

УДК 528.48

DOI 10.52928/2070-1683-2023-33-1-82-89

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПОЛУЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ФАСАДНОЙ СЪЕМКИ

канд. техн. наук К.И. МАРКОВИЧ,
канд. техн. наук, доц. В.В. ЯЛТЫХОВ,
канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЕВ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

При строительстве новых, реконструкции эксплуатируемых зданий и сооружений часто возникает необходимость в оценке геометрии стен фасадов. Выбор методов исполнительной съемки фасадов обычно определяется в зависимости от геометрических параметров здания, конструктивных элементов, подлежащих исполнительной съемке, необходимой точности и др. Однако при любом методе съемки для составления необходимой отчетной документации возникает вопрос определения плоскости, на которую будут проектироваться конструктивные элементы фасада. В статье рассмотрены варианты получения оптимальной плоскости при производстве фасадной съемки. Усовершенствован алгоритм Гандера аппроксимации плоскости по общему уравнению. Предложен алгоритм, позволяющий упростить процесс получения оптимальной плоскости для фасадной съемки. Результаты получены на реальных измерениях координат точек фасада здания.

Ключевые слова: съемка фасада, оптимальная плоскость, направляющие косинусы, длина нормали, метод наименьших квадратов, сингулярное разложение, определитель матрицы.

Введение. Геодезическая съемка фасада является высокоточной исполнительной съемкой вертикальных и наклонных поверхностей зданий, основной целью которой является получение данных о координатах, размерах и высотах различных частей сооружения. Результатом геодезической съемки является модель здания, необходимая для выполнения проектных работ. При внешней отделке зданий часто применяют вентилируемые фасады, которые считаются эффективной системой, обеспечивающей тепловую и акустическую изоляцию, устраняющую тепловые мосты и проблемы конденсации. Основными функциями вентилируемого фасада являются не только утепление и защита стен от внешних атмосферных разрушающих воздействий на фасад, но и нивелирование значительных неровностей стен, исправление геометрии здания.

Проекты вентилируемых фасадов часто имеют достаточно сложные архитектурные решения. Однако даже легкий проект с несложной архитектурой требует высокой точности разбивочных работ для устройства конструктивных элементов вентилируемого фасада.

Зачастую заказчики пренебрегают потребностью в фасадных съемках и проекты КМД (конструкции металлических детализированные) для устройства вентилируемого фасада разрабатываются проектными организациями на основе чертежей АР (архитектурное решение) без учета реальной геометрии здания и определения плоскостности и вертикальности стен фасада, на которые будет монтироваться металлический каркас вентилируемого фасада. Типовой металлический каркас состоит из специальных кронштейнов и закрепленной к ним системы из вертикальных и горизонтальных направляющих, на которые осуществляется монтаж фасадных панелей определенного типа. Если на этапе проектирования по чертежам АР сверялись лишь основные архитектурные элементы и общие габариты здания (длины фасадных стен), то в дальнейшем из-за неучтенных отклонений плоскостности и вертикальности стен при устройстве каркаса вентилируемого фасада может оказаться, что для выравнивания плоскости монтируемой системы до требуемых допусков, которые регламентированы в проектной документации и в нормативных документах для данного вида работ, могут понадобиться дополнительные материалы, что в свою очередь может серьезно отразиться на повышении сметной стоимости работ.

Кроме плоскостности и вертикальности на таких съемках могут быть указаны все контура здания на определенных уровнях, показаны отметки оконных и дверных проемов, что позволит проектировщикам учесть эти отклонения при определении сметной стоимости работ в процессе калькуляции объемов облицовочных материалов, подобрать наиболее выгодную схему отделки, чтобы во время монтажа на определенном участке можно было крепить определенные элементы без необходимости их подрезки.

Основная часть. Выбор самого метода съемки зависит от загруженности архитектурными элементами, требований заказчика и финансовых возможностей. Лазерное сканирование зданий является дорогой услугой, но оно помогает сэкономить много времени и получить точный результат. Целесообразно применение сканирования для съемки фасадов многоэтажных зданий и зданий повышенной этажности, а также зданий с большим количеством архитектурных элементов. Тахеометрическая съемка – более дешевый метод, подходящий для типовых сооружений, зданий небольшой этажности и простой архитектуры.

Точность производства съемки фасада и работ по устройству вентилируемого фасада регламентируется ТКП 45-3.02-114-2009¹. В таблице 1 приведены допустимые отклонения для устройства вентилируемых фасадов из ТКП 45-3.02-114-2009.

Таблица 1. – Допустимые отклонения конструкции вентилируемого фасада

Наименование элемента и его параметров	Значение
Отклонение направляющей вентилируемого фасада от вертикальности стены, мм, не более	3
Отклонение от соосности смежных (по высоте) направляющих, мм, не более	5
Отклонение облицовки от вертикальности, мм, не более	2 на 1 м длины
Отклонение облицовки от плоскостности, мм, не более	5 на 1 м длины
Уступ между смежными по высоте направляющими, мм, не более	4

Из таблицы 1 следует, что основные требования предъявляются к взаимному расположению направляющих и взаимному расположению облицовки по каркасу в рамках вертикальности и плоскостности стены.

Съемочные материалы могут быть представлены как в виде разверток фасадных стен на цифровых и бумажных носителях, так и в виде цифровой 3D-модели. По такой модели, состоящей из облака точек, проектировщик может получить нужные ему данные на определенные участки фасада.

Чтобы составить чертеж фасада, нужно «спроектировать» точки на какую-то плоскость. В таком случае встает вопрос: каким образом задать плоскость? Рассмотрим самые распространенные варианты задания плоскости.

Для фасада здания (рисунок 1) существуют следующие варианты задания плоскости:

- вертикальная плоскость, проходящая через точки 1, 2;
- вертикальная плоскость, проходящая через точки 3, 4;
- вертикальная плоскость, перпендикулярная другому фасаду (или под каким-то углом), проходящая через одну из точек;
- плоскость, проходящая через любые три точки (но она не всегда будет вертикальной);
- другие варианты.

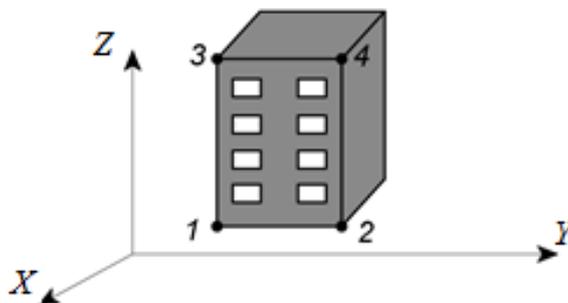


Рисунок 1. – Варианты задания исходной проектной плоскости

При съемке фасада в условной системе координат чаще выбирают 1-й вариант, так как фасадная часть здания, расположенная ближе к цоколю, как правило, наиболее прямолинейна, а по мере увеличения высоты строительства каркаса задания отклонения от проектных осей возрастают. Первый вариант задания плоскости удобен при камеральной обработке данных, так как, определяя координаты точки стояния тахеометра с базиса на фасаде, можно выявлять отклонения от заданной таким образом плоскости непосредственно во время производства полевых работ и указывать их на схеме.

Параметры выбора плоскости определяет проектная организация с учетом конструктивных особенностей проекта вентилируемых фасадов.

В результате полевых наблюдений фасада здания получают набор координат X_i, Y_i, Z_i , по которым необходимо вычислить положение оптимальной плоскости и отклонения реального фасада от оптимальной плоскости. Под оптимальной плоскостью будем понимать плоскость, полученную по общему уравнению плоскости, так как она производит коррекцию всех трех координат, полученных в результате съемки. Для определения параметров плоскости используем данные, приведенные в таблице 2.

¹ ТКП 45-3.02-114-2009 «Тепловая изоляция наружных ограждающих конструкций зданий и сооружений. Правила устройства». – Минск: Минстройархитектуры, 2009.

Таблица 2. – Исходные координаты точек фасадной съемки

№ точки	X, м	Y, м	Z, м
1	10,000	50,000	4,156
2	9,919	49,882	16,052
3	10,158	50,166	14,226
4	14,044	54,455	14,234
5	14,363	54,757	4,276
6	14,459	54,778	16,071
7	18,073	58,743	4,614
8	18,060	58,767	17,400
9	18,301	59,020	14,271
10	22,311	63,380	14,289
11	22,448	63,654	17,570
12	22,515	63,660	4,566
13	26,203	67,656	4,103
14	26,199	67,757	16,060
15	26,501	67,963	14,221
16	30,405	72,214	14,210
17	30,521	72,273	16,082
18	30,558	72,391	3,821

Для нахождения коэффициентов уравнения плоскости при фасадной съемке получим три модели, используя явные уравнения. Модель № 1: $z = f(x, y)$

$$z = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \rightarrow z = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \rightarrow z = A_1 \cdot k_1. \quad (1)$$

Так как система (1) переопределённая, решение для коэффициентов найдем по методу наименьших квадратов [1]. Тогда, используя натуральные величины, для вектора коэффициентов k_1 будем иметь (2)

$$k_1 = (A_1^T \cdot A_1)^{-1} \cdot A_1^T \cdot z = N_1^{-1} \cdot b_1. \quad (2)$$

Для целей выбора наиболее адекватной модели плоскости² получим определитель d_1 матрицы N_1 системы нормальных уравнений для модели (1).

С целью более полного представления и анализа модели получим направляющие косинусы n нормали к плоскости из центра системы координат и саму величину нормали p . Направляющие косинусы и длину нормали $(n, p)_1$ для модели (1) получают путем нормировки дополненного коэффициента -1 вектора k'_1 коэффициентов k_1 из (2):

$$\begin{aligned} k'_1 &= [k(1) \ k(2) \ -1 \ k(3)]; \\ k''_1 &= [k(1) \ k(2) \ -1]; \\ (n, p)_1 &= \frac{k'_1}{\sqrt{k''_1 \cdot k''_1{}^T}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для удобства анализа результаты вычислений приведены в таблице 3.

Модель № 2 в натуральных величинах на основе явного уравнения плоскости $y = f(x, z)$ будет иметь следующий вид:

$$y = a_2 \cdot x + b_2 \cdot z + c_2 \rightarrow y = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \rightarrow y = A_2 \cdot k_2, \quad (4)$$

её решение по методу наименьших квадратов из (2)

$$k_2 = (A_2^T \cdot A_2)^{-1} \cdot A_2^T \cdot y = N_2^{-1} \cdot b_2. \quad (5)$$

² URL: http://www.ilikebigbits.com/2015_03_04_plane_from_points.html.

Направляющие косинусы n_2 и длина нормали p_2 вычисляются на основе (3). Результаты вычислений также приведены в таблице 3.

Модель № 3 на основе явного уравнения плоскости $x = f(y, z)$ будет иметь вид (6)

$$x = a_3 \cdot y + b_3 \cdot z + c_3 \rightarrow x = \begin{bmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \rightarrow x = A_3 \cdot k_3, \quad (6)$$

её решение по методу наименьших квадратов из (2)

$$k_3 = (A_3^T \cdot A_3)^{-1} \cdot A_3^T \cdot x = N_3^{-1} \cdot b_3. \quad (7)$$

Определитель d_3 матрицы N_2 , направляющие косинусы n_3 и длину нормали p_3 получим из (3). Результаты вычислений также приведены в таблице 3.

Таблица 3. – Результаты вычислений

Параметры	Модель № 1	Модель № 2	Модель № 3
$k(1)$	-4,1799795	1,0898975	0,9174800
$k(2)$	3,8302835	0,0003151	-0,0002895
$k(3)$	-137,94696	39,088652	-35,862224
определитель d_1	665,41	8087387,45	9607210,71
$n(1)$	-0,72606629	-0,7368418	-0,7368555
$n(2)$	0,66532378	0,6760652	0,6760502
$n(3)$	-0,17370092	-0,0002131	-0,0002133
p	-23,961513	26,426477	-26,425278

В качестве наиболее целесообразной плоскости имеет смысл выбрать ту, у которой определитель наибольший. Для нашего случая это модель № 3.

Отношение определителей для решения в центрированных величинах и в натуральных сохраняется. Решение для перестановочных моделей в центрированных и натуральных величин имеет различие порядка 10^{-8} .

Если модели № 1, 2, 3 разрешать в центрированных величинах, то результат получим совершенно идентичный, но только в том случае, когда значения координат меньше половины разрядной сетки используемых вычислительных средств. В противном случае, из-за сильной разномасштабности коэффициентов наклона и сдвига получаем неустойчивое решение и лучше выполнить центрировку.

В явных моделях № 1, 2, 3 подразумевается, что исправлению подлежит только одна координата из трех, т.е. только она имеет стохастические свойства. В реальности все три координаты имеют ошибки определения и все три должны быть откорректированы за счёт введения соответствующих поправок. Решение такого рода задачи будем считать оптимальным. Задачу в такой постановке можно решить, используя общую модель плоскости (8)

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \quad (8)$$

при условии $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. В этом случае модель будет иметь вид (9)

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0, \quad (9)$$

где коэффициенты модели $[a \ b \ c]$ будут по своей сути направляющими косинусами n для плоскости; d – величина нормали от плоскости до центра системы координат.

Задачу предлагается решить на основе минимизации длины вектора отклонения r реальных координат (10), полученных в результате съемки, от модельных координат по нормали к плоскости методом Гандера [2; 3].

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = r. \quad (10)$$

В основе метода два положения: редукция системы за счёт устранения с учётом влияния коэффициента d и применение к полученной системе сингулярного разложения, позволяющего получить вектор направляющих косинусов $[a \ b \ c]$, минимизирующих квадрат длины $r^T \cdot r$ вектора отклонений r из (10).

Для реализации алгоритма Гандера модель (10) запишем в матричном виде как (11)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

или как (12)

$$A \cdot k = r. \quad (12)$$

Далее матрица разлагается на основе QR-разложения $A = Q \cdot R$ и из матрицы R выделяется редуцированная треугольная матрица R_r размера 3×3 без первой строки и первого столбца. Таким образом, производится учёт и редукция системы по коэффициенту d :

$$R = \begin{pmatrix} -4,24264068711929 & -86,0402817302583 & -259,629811061827 & -49,5498005848661 \\ 0 & 29,5406609908746 & 32,1962435424337 & -0,158616999174367 \\ 0 & 0 & -0,20581971795562 & -0,788347865793772 \\ 0 & 0 & 0 & -22,6769889599583 \end{pmatrix};$$

$$R_r = \begin{pmatrix} 29,5406609908746 & 32,1962435424337 & -0,158616999174367 \\ 0 & -0,20581971795562 & -0,788347865793772 \\ 0 & 0 & -22,6769889599583 \end{pmatrix}.$$

Для редуцированной матрицы R_r выполняем сингулярное разложение (13)

$$R_r = U \cdot S \cdot V. \quad (13)$$

Последний столбец матрицы V является вектором направляющих косинусов n в решении нормализованной модели плоскости (10)

$$n = \begin{pmatrix} 0,7368492 \\ -0,6760570 \\ 0,002132 \end{pmatrix}.$$

Величину нормали к поверхности d получим из первого уравнения QR-разложения, т.е. по удалённой ранее строке

$$[R_{11} \quad R_{12} \quad R_{13} \quad R_{14}] \cdot \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0; \quad (14)$$

как

$$d = -[R_{12} \quad R_{13} \quad R_{14}] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} / R_{11}. \quad (15)$$

В результате вычислений получили $d = 26,4258259$.

Вектор отклонений r от проектной плоскости получим из (12). Зная вектор отклонений r и решение $k = (p \ n)$ модели (12), получим величины коррекции $(r_{xyz})_i = (r_x, r_y, r_z)_i$ в координаты $(X, Y, Z)_i$, полученные по результатам съемки, которые будут принадлежать оптимальной проектной плоскости вида (16)

$$(r_{xyz})_i = r_i \cdot n. \quad (16)$$

Результаты вычислений r_i приведены в таблице 4. Тогда координаты точки, принадлежащие оптимальной плоскости, будут

$$(xyz)'_i = (xyz)_i - (r_{xyz})_i. \quad (17)$$

Если координаты точек съемки представлены построчно в матрице размера $(t \times 3)$, для получения всех значений координат спроектированных на плоскость точек сразу можно использовать следующую формулу (18):

$$(xyz)' = (xyz) - r \otimes n^T, \quad (18)$$

где n строка направляющих косинусов из решения модели (14);

r – вектор-столбец остатков;

\otimes – символ произведения Кронекера.

Используя формулу (17) для координат, приведенных в таблице 2, получим значения координат, которые будут принадлежать оптимальной плоскости. Результаты вычислений приведены в таблице 4, а графическая интерпретация вычислительной операции – на рисунке 2.

Таблица 4. – Величины нормалей r и приведённые к оптимальной плоскости координаты точек X, Y, Z .

№	$r, \text{ м}$	$X, \text{ м}$	$Y, \text{ м}$	$Z, \text{ м}$
1	-0,0076	10,006	49,995	4,156
2	0,0150	9,908	49,892	16,052
3	-0,0013	10,159	50,165	14,226
4	-0,0375	14,072	54,430	14,234
5	-0,0088	14,369	54,751	4,276
6	0,0503	14,422	54,812	16,071
7	0,0303	18,051	58,763	4,614
8	0,0072	18,055	58,772	17,400
9	0,0131	18,291	59,029	14,271
10	0,0202	22,296	63,394	14,289
11	-0,0634	22,495	63,611	17,570
12	-0,0208	22,530	63,646	4,566
13	-0,0050	26,207	67,653	4,103
14	-0,0736	26,253	67,707	16,060
15	0,0092	26,494	67,969	14,221
16	0,0120	30,396	72,222	14,210
17	0,0580	30,478	72,312	16,082
18	0,0028	30,556	72,393	3,821

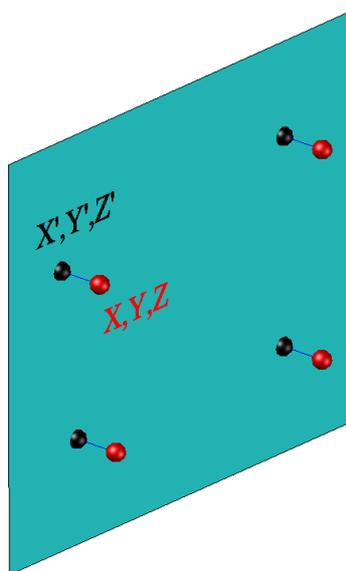


Рисунок 2. – Графическая интерпретация вычислительной операции

Если в алгоритме Гандера QR-разложение для редукции сдвига плоскости заменить процессом центрирования исходных координат, то получим более удобный и простой алгоритм вычислений. Здесь на первом этапе центрируются координаты, на втором этапе к полученной центрированной системе применяется сингулярное разложение с получением направляющих косинусов, и на третьем этапе путем подстановки направляющих косинусов в общее уравнение модели получим, если необходимо, величину сдвига d . Результаты совершенно идентичны в сравнении с применением алгоритма Гандера.

Таким образом, вычислив координаты проекций точек на плоскость, далее возможно выполнять вычисления необходимых фактических размеров для целей проектирования. Вычисленные значения r_i характеризуют отклонение реального положения поверхности фасада здания от оптимальной плоскости.

Для случая, когда необходимо получить вертикальную оптимальную плоскость, данные представим в виде модели № 4 (19)

$$y = a_4 \cdot x + b_4 \rightarrow y = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} \rightarrow y = A_4 \cdot k_4 \quad (19)$$

Решение модели № 4 в натуральных величинах по методу наименьших квадратов дает значения, приведенные в таблице 5.

Решение модели № 2 и решение модели № 4 отличаются в 6-ом знаке для коэффициента наклона и во 2-ом знаке для коэффициента сдвига.

Решим модель № 4 путем минимизации квадрата отклонения r от модельной линии $a \cdot x + b \cdot y + c = r$, при условии $a^2 + b^2 = 1$ (модель № 5). Тогда коэффициенты модели будут по сути направляющими косинусами линии $n = [a \ b]$, а c – величина нормали от линии до центра системы координат. Из алгоритма Гандера получим значения, приведенные в таблице 5 (модель 5)

Таблица 4. – Коэффициенты моделей № 4, 5, полученные по алгоритму Гандера

Параметры	Модель № 4	Модель № 5
$k(1)$	1,0898958	–
$k(2)$	39,0923668	–
определитель d_1	15707,71	–
$n(1)$	0,7368413	0,7368487
$n(2)$	-0,6760658	-0,6760576
p	26,4290113	26,4283613

Заключение. Анализ нормативной и технической литературы и рассмотренные алгоритмы получения оптимальной плоскости при производстве фасадной съемки позволяют сделать следующие выводы.

1. Достоверность результатов фасадной съемки зависит не только от точности измерений, но и от правильности интерпретации результатов измерений. Фасадная съемка является исходным материалом для проведения проектных работ и в конечном итоге определяет качество проекта.

2. Вычисленные параметры оптимальных плоскостей фасадов зданий позволяют получить представление о реальной форме всего сооружения в целом. В статье предлагается усовершенствованный алгоритм Гандера аппроксимации плоскости по общему уравнению. Предложен алгоритм, позволяющий упростить процесс получения оптимальной плоскости при фасадной съемке.

3. Применение вышеизложенных алгоритмов позволяет определить параметры как наклонной, так и вертикальной оптимальной плоскости для расчета отклонений строительных конструкций от плоскостности и в дальнейшем для создания проектных чертежей при ремонте, облицовке фасада или реконструкции здания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
2. Gander W., Gander J., Kwok F. *An Scientific Computing – Introduction using Maple and MATLAB*. – Switzerland: Springer International Publishing, 2014. – 905 p.
3. Голуб Дж., Ван Лоан Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1993. – 548 с.

REFERENCES

1. Seber, Dzh. (1980). *Lineinyi regressionnyi analiz*. Moscow: Mir. (In Russ.).
2. Gander, W., Gander, J. & Kwok, F. (2014). *An Scientific Computing – Introduction using Maple and MATLAB*. Switzerland: Springer International Publishing.
3. Golub, Dzh. & Van Loan, Ch. (1993). *Matrichnye vychisleniya*. Moscow: Mir. (In Russ.).

Поступила 07.04.2023

**IMPROVEMENT OF THE ALGORITHM FOR OBTAINING THE OPTIMAL PLANE
FOR FACADE SURVEY**

K. MARKOVICH, V. YALTYKHOV, A. DEGTJAREV
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

During the construction of new, reconstruction of buildings and structures in operation, it often becomes necessary to assess the geometry of the walls of the facades. The choice of methods for the executive survey of facades is usually determined depending on the geometric parameters of the building, the structural elements to be surveyed, the required accuracy. With any survey method for compiling the necessary reporting documentation, the question arises of determining the plane on which the structural elements of the facade will be designed. The article considers options for obtaining the optimal plane in the production of facade survey. The algorithm for approximating the plane by the general equation has been improved. An algorithm is proposed that simplifies the process of obtaining the optimal plane for facade survey. The results were obtained on real measurements of the coordinates of the points of the facade of the building.

Keywords: *facade survey, optimal plane, direction cosines, normal length, least squares method, singular value decomposition, matrix determinant.*