УДК 528.63

АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ НА ОСНОВЕ РАЗНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДАННЫХ

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЕВ, А.С. ИВАШНЁВА
(Полоцкий государственный университет)

В геодезии часто возникает необходимость замены одной координатной системы на другую. На сегодняшний день в связи с ростом количества и качества информации и необходимостью интегрирования данных из разнородных источников использование данной процедуры актуализируется. Для преобразования координат из одной системы в другую разработано большое количество методов, основанных на различных способах представления данных и алгоритмах решения. В данной статье рассмотрены несколько подходов решения задачи трансформирования систем координат на основе разных представлений данных. Предлагается для получения коэффициентов преобразования использовать формулы, основанные на координатах и на разностях координат общих точек. Представлены алгоритмы решения по предложенным подходам и проведен анализ полученных результатов вычислений.

Ключевые слова: *трансформирование, система координат, аффинная модель, элементы преобразования, метод наименьших квадратов.*

Введение. В геодезии задача преобразования координат на плоскости возникает, когда часть сети вставляется в сеть с другой системой координат; когда определяются элементы деформации различных объектов; при выносе в натуру проектов сооружений; когда главные оси объектов включаются в государственную систему; при выполнении фотограмметрических работ; в географических информационных системах и т.д. Несмотря на широту использования и кажущуюся понятность процесса двумерного трансформирования, есть ряд важных вопросов, которые на сегодняшний день требуют дополнительного исследования.

Основная часть. Хорошо известно, что каковы бы ни были две произвольные декартовы прямоугольные системы координат на плоскости, координаты любой точки этой плоскости относительно первой системы являются линейными функциями координат этой же точки относительно второй системы. Формулы плоского аффинного преобразования для одной точки имеют вид [1]

$$\begin{aligned} X_н &= f_1(X_c, Y_c) = aX_c + bY_c + c \\ Y_н &= f_2(X_c, Y_c) = dX_c + eY_c + f \end{aligned}, \tag{1}$$

где $X_н$, $Y_н$, – координаты в новой системе;
$X_с$, $Y_с$ – координаты старой систем;
a, b, c, d, e, f – коэффициенты линейного преобразования на плоскости.

На основе формул (1), имея точки, координаты которых известны в обеих системах координат, можно определить преобразующие коэффициенты и затем трансформировать точки, координаты которых существуют только в одной системе координат. Очевидно, что для однозначного определения параметров преобразования между двумя отдельными системами координат достаточно иметь количество уравнений, равное количеству неизвестных параметров, однако для контроля и оценки точности берется избыточное число точек, что приводит к переопределенной системе (1).

Для получения преобразующих коэффициентов переопределенную систему (1) можно решить различными способами на основе метода наименьших квадратов. Один из них – хорошо известный «метод растягивания» [2], при котором систему (1) записывают в эквивалентном, но более удобном для этого метода представлении:

$$\begin{bmatrix} (X_н)_1 \\ (Y_н)_1 \\ (X_н)_2 \\ (Y_н)_2 \\ \dots \\ (X_н)_n \\ (Y_н)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_c)_1 & (Y_c)_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X_c)_1 & (Y_c)_1 & 0 & 1 \\ (X_c)_2 & (Y_c)_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X_c)_2 & (Y_c)_2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (X_c)_n & (Y_c)_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X_c)_n & (Y_c)_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \tag{2}$$

или в свернутом виде

$$\begin{bmatrix} (K_н)_1 \\ (K_н)_2 \\ \dots \\ (K_н)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}; K_н = A \cdot \hat{k}, \tag{3}$$

где A_i – матрица плана для одной точки;

$\hat{k}$ – вектор коэффициентов.

Для получения решения запишем уравнение поправок для переопределенной системы (2)

$$v = A \cdot \hat{k} - K_н. \tag{4}$$

На основе условия метода наименьших квадратов $v^T v = \min$ переходим к совместной системе нормальных уравнений

$$\begin{aligned} &A^T A \cdot \hat{k} = A^T \cdot K_н, \\ &N \cdot \hat{k} = f \end{aligned} \tag{5}$$

где N – матрица коэффициентов нормальных уравнений;

f – вектор свободных членов системы нормальных уравнений.

Решение системы (4) методом обращения дает

$$\hat{k} = Q \cdot f, \tag{6}$$

где $Q = N^{-1}$.

Имея вектор коэффициентов преобразования, можно рассчитать при необходимости элементы аффинного преобразования по следующим формулам:

$$\begin{cases} m_x = \sqrt{a^2 + d^2} \\ m_y = \sqrt{b^2 + e^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{d}{a}\right) \\ (\varphi + \varepsilon) = arctg\left(\dfrac{-b}{e}\right), \end{cases} \tag{7}$$

где m_x, m_y – масштабные коэффициенты по осям X, Y соответственно;

φ – угол поворота системы координат;

ε – величина неортогональности.

В геодезической практике параметры преобразования координат также определяют с помощью другого подхода: через разности исходных координат [1; 3]:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= a_1 \Delta x + b_1 \Delta y \\ \Delta y' &= a_2 \Delta x + b_2 \Delta y \end{aligned}, \tag{8}$$

где $\Delta x' = x'_{i+j} - x'_i$, $\Delta y' = y'_{i+j} - y'_i$ – разности координат в новой системе координат;

$\Delta x = x_{i+j} - x_i$, $\Delta y = y_{i+j} - y_i$ – разности координат в старой системе координат;

$i = 1, 2, K, n-1$;

$j = i+1, i+2, K, n$;

n – количество точек с известными координатами в двух системах.

При этом способе представления данных максимальное число уравнений определяют как число комбинаций C_n^k, при этом расположение элементов внутри группы безразлично [4]:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{9}$$

где n – количество всех элементов;

k – количество элементов в каждой группе.

Так как система уравнений (7) избыточная, решение производится методом наименьших квадратов, уравнения поправок будут иметь вид

$$v = A\delta - l, \tag{10}$$

где $A = \begin{bmatrix} \Delta x_{2-1} & \Delta x_{3-1} & \Delta x_{4-1} & \Delta x_{5-1} & K & \Delta x_{(i+J)-i} \\ \Delta y_{2-1} & \Delta y_{3-1} & \Delta y_{4-1} & \Delta y_{5-1} & K & \Delta y_{(i+J)-i} \end{bmatrix}^T$ – матрица коэффициентов при неизвестных [3];

$\delta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ – матрица неизвестных параметров;

$l = \begin{bmatrix} \Delta x'_{2-1} & \Delta x'_{3-1} & \Delta x'_{4-1} & \Delta x'_{5-1} & K & \Delta x'_{(i+J)-i} \\ \Delta y'_{2-1} & \Delta y'_{3-1} & \Delta y'_{4-1} & \Delta y'_{5-1} & K & \Delta y'_{(i+J)-i} \end{bmatrix}^T$ – матрица свободных членов.

Параметры получают из решения системы нормальных уравнений

$$\delta = (A^T A)^{-1}(A^T l). \tag{11}$$

Элементы преобразования рассчитываются по формулам

$$\begin{cases} m_x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ m_y = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right) \\ (\varphi + \varepsilon) = arctg\left(\dfrac{-b_1}{b_2}\right). \end{cases} \tag{12}$$

Используя приращения координат, также можно записать следующие формулы для вычисления коэффициентов преобразования:

$$\begin{aligned} A_1 x_i + B_1 y_i + \mathrm{C}_1 = x'_i - x_i \\ A_2 x_i + B_2 y_i + \mathrm{C}_2 = y'_i - y_i \end{aligned}, \tag{13}$$

где x_i, y_i – координаты точек в старой системе координат;

x'_i, y'_i – координаты точек в новой системе координат;

A_i, B_i, C_i – искомые коэффициенты.

Решение осуществляется по методу наименьших квадратов, вектор неизвестных коэффициентов рассчитывается в два подхода, при которых решение выполняется относительно вектора приращений Z_1, а затем относительно вектора приращений Z_2. Получаем два вектора неизвестных коэффициентов, которые в сумме дают 6 коэффициентов преобразования:

$$\begin{aligned} k_1 = (A^T A)^{-1} A^T Z_1 \\ k_2 = (A^T A)^{-1} A^T Z_2 \end{aligned}, \tag{14}$$

где $Z_1 = x'_i - x_i$, $Z_2 = y'_i - y_i$;

$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ ... & ... & ... \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных;

$k_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$; $k_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$ – векторы неизвестных коэффициентов.

Элементы преобразования рассчитываются по формулам

$$\begin{cases} m_x = \sqrt{(A_1+1)^2 + A_2^{\,2}} \\ m_y = \sqrt{B_1^{\,2} + (B_2+1)^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{A_2}{A_1+1}\right) \\ (\varphi+\varepsilon) = arctg\left(\dfrac{-B_1}{B_2+1}\right). \end{cases} \tag{15}$$

Оценка точности для всех подходов выполняется по стандартным формулам на основе полученных по методу наименьших квадратов оценок. Апостериорная погрешность единицы веса

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{n-k}}\,, \tag{16}$$

где n – количество уравнений,
k – количество определяемых параметров.
Ковариационная матрица K_k для определяемых параметров

$$K_k = \hat{\sigma}_0^{\,2} \cdot Q\,. \tag{17}$$

Извлекая корень из диагональных элементов ковариационной матрицы $K_к$, получаем стандартные отклонения для соответствующих коэффициентов преобразования

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\left(K_k\right)_{ii}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q}_{ii}\,. \tag{18}$$

Авторами статьи была поставлена цель сравнить алгоритмы имеющихся подходов, выявить возможные преимущества и дать практические рекомендации по их использованию. Эксперимент проводился на основе смоделированных данных (таблица 1). Рассматривались десять точек с известными координатами в старой системе OXY (рисунок 1). Использовались известные параметры преобразования, относительно которых были вычислены точные значения координат данных точек в новой системе $O'X'Y'$. Были сгенерированы случайные числа, имеющие нормальный закон распределения с заданными характеристиками, принимаемые за ошибки, которыми искажались координаты в старой, новой системах.

Таблица 1. – Исходные координаты и параметры связи

Координаты в старой системе		Элементы преобразования	Координаты в новой системе	
X, м	*Y*, м		*X*, м	*Y*, м
500,000	500,000	угол вращения – 30°	–11,625	1288,688
1100,000	1000,000	угол нарушения ортогональности – 3°	–36,669	2427,338
400,000	1200,000	масштаб по *X* – 1	–860,715	2412,806
900,000	1600,000	масштаб по *Y* – 2	–863,408	3333,766
100,000	1700,000	сдвиг по *X* – 100 м	–1665,153	3101,437
600,000	1800,000	сдвиг по *Y* – 200 м	–1341,099	3519,204
1200,000	1400,000		–385,750	3148,252
900,000	2000,000		–1299,131	4004,675
500,000	2200,000		–1863,382	4140,163
1200,000	2000,000		–1039,315	4154,699

Искаженные ошибками новая и старая системы координат использовались для расчета коэффициентов преобразования по трем подходам (см. формулы (5), (10), (13) и таблицу 2). На основе полученных коэффициентов производился расчет элементов преобразования (таблица 3). Результаты оценки точности для трех подходов представлены в таблице 4.

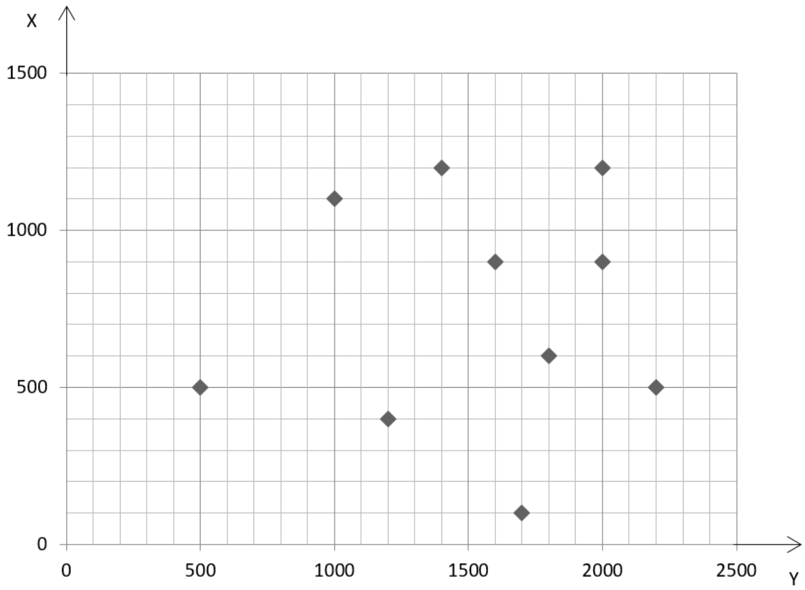

Рисунок 1. – Схема расположения точек в старой системе координат

Таблица 2. – Коэффициенты преобразования, полученные по трем подходам

Первый подход	Второй подход	Третий подход
k = 0,86597710 –1,08927033 99,982 0,50021656 1,67738001 199,826	δ = 0,86597710 0,50021656 –1,08927033 1,67738001	k_1 = –0,13403390 –1,08927033 99,982 k_2 = 0,50021656 0,67738001 199,826

Таблица 3. – Элементы преобразования, полученные по трем подходам

Первый подход	Второй подход	Третий подход
φ = 30°00′43,7′′ ε = 2°59′13,5′′ m_x = 1,00006646 m_y = 2,00002838 t_x = 99,982 м t_y = 199,826 м	φ = 30°00′43,7′′ ε = 2°59′13,5′′ m_x = 1,00006646 m_y = 2,00002838	φ = 30°00′43,7′′ ε = 2°59′13,5′′ m_x = 1,00006646 m_y = 2,00002838 t_x = 99,982 м t_y = 199,826 м

t_x, t_y – сдвиги вдоль оси X и Y соответственно.

Таблица 4. – Результаты оценки точности для трех подходов

Первый подход	Второй подход	Третий подход
Апостериорная погрешность единицы веса, м		
σ_0 = 0,0982	σ_0 = 0,1253	σ_{01} = 0,0814 σ_{02} = 0,1125
Стандартные отклонения для коэффициентов преобразования, м		
σ_i = 0,00008749 0,00006266 0,11718869 0,00008749 0,00006266 0,11718869	σ_i = 0,00003530 0,00002528 0,00003530 0,00002528	σ_i = 0,00007253 0,00005194 0,09714985 0,00010025 0,00007180 0,13426945

Заключение. По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

– при одинаковых исходных данных три подхода дают коэффициенты преобразования с одинаковой точностью в трех различных представлениях (таблица 2);

– следует отметить, что во втором подходе отсутствуют коэффициенты, соответствующие сдвигам систем координат, следовательно, сдвиги систем координат получить невозможно, что для чистого трансформирования не имеет никакого значения, но если необходимо иметь представление о модели преобразования, то второй подход не даст необходимых данных;

– в третьем подходе коэффициенты требуют преобразования для расчета элементов трансформирования.

При сравнении размеров образованных матриц плана и матриц свободных членов, необходимых для решения при трех подходах, имеем:

– в первом подходе 20 уравнений координат, матрицу плана размером A_{20*6}, матрицу-столбец свободных членов l_{20*1};

– во втором подходе 45 уравнений координат, матрицу плана размером A_{45*2}, матрицу-столбец свободных членов l_{45*2};

– в третьем подходе 10 уравнений координат, матрицу плана размером A_{10*3}, две матрицы-столбца свободных членов Z_{10*1}, образованных по разностям абсцисс и ординат старой и новой систем координат.

Второй подход имеет значительно большее количество уравнений и большие размеры матриц плана и свободных членов, что указывает на его большую трудоемкость по сравнению с другими подходами. Следует отметить, что увеличение количества уравнений во втором подходе никак не повлияло на величины полученных коэффициентов преобразования.

Результаты оценки точности показали самую большую величину апостериорной погрешности веса и наименьшие стандартные отклонения для соответствующих коэффициентов преобразования во втором подходе. Хоть величины коэффициентов в трех подходах одинаковые, но наилучшую точность определения коэффициентов дает второй подход.

Таким образом, авторы статьи полагают, что первый подход оптимален для решения задачи трансформирования систем координат, так как имеет полный набор коэффициентов преобразования и не требует составления матриц больших размеров. Однако если есть необходимость в повышении точности коэффициентов преобразования, то такая возможность существует во втором подходе за счет увеличения количества уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлович, К. Геодезия (уравнительные вычисления) / К. Михайлович ; пер. с сербско-хорватского С.В. Лебедева, под ред. В.Д. Большакова. – М. : Недра, 1984. – 448 с.
2. Ghilani, Charles D. Adjustment computations: spatial data analysis / Charles D. Ghilani, Paul R.Wolf Hoboken : JOHN WILEY & SONS, INC., 2006. – 632 c.
3. Мищенко, И.И. Априорная оценка точности некоторых параметров аффинного преобразования плоских прямоугольных координат / И.И. Мищенко, А.В. Зуска // Сборник научных работ Национального горного университета. – 2018. – № 55. – С. 288–296.
4. Голубев, В.В. Геодезия. Теория математической обработки геодезических измерений: учеб. для вузов / В.В. Голубев. – М. : Изд-во МИИГАиК, 2016. – 422 с.

Поступила 15.09.2020

ANALYSIS OF APPROACHES TO DECISION OF THE TRANSFORMATION PROBLEM OF COORDINATE SYSTEMS BASED ON DIFFERENT DATA REPRESENTATIONS

A. DEGTYARYOV, A. IVASHNIOVA

Often in geodesy there is a problem of replacing the coordinate system with another coordinate system. Today, the need for this procedure is growing, it is connected with the increase of the quantity and quality of information and with the need to integrate of the data from heterogeneous sources. For coordinate transformation from one system to another, a large number of transformation methods have been developed, based on different approaches of data representation and solving algorithms. In this article several approaches to solving the problem are considered based on different representations of data for the coordinate system transformation. It is proposed to use transformation formulas based on the coordinates and on the differences of the coordinates of common points to obtain conversion coefficients. In the article the decision algorithms for the proposed approaches are presented and analyze of the obtained calculation results is performed.

***Keywords**: transformation, coordinate system, affine model, transformation elements, least square method.*