УДК 528.3

ОБОСНОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ПОЛЮСНЫМ МЕТОДОМ

канд. техн. наук, доц. С.Д. КРЯЧОК;
Л.С. МАМОНТОВА; Ю.В. ЩЕРБАК
(Черниговский национальный технологический университет, Украина)

Обоснована точность определения площадей земельных участков полюсным методом. Получена обобщенная формула расчета средней квадратической погрешности площади по результатам измерений в полюсной сети, проложенной по границам участка, с полюсом, расположенным в средине сети. Формула конкретизирована для полюсных сетей в виде треугольника, прямоугольника, квадрата и пятиугольника с равными сторонами и полюсом, расположенным в центре участка. Приведены примеры расчета точности площадей земельных участков, полученных полюсным методом.

Ключевые слова: *площадь земельного участка, точность определения площади, полюсная геодезическая сеть.*

Применение полюсного метода для определения площадей земельных участков (рисунок 1) выполняется для фигуры в виде замкнутой ломаной линии, называемой ходовой линией [1]. Центром фигуры является полюс P. В сети проводят измерения базиса b и горизонтальных углов β_i. . Имея известные координаты начального пункта и дирекционный угол одного из направлений, можно определить координаты остальных пунктов сети. Для этого по теореме синусов вычисляют длины сторон треугольников и определяют дирекционные углы сторон ходовой линии. Существуют полюсные сети в виде спирали треугольников [1].

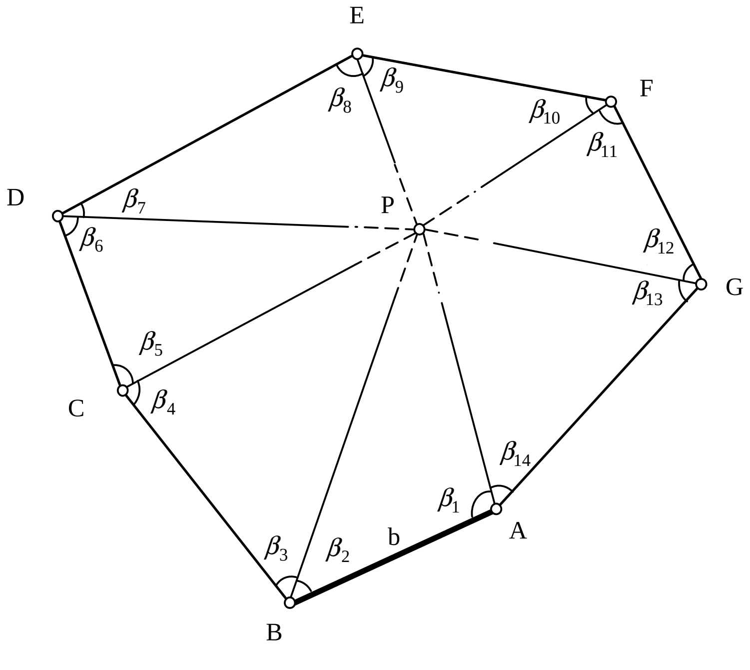


Рисунок 1. – Схема полюсной сети

Для построения плановой геодезической сети полюсным методом необходимо на местности выбрать полюс P (крест церкви, молниеотвод заводской трубы, телевизионную (радио) антенну, антенну сотовой связи, опору ЛЭП или другие высотные сооружения). Расстояния от точек ходовой линии до полюса не должны превышать 2 км [1]. Пункты закрепляют так, чтобы была видимость на заднюю и переднюю точки ходовой линии и полюс, а измеренные горизонтальные углы были в пределах от 30 до 150° [1].

Анализ существующих классических методов построения плановых геодезических сетей позволяет сделать следующие *выводы*: преимущество полигонометрии в том, что ходы прокладывают по удобному маршруту, однако необходимо проводить измерения всех длин линий между пунктами сети; преимуществом триангуляции является то, что ее сеть не нуждается в линейных измерениях, кроме одной или нескольких базисных сторон, но недостаток ее в том, что в каждом пункте нужно измерять от трех и более направлений [1] .

В полюсном методе объединены положительные особенности [1]:

- в полигонометрии – закрепление пунктов на удобном маршруте с учетом условий местности;
- в триангуляции – принцип определения длин сторон по теореме синусов, без дополнительных измерений в полевых условиях;
- в угловых засечках – измерение только двух углов в каждом треугольнике.

Исследовательская часть. Неисследованной частью является расчет точности определения площадей земельных участков полюсным методом. С этой целью предложены следующие подходы.

Пусть ходовая линия полюсной сети имеет форму треугольника (рисунок 2). Земельные участки такой формы – редкость. Например, в центре участка расположена высокая мачта, а в точках A, B, C находятся ее растяжки. Это одна из самых простых фигур, с которой стоит начать исследования точности определения площадей земельных участков.

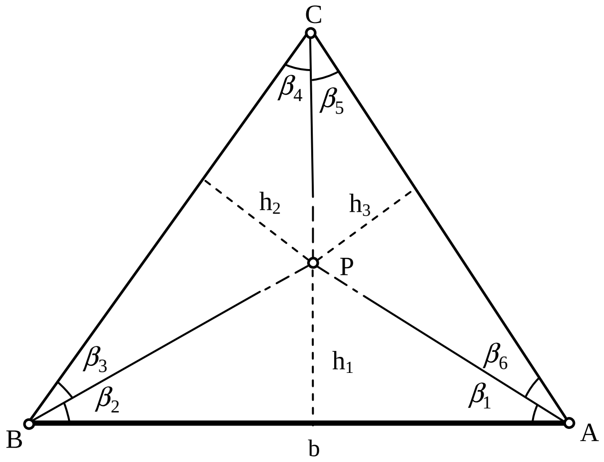


Рисунок 2. – Полюсная сеть в форме треугольника

Площади треугольников ABP, BCP, ACP (см. рисунок 2) равны соответственно

$$S_1 = \frac{b \cdot h_1}{2} = \frac{b \cdot AP \sin \beta_1}{2} = \frac{b^2 \sin \beta_1 \sin \beta_2}{2 \sin(\beta_1 + \beta_2)}, \tag{1}$$

$$S_2 = \frac{b^2 \sin^2 \beta_1 \sin \beta_3 \sin(\beta_3 + \beta_4)}{2 \sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_4}, \tag{2}$$

$$S_3 = \frac{b^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin \beta_5 \sin(\beta_5 + \beta_6)}{2 \sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin \beta_6}.. \tag{3}$$

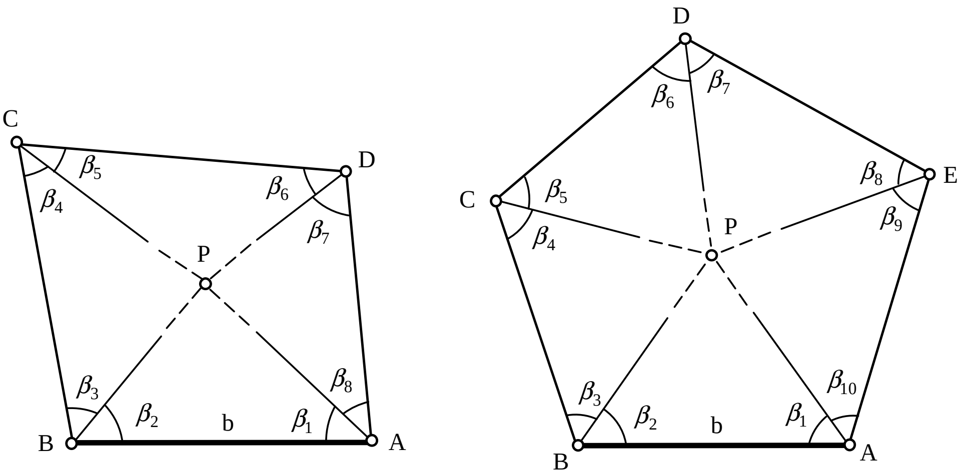
Площадь всей фигуры равна

$$P_3 = S_1 + S_2 + S_3. \tag{4}$$

На рисунке 3 показаны полюсные сети в форме четырехугольника и пятиугольника.

Общая площадь пятиугольника равна

$$P_5 = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin \beta_3 \sin(\beta_3 + \beta_4)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_4} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin \beta_5 \sin(\beta_5 + \beta_6)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin \beta_6} \right. +$$
$$\left. + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_5 \sin \beta_7 \sin(\beta_7 + \beta_8)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_6 \sin \beta_8} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_5 \sin^2 \beta_7 \sin \beta_9 \sin(\beta_9 + \beta_{10})}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_6 \sin^2 \beta_8 \sin \beta_{10}} \right]. \tag{5}$$



а *б*

Рисунок 3. – Полюсная сеть в форме: *а* – четырехугольника; *б* - пятиугольника

Сравнение формул (1)–(5) позволяет установить закономерность определения площадей любых многоугольников.

Кроме того, из рисунка 3, *а* видно, что треугольник ABP тоже образует треугольную полюсную сеть, два треугольника ABP и BCP образуют четырехугольную полюсную сеть. В этом случае полюс P находится на пункте ходовой линии (на границе участка). Такие построения могут иметь место. В этом случае необходимо определить по одной стороне в первом и последнем треугольниках.

Для вычисления средней квадратичной погрешности (СКП) определения площади участка по результатам измерений полюсным методом необходимо найти частные производные площади по отдельным аргументам, используя выражение (5):

$$\frac{dP_n}{db} = 2P_n \frac{1}{b}, \quad (6)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_1} = (S_1 + 2S_2 + ... + 2S_n)[ctg(\beta_1 + \beta_2) - ctg\beta_1], \quad (7)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_2} = (S_1 + 2S_2 + ... + 2S_n)ctg(\beta_1 + \beta_2) - S_1 ctg\beta_2, \quad (8)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_3} = S_2 ctg(\beta_3 + \beta_4) + (S_2 + 2S_3 + ... + 2S_n)ctg\beta_3, \quad (9)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_4} = S_2 ctg(\beta_3 + \beta_4) - (S_2 + 2S_3 + ... + 2S_n)ctg\beta_4, \quad (10)$$

...

$$\frac{dP_n}{d\beta_{(2i-1)}} = S_i ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i}) + (S_i + 2S_{i+1} + ... + 2S_n)ctg\beta_{(2i-1)}, \quad (11)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_{2i}} = S_i ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i}) - (S_i + 2S_{i+1} + ... + 2S_n)ctg\beta_{2i}, \quad (12)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_{2n-1}} = S_n ctg(\beta_{2n-1} + \beta_{2n}) + S_n ctg\beta_{2n-1}, \quad (13)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_{2n}} = S_n ctg(\beta_{2n-1} + \beta_{2n}) - S_n ctg\beta_{2n}. \quad (14)$$

Необходимо учесть корреляционные связи между четными и нечетными номерами горизонтальных улов, расположенных при каждой точке ходовой линии (см. рисунок 2, рисунок 3). Такие углы измеряются способом круговых приемов. В этом случае коэффициент корреляции равен −0,5 [2].

Поскольку не удалось значительно упростить общую формулу по определению СКП площади полюсным методом, то она приводится в таком виде:

$$m_{P_n}^2 = 4P_n^2 \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{dP_n}{d\beta_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dP_n}{d\beta_{2i}}\right)\left(\frac{dP_n}{d\beta_{2i+1}}\right)\right], \quad (15)$$

где P_n − площадь полюсной сети, состоящая из *n* треугольников; m_b − СКП определения длины базиса *b*, m_β − СКП измерения горизонтальных углов, $\rho = 206265''$, i – текущий номер угла.

Упростить формулу (15) можно для фигур с равными сторонами и полюсом P, находящимся в центре фигуры (см. рисунок 2). Тогда внутренние треугольники будут равнобедренными. Так как сумма внутренних углов многоугольника равна $180°\,(n-2)$, а число измеренных углов в полюсной сети равно $2n$, то величина каждого угла составит

$$\beta = \frac{180^{\circ}(n-2)}{2n}. \tag{16}$$

Тогда для полюсной сети в форме треугольника $\beta = 30°$, $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta = 60°$, а $ctg30° = \sqrt{3}$, $ctg60° = \sqrt{3}/3$. Площади внутренних треугольников $S_1 = S_2 = S_3 = S = P_3/3$. Тогда формула (15) для равносторонней треугольной полюсной сети с полюсом, расположенным в центре сети, упростится

$$m_{P_3} = \sqrt{4P_3^2\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{320}{3}S^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2}} = 2P_3\sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{80}{27}\cdot\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \tag{17}$$

Земельные участки во многих случаях имеют форму прямоугольника, или конфигурацию границ, близкую к нему. Поэтому стоит остановиться на прямоугольной полюсной сети (рисунок 4) с размерами сторон ходовой линии a и b. Для дальнейших рассуждений необходимо ввести коэффициент удлинения k, характеризующий отступление прямоугольника от квадрата ($b > a$):

$$k = \frac{b}{a}. \tag{18}$$

Из рисунка 4 видно, что

$$ctg\beta_1 = \frac{b}{a} = k, \tag{19}$$

$$ctg\beta_2 = \frac{a}{b} = \frac{1}{k}. \tag{20}$$

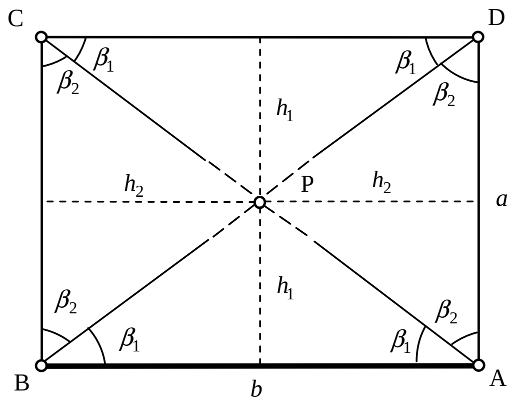


Рисунок 4. – Полюсная сеть в форме прямоугольника

Известно, что

$$ctg2\beta = \frac{ctg^2\beta - 1}{2ctg\beta}. \tag{21}$$

Тогда с учетом формул (19)−(21) $ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i})$ в формулах частных производных (7)−(14) будут равны

$$ctg2\beta_1 = \frac{k^2-1}{2k}, \tag{22}$$

$$ctg2\beta_2 = \frac{1-k^2}{2k}. \tag{23}$$

Площади внутренних треугольников (см. рисунок 4), образованных сторонами прямоугольника и направлениями на полюс, с учетом коэффициента удлинения k равны

$$S = S_i = \frac{b\cdot h_1}{2} = \frac{a\cdot h_2}{2} = \frac{a^2k}{4}. \tag{24}$$

Тогда значения частных производных по измеренным углам прямоугольной полюсной сети составят

$$\frac{dP_4}{d\beta_1}=\frac{7a^2(k^2+1)}{8}, \quad (25) \qquad \frac{dP_4}{d\beta_5}=\frac{a^2(7k^2-1)}{8}, \quad (29)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_2}=\frac{a^2(-5k^2+7)}{8}, \quad (26) \qquad \frac{dP_4}{d\beta_6}=\frac{-a^2(5k^2+1)}{8}, \quad (30)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_3}=\frac{a^2(-k^2+11)}{8}, \quad (27) \qquad \frac{dP_4}{d\beta_7}=\frac{a^2(-k^2+3)}{8}, \quad (31)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_4}=\frac{-a^2(k^2+9)}{8}, \quad (28) \qquad \frac{dP_4}{d\beta_8}=\frac{-a^2(k^2+1)}{8}. \quad (32)$$

С учетом формул (15), (25)−(32) и значения площади прямоугольника $P_П=a^2k$ $\left(a=\sqrt{\frac{P_П}{k}}\right)$ СКП площади полюсной сети в форме прямоугольника и полюсом в центре сети определяется по формуле

$$m_П=P_П\sqrt{4\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_\beta^2}{64\rho^2}\left(156k^2+168+\frac{236}{k^2}\right)}. \quad (33)$$

Поскольку существует ограничение на величины улов $\beta\le 30°$, то значение коэффициента удлинения не должно превышать значения $k=ctg30°=\sqrt{3}$.

Для полюсной сети в форме квадрата $(k=b/a=a/a=1)$ из формулы (33) следует значение СКП определения площади:

$$m_K=a^2\sqrt{4\frac{m_a^2}{a^2}+8,75\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}=P_K\sqrt{4\frac{m_a^2}{P_K}+8,75\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (34)$$

Для полюсной сети с пятью равными сторонами ходовой линии и полюсом в центре сети (см. рисунок 3, б) величина угла по формуле (16) для $n=5$ составит $\beta=54°$, а $ctg54°=0,7265$, $ctg(2\cdot 54°)=-0,3249$. В этом случае и для одинаковых по величине площадей внутренних треугольников $S_i=S$, СКП определения площади по формуле (15) составит

$$m_{P_5}=\sqrt{4P_5^2\frac{m_b^2}{b^2}+211,2S^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (35)$$

Подсчитано, что вклад коррелированных членов в формуле (35) в коэффициент 211,2 составляет всего 18,8. Тогда остаточный коэффициент равен 192,4. Процент отвергнутой части коэффициента по отношению к сохраненной составил $(18,8/192,4)\cdot 100\,\%$ = 9,8%. Понятно, что с учетом этого обстоятельства, можно утверждать, что для $S=P_5/5$ формула (35) будет иметь вид

$$m_{P_5}\approx\sqrt{4P_5^2\frac{m_b^2}{b^2}+192,4\cdot S^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}=P_5\sqrt{4\frac{m_b^2}{b^2}+7,696\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}m_{P_5}\approx\sqrt{4P_5^2\frac{m_b^2}{b^2}+192,4\cdot S^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}=P_5\sqrt{4\frac{m_b^2}{b^2}+7,696\frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (36)$$

Для полюсной сети в виде треугольника с равными сторонами ходовой линии и полюсом в центре сети вклад коррелированных членов в значение названного коэффициента составляет 43%.

Таким образом, увеличение числа сторон ходовой линии ведет к уменьшению процента вклада коррелированных членов в слагаемое формулы для расчета СКП площади, который отвечает за точность измерения горизонтальных углов полюсной сети. Поэтому формулу (15) можно представить в сокращенном виде, что соответствует точности определения площади полюсного построения, начиная с пятиугольника:

$$m_{P_n}^2\approx 4P_n^2\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{dP_n}{d\beta_i}\right)^2\right]. \quad (37)$$

Рассмотрим применение полученных формул для определения СКП площадей полюсных сетей.

Пусть имеется земельный участок площадью 2,0 гектара для ведения личного крестьянского хозяйства [3]. В случае, когда участок имеет форму квадрата, его сторона составит $a=\sqrt{20000}\approx 141$ м.

Если для определения длины базиса применить топографический светодальномер СТ-5 «Блеск» и теодолит 3Т5КП, то $m_a = 10$ мм + 5 мм 0,141 = 10,7 мм, а $m_\beta = 5''$. По формуле (34) $m_K = 3{,}4$ м^2.

Согласно [4], учетной единицей площади в сельской местности является 100 м^2. Тогда для доверительной вероятности $P = 0{,}95$ погрешность определения указанной площади полюсным методом составит $\Delta P = 2m_K = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$ м, что значительно меньше приведенной учетной единицы.

Если участок имеет форму прямоугольника, для предельного значения $k = \sqrt{3}$, длины базиса $b = ka = k \cdot \sqrt{P_П / k} = \sqrt{kP_П} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 20000} = 186{,}1$ м, $m_b = 10$ мм + 5 мм·0,186 = 10,93 мм, по формуле (33) значения СКП площади участка составит $m_П = 2{,}8$ м^2.

Для пятиугольника с равными сторонами и полюсом в центре сети площадь отдельного треугольника равна $S = P_5/5$. С другой стороны, площадь отдельного треугольника полюсной сети с равными сторонами b ходовой линии и полюсом в центре сети составит следующую величину:

$$S = \frac{b}{2}h = \frac{b^2}{4}tg\beta, \tag{38}$$

а сторона ходовой линии

$$b = 2\sqrt{\frac{S}{tg\beta}}. \tag{39}$$

Для $n = 5$ из (16) $\beta = 54°$, а из (39) для $S = P_5/5$ длина базиса $b = 107{,}8$ м.

Тогда $m_b = 10$ мм + 5 мм·0,108 = 10,54 мм, и для $P = 20000$ м^2 согласно (36) $m_{P_5} = 4{,}1$ м^2.

Для полюсной сети в форме треугольника с полюсом в центре сети: из (16) угол $\beta = 30°$, сторона ходовой линии для $S = P_3/3$ и $P = 20000$ м^2; из (39) $b = 214{,}9$ м^2; $m_b = 10$ мм + 5 мм·0,2149 = 11,07 мм; из (17) $m_{P_3} = 2{,}7$ м^2.

Заключение. На основании проведенного исследования *получена обобщенная формула расчета* средней квадратической погрешности площади земельного участка по результатам измерений в полюсной сети в виде многоугольника с полюсом, расположенным в средине сети. *Формула конкретизирована для полюсных сетей* в виде треугольника, прямоугольника, квадрата и пятиугольника с равными сторонами и полюсом, расположенным в центре участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романчук, С.В. Геодезія: навчальний посібник / С.В. Романчук, В.П. Кирилюк, М.В. Шемякін. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 296 с.
2. Войтенко, С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навчальний посібник / С.П. Войтенко. – К. : КНУБА, 2003. – 216 с.
3. Земельний кодекс України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://urist-ua.net/кодекси/земельний_кодекс_україни/.
4. Барановський, В.Д. Топографо-геодезичне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Визначення площ територій / В.Д. Барановський, Ю.О. Карпінський, А.А. Ляшенко ; за заг. ред. Ю.О. Карпінського. – К. : НДІГК, 2009. – 92 с.

Поступила 07.08.2019

JUSTIFICATION OF ACCURACY FOR DETERMINATION OF AREA OF LAND PLOTS BY THE POLAR METHOD

S. KRYACHOK, L. MAMONTOVA, Y. SHCHERBAK

The substantiation of the accuracy of determining the areas of land plots by the pole method was performed. A generalized formula for calculating the mean square error of the area was obtained from measurements in a pole network. The pole network is laid along the boundaries of the plot. The pole is located in the middle of the network. The formula clarified for pole networks in the form of a triangle, a rectangle, a square and a pentagon with equal sides and a pole located in the center of the plot. Examples of calculating the accuracy of land areas obtained by the pole method are given.

Keywords: *land area, area accuracy, pole geodetic network.*