

УДК 628.11(628.16)

DOI 10.52928/2070-1683-2023-34-2-38-46

УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «ЗАРЯДКИ» КИСЛОРОДОМ ВОДОВМЕЩАЮЩИХ ПОРОД В ПРОЦЕССЕ ВНУТРИПЛАСТОВОЙ ОБРАБОТКИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Е.И. РАШКЕВИЧ¹, канд. техн. наук В.Д. ЮЩЕНКО²,
д-р физ.-мат. наук Е.К. МАКАРОВ³, д-р физ.-мат. наук А.К. ДЕМЕНЧУК⁴

^{1), 2)} Витебское областное коммунальное унитарное предприятие
водопроводно-канализационного хозяйства «Витебскоблводоканал»,
^{3), 4)} Государственное научное учреждение «Институт математики

Национальной академии наук Беларуси», Минск)

¹⁾selenariko@gmail.com, ²⁾yuvd46@mail.ru, ³⁾jcm@im.bas-net.by, ⁴⁾demenchuk@im.bas-net.by

В статье описывается метод внутрипластовой технологии обработки подземных вод, условия моделирования процесса закачки воды в водовмещающую породу, а также анализ полученных математических уравнений.

Ключевые слова: технология и особенности метода внутрипластовой обработки подземных вод, моделирование процессов «зарядки» водовмещающих пород, анализ граничных условий.

Введение. В Республике Беларусь основным источником водоснабжения населенных пунктов являются подземные воды¹ [1]. Во многих случаях (по РБ – более 80%) наблюдается повышенная концентрация железа, которая может быть в сочетании с другими загрязняющими микроэлементами и веществами. Согласно требованиям СанПиН 10.124-99 РБ концентрация железа в воде питьевого качества должна быть не более 0,3 мг/дм³. Превышение этого уровня концентрации приводит к техническому и технологическому нарушению работы систем водоснабжения объектов и населенных мест, а также отрицательно влияет на здоровье человека.

В настоящее время наиболее распространенными методами удаления железа из подземных вод являются аэрационные и реагентные методы, осуществляемые на станциях или установках наземного исполнения *ex-situ*. Как правило, для крупных районных и областных населенных пунктов обработку воды ведут путем аэрации с последующим фильтрованием в безнапорных условиях. Наоборот, в малых населенных пунктах (деревни, села, агрогородки и отдельные объекты) практически везде используется напорный вариант [2].

Следует отметить, что фильтры нуждаются в периодической регенерации загрузки, поэтому необходимо использование соответствующего промывного оборудования и сооружений по сбору осадков.

Метод обезжелезивания воды непосредственно в водоносном пласте скважин *in-situ* в исполнении системы *Subterra* является более простым и экономичным, по сравнению с устройствами наземного исполнения^{2, 3} [1; 3], но пока мало изучен в Республике Беларусь. Сущность метода состоит в том, что в каждой отдельной скважине происходят все стадии внутрипластовой обработки подземных вод: закачка обогащенной кислородом воды в водоносный пласт, отстой для создания обширной окислительной зоны, первоначальная прокачка на рельеф местности в специально подготовленные места и последующая откачка в систему водоснабжения населенного пункта или объекта. То есть скважина одновременно является закачивающей и нагнетательной, причем эти стадии разделены друг от друга.

Коэффициент полезности использования метода внутрипластовой обработки подземных вод определяется как отношение объемов откачки в систему водоснабжения населенного пункта и закачки обогащенной кислородом воды в водоносный пласт. Считается, что при значениях коэффициента полезности более 3 применение этого метода целесообразно по сравнению со станциями в напорном варианте и наземном исполнении.

Основной стадией процесса является закачка обогащенной кислородом воды в водоносный пласт, от которой зависят все последующие. При этом происходит закрепление кислорода на породах пласта, что для краткости называют «зарядкой» пласта.

Г.М. Коммунар⁴ [3] была предложена математическая модель процесса «зарядки» кислородом водовмещающих пород при закачке на основе процессов сорбции (адсорбции и хемосорбции). Эта модель достаточно подробно описана в главе 21 [3]. Однако при описании указанной модели не приводится ряд существенных промежуточных выкладок, что затрудняет ее практическое использование.

¹ Национальный статистический комитет Республики Беларусь. URL: <http://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/makroekonomika-i-okruzhayushchaya-sreda/okruzhayushchaya-sreda/sovmestnaya-sistema-ekologicheskoi-informatsii2/c-vodnye-resursy/c-3-vodopotreblenie/>.

² Кулаков В.В. 100 лет технологии очистки подземных вод от железа в водоносном горизонте (*in situ*) // Материалы 6-го междунар. конгр. ЭКВАТЭК-2004 «Вода: экология и технология» / г. Москва (1–4 июня 2004 г.). – Ч. 1. – М., 2004. – С. 173–174.

³ Коммунар Г.М. Внутрипластовая очистка подземных вод для целей водоснабжения: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.04. – М.: ВНИИ ВОДГЕО, 1987. – 39 с.

⁴ См. сноску 3.

В настоящей статье проведен детальный анализ математического аппарата модели Г.М. Коммунара, восстановлены недостающие выкладки и устранены обнаруженные неточности. В дальнейшем это позволит адаптировать основанные на рассматриваемой модели методики расчета коэффициента полезности использования метода внутриводной обработки подземных вод к применению для расчета систем водоснабжения малых населенных пунктов в Республике Беларусь.

В своих расчетах выделим основные рассматриваемые уравнения простой нумерацией, если имеются ссылки на математическую модель Г.М. Коммунара, то оставляем те же обозначения, например, формула 21.1 [3] и т.д.

Основные положения математической модели, предложенной Г.М. Коммунаром. Стадию «зарядки» водовмещающих пород кислородом обеспечивают процессы сорбции различных типов (адсорбции и хемосорбции). Центрами для сорбции кислорода могут быть ионы различных металлов, а также структурные элементы материалов водоносных слоев. Считается, что адсорбция кислорода является лимитирующей стадией при проведении реакций окисления ионов железа и образования его гидроксидов непосредственно в подземном пласте.

В работе [3, гл. 21] рассматривается два варианта протекания процессов сорбции: адсорбция по реакции 1-го порядка с конечной скоростью и мгновенная необратимая адсорбция. В настоящей работе мы анализируем только последний вариант.

В анализируемой модели предполагается, что весь объем закачанной воды в каждый момент времени размещается в цилиндре с высотой, равной мощности пласта, и осью, совпадающей с осью скважины. Предполагается также, что потоки воды внутри пласта в процессе закачки являются радиальными, т.е. направлены перпендикулярно оси скважины и от нее вдоль радиусов цилиндра.

В этих предположениях процесс «зарядки» кислородом водяного пласта описывается системой динамики адсорбции, которая является системой дифференциальных уравнений с частными производными и в случае мгновенной необратимой адсорбции имеет вид:

$$n_0 \frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \frac{q_3}{r} \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial t} = C_{O_2}^* \delta(t - \lambda_0), \quad (2)$$

где t – время протекания процесса (ч), отсчитываемое от его начала;

r – расстояние от оси скважины (м);

n_0 – пористость водоносного пласта (объем пор в единице объема породы, безразмерная величина);

$C_{O_2} = C_{O_2}(t, r)$ – концентрация растворенного в воде кислорода в момент времени t на расстоянии r от оси скважины (мг/л);

$C_{\bar{O}_2}$ – концентрация адсорбированного на поверхности пород кислорода (мг/л);

$C_{O_2}^*$ – предельная адсорбционная емкость пород по отношению к кислороду (мг/л);

$C_{O_{20}}$ – начальная концентрация растворенного в закачиваемой воде кислорода (мг/л).

q_3 – величина при закачке воды в пласт, определяемая по формуле:

$$q_3 = Q_3 / 2\pi M, \quad (3)$$

где M – мощность водяного пласта (м);

Q_3 – расход закачки (м³/ч);

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака;

λ_0 – момент наступления скачка концентрации кислорода $C_{O_2} = C_{O_2}(t, r)$ в точках на расстоянии r от оси скважины при мгновенной адсорбции кислорода, определяется по формуле:

$$\lambda_0 = \frac{(n_0 + \Gamma_{O_2})(r^2 - r_0^2)}{2q_3}, \quad (4)$$

где Γ_{O_2} – константа Генри адсорбции, определяемая по формуле:

$$\Gamma_{O_2} = \frac{C_{\bar{O}_2}^*}{C_{O_{20}}}, \quad (5)$$

где r_0 – радиус скважины (м).

Из уравнения (1) вытекает, что концентрация кислорода, растворенного в воде, исчисляется по отношению к объему воды, т.е. к объему пор.

Замечание 1. Концентрация адсорбированного кислорода исчисляется по отношению к геометрическому объему, т.е. сумме объемов пор и объема породы.

Система (1), (2) решается при начальном условии:

$$C_{O_2}(t=0, r \geq r_0) = C_{\bar{O}_2}(t=0, r \geq r_0) = 0 \quad (6)$$

и краевом условии:

$$C_{O_2}(t > 0, r = r_0) = C_{O_{20}}. \quad (7)$$

Этим условиям, согласно⁵, соответствует решение системы (1), (2), имеющее вид:

$$C_{O_2}(t, r) = C_{O_{20}} H(t - \lambda_0); \quad (8)$$

$$C_{\bar{O}_2}(t, r) = C_{\bar{O}_2}^* H(t - \lambda_0), \quad (9)$$

где $H(t - \lambda_0)$ – единичная функция, принимающая значение 1 при $t < \lambda_0$ и значения 0 при $t > \lambda_0$, см. формулы (21.9а) и (21.9б) указанной монографии.

Замечание 2. Обозначение $H(t)$ является стандартным для так называемой функции Хевисайда, принимающей значение 1 при $t > 0$ и значение 0 при $t < 0$.

В дальнейшем мы будем использовать данное обозначение в этом стандартном смысле, а для единичной функции, используемой в [3], введем обозначение $\bar{H}(t)$. Нетрудно проверить, что функции $\bar{H}(t)$ и $H(t)$ связаны соотношениями:

$$\bar{H}(t) = H(-t) = 1 - H(t). \quad (10)$$

Тогда решения (8) и (9) запишутся в виде:

$$C_{O_2}(t, r) = C_{O_{20}} \bar{H}(t - \lambda_0); \quad (11)$$

$$C_{\bar{O}_2}(t, r) = C_{\bar{O}_2}^* \bar{H}(t - \lambda_0). \quad (12)$$

Полученные решения в дальнейшем используются Г.М. Коммунаром как входная информация для модели внутрипластового обезжелезивания подземных вод, что в конечном итоге позволяет определить объем откачки W_0 в зависимости от принятого объема закачки W_3 и соответствующий коэффициент полезности использования метода внутрипластовой обработки подземных вод в каждом конкретном случае.

Необходимые сведения из теории уравнений в частных производных. Запишем общее уравнение в частных производных, частный вид которого используется для описания процессов адсорбции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (13)$$

где a – некоторая положительная постоянная;

$u = u(t, r)$ – неизвестная скалярная функция двух независимых переменных t, r .

Следуя стандартным руководствам по теории уравнений в частных производных первого порядка [4], укажем подходы к нахождению общего решения данного уравнения.

Выполним замену независимой переменной r на s по формуле:

$$r^2 = s, \quad s > 0. \quad (14)$$

С учетом того, что

$$r = \sqrt{s}, \quad \frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2r},$$

найдем частную производную:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dr} = \frac{\partial u}{\partial s} 2r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 2 \frac{\partial u}{\partial s}.$$

⁵ См. сноску 3, с. 219.

В результате исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2a \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad (15)$$

где

$$u = u(t, s), \quad s = r^2.$$

Составим уравнение характеристик для полученного уравнения:

$$dt = -\frac{ds}{2a},$$

что является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

Поэтому общее решение уравнения характеристик дается формулой:

$$t - \frac{1}{2a}s = C, \quad (16)$$

где C – произвольная вещественная постоянная.

Тогда общее решение приведенного уравнения будет иметь вид:

$$u(t, s) = \Phi\left(t - \frac{1}{2a}s\right), \quad (17)$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция, которая в дальнейшем может определяться из начальных и краевых условий исходя из постановки конкретной задачи. Отсюда, возвращаясь к переменной r , находим общее решение исходного уравнения:

$$u(t, r) = \Phi\left(t - \frac{1}{2a}r^2\right). \quad (18)$$

Анализ математического аппарата модели Г.М. Коммунара. Ход решения системы (1), (2) с условиями (8), (9) в [3, гл. 21] описан лишь частично. При этом построение решений производится с помощью преобразования Лапласа. Такой подход к решению хотя и достаточно эффективен, но не дает возможности выяснить сущность процессов, описываемых данным уравнением.

Поэтому мы получим искомые решения другим, более непосредственным путем. Сначала найдем общее решение второго уравнения системы (1), (2). Оно легко решается на основании свойства функции δ :

$$\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau = H(t) = \bar{H}(-t),$$

справедливого для любого начального значения $t_0 \leq 0$.

Возьмем нулевое начальное значение $t_0 = 0$ и проинтегрируем обе части исследуемого уравнения:

$$\int_0^t \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} = \int_0^t C_{O_2}^* \delta(\tau - \lambda_0) d\tau,$$

откуда, после замены независимой переменной и пределов интегрирования в правой части, имеем:

$$C_{\bar{O}_2}(t, r) - C_{\bar{O}_2}(0, r) = \int_{-\lambda_0}^{t-\lambda_0} C_{O_2}^* \delta(\tau) d\tau = C_{O_2}^* H(t - \lambda_0).$$

С учетом начального условия (3) отсюда получаем решение:

$$C_{\bar{O}_2}(t, r) = C_{O_2}^* H(t - \lambda_0). \quad (19)$$

Решение (19) не совпадает с решением (9), приведенным в [3], запись которого в стандартных обозначениях нами дана в формуле (12). Это означает, что в монографии [3, гл. 21] в формуле (21.9 б) на странице 219 допущена ошибка.

Но данная формула становится правильной, если считать, что в ней H – стандартное обозначение функции Хевисайда, а не обозначение единичной функции, как используется в исходных расчетах⁶.

⁶ См. сноску 3.

Прежде чем переходить к решению уравнения (1), проанализируем вывод формул для основных геометрических характеристик процесса «зарядки».

Скачок найденного решения $C_{O_2}(t, r)$ происходит на линии $t = \lambda_0$, поэтому граница фронта адсорбции $r^*(t)$ с учетом определения величины λ_0 находится из условия:

$$t = \lambda_0 = \frac{(n_0 + \Gamma_{O_2})(r^*(t)^2 - r_0^2)}{2q_3}.$$

Выполняя необходимые преобразования, отсюда последовательно находим:

$$r^*(t)^2 - r_0^2 = \frac{2q_3 t}{n_0 + \Gamma_{O_2}}$$

и

$$r^*(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2q_3 t}{n_0 + \Gamma_{O_2}}},$$

что совпадает с формулой (21.10)⁷.

Положение фронта поршневого вытеснения r_f определяется из геометрических соображений. В момент времени t после начала закачки объем закачиваемой воды равен $Q_3 t$. Согласно предположениям модели он размещается в цилиндре с высотой M , где M – мощность пласта, ось которого совпадает с осью скважины, а его радиус и есть расстояние r_f до границы фронта вытеснения. Объем данного цилиндра равен $\pi r_f^2 M$. При этом для размещения закачанной воды используется только доступный объем пор, причем из него исключается объем самой скважины. В итоге имеем:

$$Q_3 t = \pi(r_f^2 - r_0^2) M n_0.$$

Отсюда находим:

$$r_f^2 - r_0^2 = \frac{Q_3 t}{\pi M n_0} = \frac{2q_3 t}{n_0}$$

и

$$r_f = \sqrt{r_0^2 + \frac{2q_3 t}{n_0}}.$$

Соответственно, к моменту окончания закачки итоговое положение фронта вытеснения находится по формуле:

$$r_f^* = r_f(t_3) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2q_3 t_3}{n_0}}. \quad (20)$$

Финальное расположение фронта адсорбции определяется аналогично:

$$R_0 = r^*(t_3) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2q_3 t_3}{n_0 + \Gamma_{O_2}}}. \quad (21)$$

Величина λ_0 вводится формулой (21.3) на странице 218 [3] без объяснения ее происхождения, несмотря на то, что эта величина, как можно видеть из сказанного, определяет все важнейшие параметры процесса «зарядки», а также и его ход. Мы предполагаем, что обоснование формулы (21.3) и роли величины λ_0 в рассматриваемой модели может быть осуществлено на основе следующих соображений.

Согласно описанию модели процесса зарядки на странице 219 [3] в области $r_0 < r < r^*(t)$ в момент времени t концентрация кислорода в воде равна ее начальной концентрации C_{O_2} , а концентрация закрепленного на породах кислорода равна максимуму $C_{O_2}^*$.

⁷ См. сноску 3.

В момент времени t объем воды, закачанной в пласт, равен $Q_3 t$, а масса кислорода, заключенного в ней, – $C_{O_2} Q_3 t$. Она должна быть распределена между водой в порах, объем которой равен $n_0 V(t)$, где $V(t) = \pi M (r^{*2}(t) - r_0^2)$, с той же концентрацией C_{O_2} , и адсорбированным кислородом, концентрация которого (в расчете на единицу геометрического объема $V(t)$) равна $C_{CO_2}^* = \Gamma_{O_2} C_{O_2}$, т.е. максимально возможной концентрации, и, соответственно, масса которого равна $V(t) \Gamma_{O_2} C_{O_2}$.

В итоге имеем уравнение баланса:

$$Q_3 t C_{O_2} = V(t) n_0 C_{O_2} + V(t) \Gamma_{O_2} C_{O_2}, \quad (22)$$

откуда, сокращая на C_{O_2} , получаем:

$$Q_3 t = V(t) n_0 + V(t) \Gamma_{O_2}$$

или

$$t = \frac{\pi M (r^{*2}(t) - r_0^2) (n_0 + \Gamma_{O_2})}{Q_3} = \frac{(n_0 + \Gamma_{O_2}) (r^{*2}(t) - r_0^2)}{2q_3},$$

что совпадает с λ_0 , введенным формулой (21.3) выше. Таким образом, величина λ_0 действительно имеет смысл момента наступления скачка концентрации кислорода $C_{O_2} = C_{O_2}(t, r)$ в точках на расстоянии r от оси скважины при мгновенной адсорбции кислорода, и можно утверждать, что она почти полностью определяет весь процесс.

Перейдем теперь к решению уравнения (1). Его решение мы получим на основе приведенного выше общего решения (17) уравнения (19).

Легко видеть, что вся область (t, r) разбивается линией $t = \lambda_0$ на две части. Согласно описанию процесса в левой верхней части (область I) имеем $C_{O_2} = C_{O_2}$, а в правой нижней $C_{O_2} = 0$ (область II). Проверим, соответствует ли это исследуемому уравнению.

Как в области I, так и в области II уравнение имеет вид:

$$n_0 \frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \frac{q_3}{r} \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} = 0.$$

Как показано выше, уравнение семейства характеристик для данного уравнения также имеет вид:

$$t - \frac{n_0}{2q_3} r^2 = C, \quad (23)$$

где C – принятый параметр.

Поэтому общее решение приведенного уравнения задается формулой:

$$C_{O_2} = \Phi \left(t - \frac{n_0}{2q_3} r^2 \right), \quad (24)$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция.

На линии $t = \lambda_0$ в уравнение входит δ -функция и, соответственно, на этой линии может происходить скачок решения. Кроме этого, область II делится линией $r = r_f(t)$ на две подобласти: II_A, заполненную закачанной водой с нулевой концентрацией кислорода, и II_B, заполненную подземными водами. Линия $r = r_f(t)$ имеет уравнение:

$$r_f^2 - r_0^2 = \frac{2q_3 t}{n_0},$$

и поэтому является характеристикой заданного уравнения. Все характеристики этого уравнения, проходящие через ось в точках с координатой $r > r_0$, лежат ниже ее. Поэтому значение любого решения уравнения в области II_B определяется краевыми условиями, заданными на оси r . Характеристики, проходящие через прямую $r = r_0$ при $t \geq 0$ лежат выше этой линии, оставаясь в области I или II_A. Но они все пересекают линию скачка $t = \lambda_0$, которая цели-

ком лежит выше линии $r = r_f(t)$, т.к. $n_0 + \Gamma_{O_2} > n_0$. Поэтому значения любого решения уравнения в области I определяются краевым условием, заданным на линии $r = r_0$, $t \geq 0$. Лишь значения решения в области Π_A зависят от скачка, задаваемого δ -функцией.

Из начального условия (6) при $r > r_0$ получаем, что в области Π_B выполнено равенство

$$\Phi_{\Pi_B} \left(t - \frac{n_0}{2q_3} r^2 \right) = 0.$$

Для области I имеем из краевого условия (7) тождество $C_{O_2}(t, r) = C_{O_{20}}$, верное при всех t, r из этой области.

Для отыскания решения в области Π_A вычислим полную производную $\frac{dC_{O_2}}{dt}$ вдоль характеристик, начинающихся на прямой $r = r_0$.

Уравнение такой характеристики запишем в виде:

$$t - \frac{n_0}{2q_3} (r^2 - r_0^2) = \mu,$$

где параметр семейства характеристик (произвольная постоянная) удовлетворяет неравенству:

$$\mu > -\frac{n_0}{2q_3} r_0^2.$$

Вдоль этой линии в результате дифференцирования по t имеем:

$$1 - \frac{n_0}{2q_3} 2r \frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q_3}{n_0 r}.$$

Поэтому:

$$\frac{dC_{O_2}}{dt} = \frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} \frac{q_3}{n_0 r}.$$

Заметим, что уравнения исходной системы (1), (2) можно свести к одному уравнению:

$$n_0 \frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} + \frac{q_3}{r} \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} + C_{O_2}^* \delta(t - \lambda_0) = 0$$

или

$$\frac{\partial C_{O_2}}{\partial t} = -\frac{q_3}{n_0 r} \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} - \frac{1}{n_0} C_{O_2}^* \delta(t - \lambda_0).$$

Подставляя найденное выражение для $\frac{\partial C_{O_2}}{\partial t}$ в полную производную, получим:

$$\frac{dC_{O_2}}{dt} = -\frac{q_3}{n_0 r} \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} - \frac{1}{n_0} C_{O_2}^* \delta(t - \lambda_0) + \frac{\partial C_{O_2}}{\partial r} \frac{q_3}{n_0 r} = \frac{C_{O_2}^* \delta(t - \lambda_0)}{n_0}.$$

Вдоль характеристики выполняется равенство:

$$\frac{r^2 - r_0^2}{2q_3} = \frac{t - \mu}{n_0}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} t - \lambda_0 &= t - (n_0 + \Gamma_{O_2}) \frac{r^2 - r_0^2}{2q_3} = t - (n_0 + \Gamma_{O_2}) \frac{t - \mu}{n_0} = \\ &= t \left(1 - \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{n_0} \right) + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{n_0} = -\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{n_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Значит, выражение для искомой полной производной вдоль характеристики имеет вид:

$$\frac{dC_{O_2}}{dt} = \frac{C_{O_2}^* \delta \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{n_0} \right)}{n_0}.$$

По определению δ -функции и свойству ее четности $\delta(-t) = \delta(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(-as + b) ds &= \int_{-\infty}^t \delta(as - b) ds = \\ \int_{-\infty}^{\frac{at-b}{a}} \delta(\tau) \frac{d\tau}{a} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\frac{at-b}{a}} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{a} H(at - b) = \frac{1}{a} (1 - H(-at + b)). \end{aligned}$$

Пусть $C_\mu(t)$ – сужение функции $C(t, r)$ на характеристики. Тогда:

$$C_\mu(t) = C_{O_{20}} + \int_{\mu}^t \frac{dC_\mu}{dt} dt = \int_{\mu}^t \frac{C_{O_2}^* \delta \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} \right)}{n_0} dt.$$

Так как:

$$-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} = 0 \text{ при } t = \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} > \mu,$$

то точка сингулярности функции $\delta \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} \right)$ лежит на числовой оси правее точки $t = \mu$. Поэтому:

$$\int_{-\infty}^{\mu} \delta \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{n_0} \right) dt = 0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} C_\mu(t) &= C_{O_{20}} - \frac{C_{O_2}^*}{n_0} \int_{-\infty}^t \delta \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} \right) dt = \\ &= C_{O_{20}} - \frac{C_{O_2}^*}{n_0} \frac{n_0}{\Gamma_{O_2}} H \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} \right) = C_{O_{20}} - \frac{C_{O_2}^*}{\Gamma_{O_2}} H \left(-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что по определению константы Генри $\frac{C_{O_2}^*}{\Gamma_{O_2}} = C_{O_{20}}$, а в силу уравнения (22) имеем:

$$-\frac{\Gamma_{O_2}}{n_0} t + \mu \frac{n_0 + \Gamma_{O_2}}{\Gamma_{O_2}} = t - \lambda_0.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} C_\mu(t) &= C_{O_{20}} - C_{O_{20}} H(t - \lambda_0) = \\ C_{O_{20}} (1 - H(t - \lambda_0)) &= C_{O_{20}} \bar{H}(t - \lambda_0). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку характеристики полностью покрывают область Π_A , объединяя все построенные выражения, окончательно получаем выражение для значений концентрации кислорода, совпадающее с решением (8) в форме (11).

$$C_{O_2}(t, r) = C_{O_2_0} \bar{H}(t - \lambda_0).$$

Заключение. В результате проведенного анализа методики моделирования внутрипластовой обработки подземных вод по Г.М. Коммунару установлено следующее.

Решение системы уравнений (1), (2) с краевыми (6), (7), приведенное в работе⁸, содержит неточность в выражении для концентрации адсорбированного кислорода. В настоящей работе эта неточность устранена.

Выражение для концентрации кислорода, растворенного в воде, является правильным и подтверждено при альтернативном подходе к поиску решения рассматриваемой системы, который позволяет более глубоко проникнуть в динамику процессов, описываемых моделью.

При необходимости все основные черты процесса «зарядки» могут быть описаны без привлечения уравнений (1) и (2), а лишь на основе уравнения баланса (22). Тем не менее использование уравнений (1) и (2) более удобно для расчетов и анализа процесса «зарядки» в рамках всей модели обработки подземных вод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуринович А.Д., Ваврженюк П., Ельский И. Возможности удаления из воды железа в водоносном пласте на примере существующих водозаборных скважин // Вода и экология: проблемы и решения. – 2013. – Т. 2, № 54. – С. 12–20.
2. Основные пути и решения проектирования систем водоподготовки малых населенных пунктов в Республике Беларусь / В.Д. Ющенко, Е.С. Велого, Е.И. Рашкевич и др. // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф, Стр-во. Приклад. науки. – 2021. – № 16. – С. 124–130.
3. Плотников Н.А., Алексеев В.С. Проектирование и эксплуатация водозаборов подземных вод. – М.: Стройиздат, 1990. – 256 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2006. – 472 с.

REFERENCES

1. Gurinovich, A.D., Vavrzhenyuk, P. & El'skii, I. (2013). Vozmozhnosti udaleniya iz vody zheleza v vodonosnom plaste na primere sushchestvuyushchikh vodozabornykh skvazhin [Possibilities of removing iron from water in an aquifer using the example of existing water wells]. *Voda i ekologiya: problemy i resheniya* [Water and ecology: problems and solutions], 2(54), 12–20. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Yushchenko, V.D., Velyugo, E.S., Rashkevich, E.I., Prosolov, V.P. & Sedlukha, S.V. (2021). Osnovnye puti i resheniya proektirovaniya sistem vodopodgotovki malyykh naselennykh punktov v Respublike Belarus' [The main ways and solutions for designing water treatment systems for small settlements in the Republic of Belarus]. *Vestn. Polots. gos. un-ta. Ser. F, Str-vo. Priklad. nauki* [Vestnik of Polotsk State University. Part F, Constructions. Applied Sciences], (16), 124–130. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Plotnikov, N.A. & Alekseev, V.S. (1990). *Proektirovaniye i ekspluatatsiya vodozaborov podzemnykh vod*. Moscow: Stroiizdat. (In Russ.).
4. Stepanov, V.V. (2006). *Kurs differentsial'nykh uravnenii*. Moscow: URSS. (In Russ.).

Поступила 12.09.2023

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF "CHARGING" OXYGEN OF WATER-BEARING ROCKS IN THE PROCESS OF IN-SITU TREATMENT OF GROUNDWATER

H. RASHKEVICH¹⁾, V. YUSHCHENKO²⁾, E. MAKAROV³⁾, A. DEMENCHUK⁴⁾
^{1), 2)}Vitebsk Regional Municipal Unitary Enterprise
of water supply and sewage "Vitebskoblvodokanal",
^{3), 4)}State Scientific Institution "Institute of Mathematics
of the National Academy of Sciences of Belarus", Minsk)

The article describes the method of in-situ groundwater treatment technology, the conditions for modeling the process of water injection into the water-bearing rock, the analysis of the obtained mathematical equations.

Keywords: technology and features of the method of in-situ treatment of groundwater, modeling of the processes of "charging" water-bearing rocks, analysis of boundary conditions.

⁸ См. сноску 3.