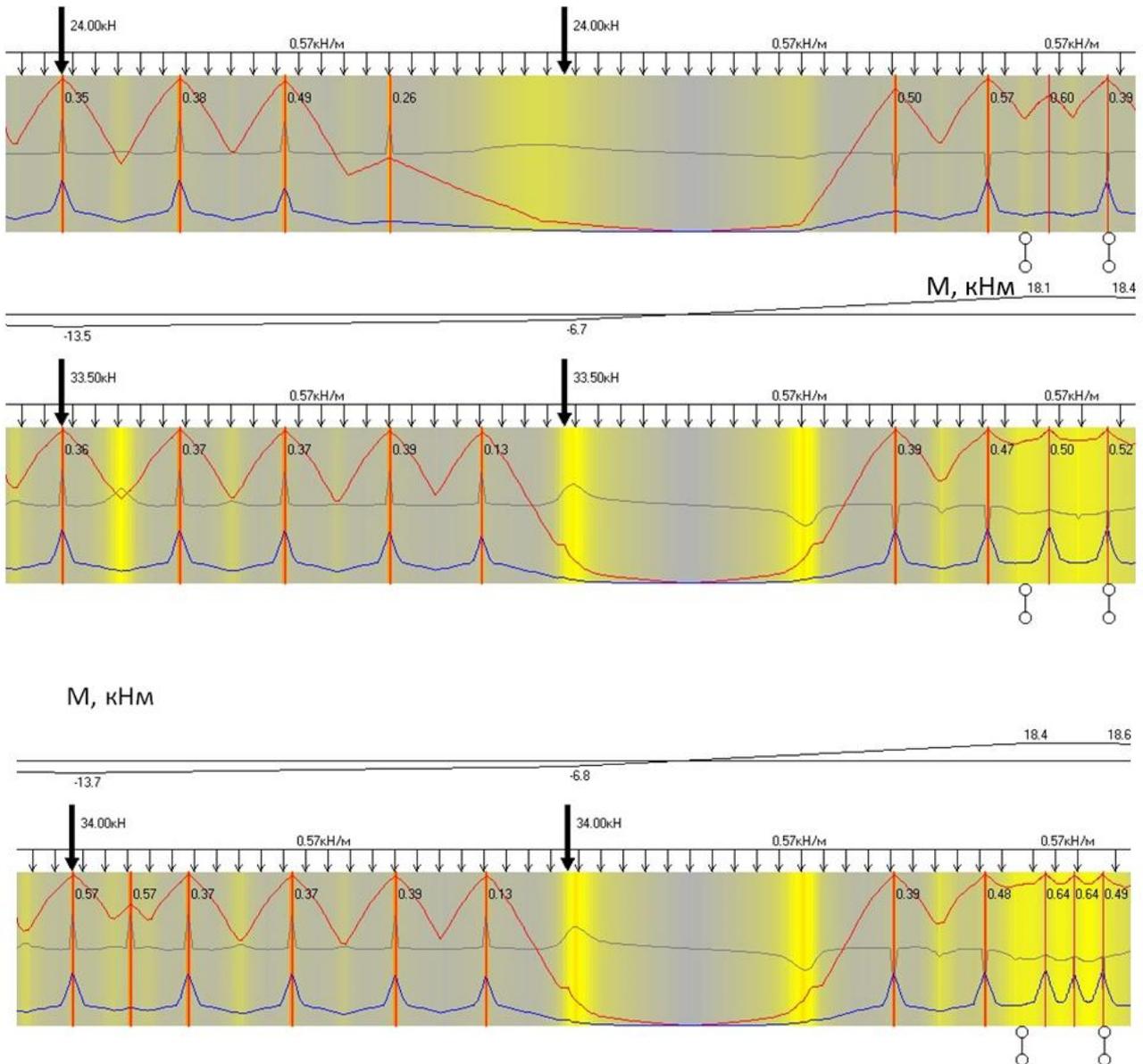


Рисунок 15. – Фрагмент модели неразрезной железобетонной балки с критическими трещинами и шириной их раскрытия (вертикальные линии и цифры в мм), эпюрами экспериментальных и расчетных изгибающих моментов, распределением относительных деформаций (синяя линия) и напряжений (красная линия) в арматуре, а также положения нейтральной линии (серая линия) (начало)



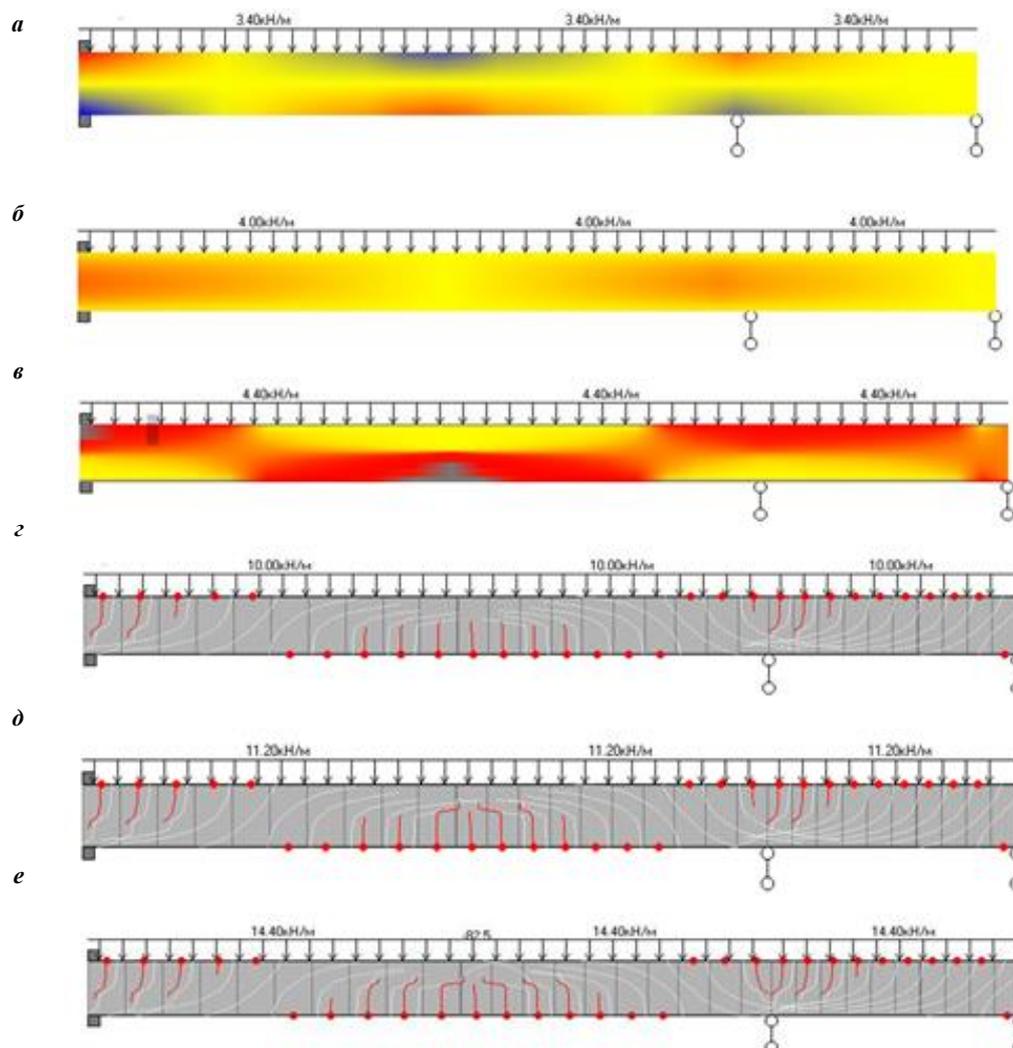
**Рисунок 15. – Фрагмент модели неразрезной железобетонной балки с критическими трещинами и шириной их раскрытия (вертикальные линии и цифры в мм), эпюрами экспериментальных и расчетных изгибающих моментов, распределением относительных деформаций (синяя линия) и напряжений (красная линия) в арматуре, а также положения нейтральной линии (серая линия) (окончание)**

Сопоставление основных параметров неразрезной железобетонной балки: изгибающего момента образования трещин; раскрытия трещин после их появления; прогибов; сосредоточенных усилий, соответствующих несущей способности (прочности), свидетельствует об их удовлетворительной сходимости.

Предложена модель учета работы растянутого бетона между трещинами наложением дополнительного напряжения в арматуре, обусловленного возникшей разностью относительных деформаций между растянутой арматурой и бетоном при образовании трещины, что приводит к новому равновесному состоянию поперечного сечения под нагрузкой.

Определены направления дальнейших исследований (рисунок 16):

- объединение модели нормального и наклонного сечения. Исследования показали, что модель сечения, нормального к продольной оси – частный случай более полной модели наклонного сечения.
- расчет по конечно-элементной модели с получением полей распределения всех параметров напряженно-деформированного состояния (нормальные и продольные деформации и напряжения, главные сжимающие и растягивающие напряжения и деформации, углы поворота элементарных площадок, направления развития трещин, в том числе в зонах действия поперечных усилий у опор).



**Рисунок 16.** – Распределение в расчетной модели балки полей нормальных напряжений (*a*); касательных напряжений (*б*); углов поворота сечений (*в*); траектории трещин при различной величине нагрузки (*г, д, е*)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев, А.А. О пересмотре способов расчета железобетонных конструкций и о первых его результатах / А.А. Гвоздев. – М. ; Л. : Госстройиздат, 1934. – 49 с.
2. Мурашев, В.И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона / В.И. Мурашев. – М. : Машстройиздат, 1950. – 268 с.
3. Bortolotti, L. First Cracking Load of Concrete Subjected to Direct Tension / L. Bortolotti // *ACI Materials Journal*. – 1991. – Vol. 88, № 1. – P. 70–73.
4. Тур, В.В. Прочность и деформации бетона в расчетах конструкций : моногр. / В.В. Тур, Н.А. Рак. – Брест : БГТУ, 2003. – 252 с.
5. Немировский, А.М. Исследование напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов с учетом работы растянутого бетона над трещинами и пересмотр на этой основе теории расчета деформаций и раскрытия трещин / А.М. Немировский // *Прочность и жесткость железобетонных конструкций* : сб. тр. / под ред. А.А. Гвоздева. – М. : Стройиздат, 1968. – С. 152–173.
6. Лазовский, Д.Н. Усиление железобетонных конструкций эксплуатируемых строительных сооружений / Д.Н. Лазовский. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 1998. – 240 с.
7. Westergaard, H.M. Computation of Stresses in Bridge Slabs Due to Wheel Loads / H.M. Westergaard // *Public Roads*. – 1930. – Vol. 11, № 1. – P. 1–23.
8. Croce, P. Numerical Simulation of the Behavior of Cracked Reinforced Concrete Members / P. Croce, P. Formichi // *Materials Sciences and Applications*. – 2014. – № 5. – P. 883–894.
9. Lowes, L.N. Concrete-Steel Bond Model for Use in Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures / L.N. Lowes, J.P. Moehle, S. Govindjee // *ACI Structural Journal*. – 2004. – Vol. 101, iss. 4. – P. 501–511.
10. Холмянский, М.М. Бетон и железобетон: Деформации и прочность / М.М. Холмянский. – М. : Стройиздат, 1997. – 569 с.
11. Гиль, А.И. Результаты экспериментальных исследований сопротивления изгибу статически неопределимых железобетонных балок с комбинированным армированием растянутой зоны опорного сечения / А.И. Гиль // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Стр.-во. Прикладные науки*. – 2021. – № 16. – С. 58–64.

## REFERENCES

1. Gvozdev, A.A. (1934). *O peresmotre sposobov rascheta zhelezobetonnykh konstruksii i o pervykh ego rezul'tatakh*. Moscow; Leningrad: Gosstroizdat. (In Russ.).
2. Murashev, V.I. (1950). *Treshchinoustoichivost', zhestkost' i prochnost' zhelezobetona*. Moscow: Mashstrojizdat. (In Russ.).
3. Bortolotti, L. (1991). First Cracking Load of Concrete Subjected to Direct Tension. *ACI Materials Journal*, 88 (1), 70–73.
4. Tur, V.V. & Rak, N.A. (2003). *Prochnost' i deformatsii betona v raschetakh konstruksii*. Brest: BGU. (In Russ.).
5. Nemirovskii, A.M. (1968). Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zhelezobetonnykh elementov s uchedom raboty rastyanutogo betona nad treshchinami i peresmotr na etoi osnove teorii rascheta deformatsii i raskrytiya treshchin. In A.A. Grozdeva (Eds.) *Prochnost' i zhestkost' zhelezobetonnykh konstruksii: sb. tr.* (152–173). Moscow: Stroizdat. (In Russ.).
6. Lazovskii, D.N. (1998). *Usilenie zhelezobetonnykh konstruksii ekspluatiruemyykh stroitel'nykh sooruzhenii*. Novopolotsk: Polots. gos. un-t. (In Russ.).
7. Westergaard, H.M. (1930). Computation of Stresses in Bridge Slabs Due to Wheel Loads. *Public Roads*, 11 (1), 1–23.
8. Croce, P. & Formichi, P. (2014). Numerical Simulation of the Behavior of Cracked Reinforced Concrete Members. *Materials Sciences and Applications*, (5), 883–894.
9. Lowes, L.N., Moehle, J.P. & Govindjee, S. (2004). Concrete-Steel Bond Model for Use in Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures. *ACI Structural Journal*, 101 (4), 501–511.
10. Kholmyanskii, M.M. (1997). *Beton i zhelezobeton: Deformatsii i prochnost'*. Moscow: Stroizdat. (In Russ.).
11. Gil', A.I. (2021). Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy soprotivleniya izgibu staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh balok s kombinirovannym armirovaniem rastyanutoi zony opornogo secheniya [Results of experimental research of bending resistance of statically indeterminate reinforced concrete beams with combined reinforcement of the stretched zone of the support section]. *Vestn. Polots. gos. un-ta. Ser. F, Str-vo. Prikladnye nauki [Vestnik of Polotsk State University. Part F, Constructions. Applied Sciences]*, (16), 58–64. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 10.10.2022

### COMPUTATIONAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF STATICALLY INDETERMINATE REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

**D. LAZOUSKI, D. GLUHAU, Y. LAZOUSKI, A. HIL**  
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

*The article combines methods for calculating the main resistance parameters of reinforced concrete structures: a deformation calculation model of the cross section based on diagrams of concrete and reinforcement deformation, a block model based on the law of reinforcement adhesion with concrete and a finite element method for calculating internal forces. Using the example of a continuous beam, the possibility of calculating the parameters of the stress-strain state in any cross-section, at any stage of the construction, avoiding the use of empirical dependencies, is shown.*

*A simulation of the work of reinforced concrete with cracks during bending is performed. An algorithm is presented for calculating the parameters of the stress-strain state of an uncut bent structure under the action of a load with modeling of the equivalent equilibrium state of the cross section during crack formation. Comparison of experimental and calculated parameters of a statically indeterminate reinforced concrete beam is performed. The directions of further research are determined.*

**Keywords:** *resistance of reinforced concrete, deformation model, block model, finite element method, continuous beam, stress-strain state.*