

## СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 628.11(628.16)

DOI 10.52928/2070-1683-2024-36-1-2-13

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УДАЛЕНИЯ ЖЕЛЕЗА  
В ПРОЦЕССЕ ВНУТРИПЛАСТОВОЙ ОБРАБОТКИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

*Е.И. РАШКЕВИЧ*<sup>1)</sup>, канд. техн. наук *В.Д. ЮЩЕНКО*<sup>2)</sup>,  
*д-р физ.-мат. наук Е.К. МАКАРОВ*<sup>3)</sup>, *д-р физ.-мат. наук А.К. ДЕМЕНЧУК*<sup>4)</sup>  
(<sup>1), 2)</sup> *Витебское областное коммунальное унитарное предприятие*  
*водопроводно-канализационного хозяйства «Витебскоблводоканал»,*  
<sup>3), 4)</sup> *Государственное научное учреждение «Институт математики*  
*Национальной академии наук Беларуси»*

<sup>1)</sup> *selenaruko@gmail.com*, <sup>2)</sup> *yuvd46@mail.ru*, <sup>3)</sup> *jcm@im.bas-net.by*, <sup>4)</sup> *demenchuk@im.bas-net.by*

В статье показано, что приведенные в литературных источниках краевые условия для системы уравнений модели, описывающих процесс внутрипластовой обработки подземной воды, содержат неточности и опечатки и не дают возможности получить решение, отвечающее реальным условиям. Для нахождения такого решения предложена постановка краевого условия на концентрацию осажденного кислорода на подвижной границе контакта подземных вод и ранее закачанной аэрированной воды.

**Ключевые слова:** метод внутрипластовой обработки подземных вод, концентрация осажденного кислорода в водоносных слоях, краевые условия контакта подземных вод с адсорбированным кислородом, математическая модель окисления железа.

**Введение.** Метод обезжелезивания воды непосредственно в водоносном пласте скважин *in-situ* в исполнении системы *Subterra* для малых населенных пунктов был реализован в Витебской области на примере спаренных скважин [1]. Сущность этого метода состоит в том, что в каждой отдельной скважине, непосредственно внутри водоносного пласта, происходят все стадии процесса обработки подземных вод<sup>1</sup> [2; 3]. Главной из них, от которой зависят все последующие, является закачка обогащенной кислородом воды в водоносный пласт. В ее ходе осуществляется закрепление кислорода на породах пласта (их «зарядка» кислородом) и создание внутрипластовой окислительной зоны. Заключительной же стадией является откачка подземных вод через предварительно созданную окислительную зону. При этом происходит окисление растворенных в подземных водах соединений железа и их иммобилизация на породах пласта.

Для успешного применения этого метода необходимо знать гидрогеологические условия и параметры состояния водоносных слоев скважин, предназначенных для применения этого метода [4–7].

Г.М. Коммунаром была предложена математическая модель процессов, происходящих при применении данного метода. Эта модель описана в [8, глава 21], где, однако, не приводится ряд существенных промежуточных выкладок, что затрудняет ее практическое использование. Для уравнений модели, описывающих процесс окисления железа, приведены основные решения по выбранным заданным граничным и начальным условиям, но не указан способ их получения. При этом имеет место несоответствие предъявляемых решений и граничных условий.

В связи с этим в предыдущей статье [9] был проведен детальный анализ математического аппарата модели Г.М. Коммунара в части, относящейся к процессу закрепления кислорода и создания окислительной зоны, в результате восстановлены недостающие выкладки, устранены обнаруженные неточности и представлена уточненная математическая модель зарядки пласта кислородом.

**Цель и задачи работы.** Данная статья – продолжение предыдущей, и главной целью является применение ранее полученной уточненной модели к основной поставленной задаче: на базе результатов предыдущей статьи о распределении кислорода (несколько фиктивных, ибо там распределение достаточно искусственное, о чем и сказано в [9]) получить уточненную модель окисления железа. Для этого выполнен более детальный анализ математического аппарата модели Г.М. Коммунара в части, относящейся к процессу окисления железа, с обоснованием краевых условий, которые адекватны рассматриваемой задаче, также полностью восстанавливается процесс получения соответствующих уравнений.

Таким образом, предмет исследований в настоящей статье: анализ математической составляющей модели Коммунара, восполнение недостающих вычислений, установление неточностей и их исправление на основе знаний о реально протекающих процессах.

<sup>1</sup> Коммунар Г.М. Внутрипластовая очистка подземных вод для целей водоснабжения: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.04 / НИИ ВОДГЕО. – М., 1987. – 39 с.

Rott U., Meyer C. Residue-free Removal of Arsenic, Iron, Manganese, Ammonia, Nitrate and Colour from Groundwater // Innovations in Conventional and Advanced Water Treatment Processes: Conference Proceedings, Amsterdam, 26–29 Sept. 2000. – Amsterdam, 2000. – P. 8–14.

В совокупности результаты настоящей работы и статьи [9] позволят в дальнейшем обосновать методику расчета систем водоснабжения малых населенных пунктов без применения графоаналитического метода определения входящих в нее неизвестных параметров на основе экспериментальных данных, полученных непосредственно в водоносном пласте скважин *in-situ*.

**Динамика окисления железа при равномерном начальном распределении адсорбированного кислорода.** Для последующих рассуждений и выкладок принимаются обозначения, такие же, как в статье [9]. Некоторые уравнения могут повторяться в данной статье. Это связано с их влиянием на общий ход решения.

В анализируемой модели предполагается, что предварительно созданная при закачке обогащенной кислородом воды окислительная зона имеет вид цилиндра с высотой равной мощности пласта и осью, совпадающей с осью скважины. Начальное распределение кислорода предполагается равномерным в цилиндре радиуса  $R_0$ , а в цилиндрическом кольце, заключенном между цилиндрами радиуса  $R_0$  и  $r_f^*$ , осажденный кислород считается отсутствующим. Предполагается также, что потоки воды внутри пласта в процессе откачки являются радиальными, то есть направлены перпендикулярно оси скважины и направлены от нее вдоль радиусов цилиндра. При движении потока подземной воды через окислительную зону ее очистка происходит за счет реакции окисления ионов железа кислородом, осажденным на породах пласта, происходящей только на активированной поверхности этих пород без вовлечения в процесс кислорода, растворенного в воде.

В этих предположениях процесс окисления железа подземных вод в зоне «заряженного» кислородом водяного пласта описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$n_0 \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial t} - \frac{q_0}{r} \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial r} + \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial t} = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}. \quad (2)$$

Неизвестными в данной системе уравнений является пара функций двух переменных, зависящих от времени  $t$  и радиуса  $r$ , а также технологических и химических параметров процесса:

$$C_{Fe^{2+}} = C_{Fe^{2+}}(t, r) \text{ и } C_{\bar{O}_2} = C_{\bar{O}_2}(t, r).$$

Согласно [1, формулы 21.23а, 21.23б] процесс окисления железа при равномерном начальном распределении адсорбированного кислорода определяется краевыми условиями:

$$\begin{aligned} t = t^*, \quad r \leq R_0, \quad C_{\bar{O}_2}(t, r) = C_{Fe^{2+}}^*(t, r) = 0; \\ t \geq t^*, \quad r = R_0, \quad C_{Fe^{2+}}(t, r) = C_{Fe^{2+}}. \end{aligned}$$

Приведенные формулы содержат опечатку. Условия, соответствующие фактическим, таковы:

$$\begin{aligned} t = t^*, \quad r \leq R_0, \quad C_{\bar{O}_2}(t, r) = C_{\bar{O}_2}^*, \quad C_{Fe^{2+}}(t, r) = 0; \\ t \geq t^*, \quad r = R_0, \quad C_{Fe^{2+}}(t, r) = C_{Fe^{2+}}. \end{aligned}$$

Однако и эти, исправленные, условия не могут определять требуемое решение системы (1), (2), так как условие на кислород задано полностью в зоне ранее закачанной воды, а эта зона отделена от интересующей нас зоны взаимодействия подземных вод и осажденного на породах пласта кислорода границей контакта закачанной и подземной воды, по которой проходит разрыв функции  $C_{Fe^{2+}}(t, r)$ , на котором нет никаких условий сопряжения.

Расстояние от оси скважины до границы контакта закачанной и подземной воды  $r_R(t)$  может быть определено из условия:

$$t = t^* + \frac{R_0^2 - r_R^2(t)}{2q_0} n_0. \quad (3)$$

Соответственно, область переменных  $(t, r)$ , в которой величины концентраций  $C_{Fe^{2+}} = C_{Fe^{2+}}(t, r)$  и  $C_{\bar{O}_2} = C_{\bar{O}_2}(t, r)$  определяются уравнениями (1) и (2), ограничена линией контакта (3) и двумя полупрямыми  $t \geq t_0^*$ ,  $r = r_0$ , при этом краевое условие должно задаваться либо на границе этой области, либо на границе какой-либо ее подобласти. Точный вид правильного краевого условия, дающего нужное решение, будет приведен и обоснован ниже.

Введем замену независимых переменных  $t, r$  по формулам:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{R_0^2 - r^2}{2q_0}n_0; \\ \tau &= t - t^* + \lambda,\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\lambda, \tau$  – новые независимые переменные.

Найдем частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial t} &= \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} 0 + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} 1 = \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial r} &= \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{2n_0r}{2q_0} + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{2n_0r}{2q_0} = \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{n_0r}{q_0} + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{n_0r}{q_0}; \\ \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial t} &= \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \lambda} 0 + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} 1 = \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial r} &= \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \lambda} \frac{2n_0r}{2q_0} + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} \frac{2n_0r}{2q_0} = \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \lambda} \frac{n_0r}{q_0} + \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} \frac{n_0r}{q_0}.\end{aligned}$$

С новыми независимыми переменными система (1), (2) примет вид

$$\begin{aligned}n_0 \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} - \frac{q_0}{r} \left( \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{n_0r}{q_0} + \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{n_0}{q_0} \right) + \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}} &= 0; \\ \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} &= -\beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}},\end{aligned}$$

или, после раскрытия скобок

$$\begin{aligned}n_0 \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} - \frac{q_0}{r} \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} \frac{n_0r}{q_0} - \frac{q_0}{r} \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tau} \frac{n_0}{q_0} + \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}} &= 0; \\ \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} &= -\beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}\end{aligned}$$

и необходимых упрощений

$$n_0 \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} = \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}.$$

В полученной системе выполним еще одну замену независимых переменных  $\lambda, \tau$  по формулам:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \lambda; \\ \tilde{\tau} &= -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \tau,\end{aligned}\quad (6)$$

где  $\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}$  – новые независимые переменные.

Вычисляя частные производные

$$\frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \lambda} = \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tilde{\lambda}} \frac{d\tilde{\lambda}}{d\lambda} = -\frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tilde{\lambda}} \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0};$$

$$\frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tau} = \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tilde{\tau}}$$

и подставляя их в систему, получим

$$-n_0 \frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tilde{\lambda}} \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} = -\sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}};$$

$$\frac{\beta \sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tilde{\tau}} = \beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}$$

или

$$\frac{\partial C_{Fe^{2+}}}{\partial \tilde{\lambda}} = C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial C_{\bar{O}_2}}{\partial \tilde{\tau}} = C_{\bar{O}_2} C_{Fe^{2+}},$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \lambda; \quad \lambda = -\frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0;$$

$$\tilde{\tau} = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \tau; \quad \tau = t - t^* + \lambda.$$

Для того чтобы получить общее решение системы (7) независимо от налагаемых на входящие в нее физические величины дополнительных условий, рассмотрим вспомогательную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = uv; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = uv,$$

где  $x, y$  – независимые переменные;

$u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  – неизвестные скалярные функции.

Будем считать, что искомые функции  $u$  и  $v$  определены, непрерывны и положительны на некотором множестве  $\Omega$ , и имеют на этом множестве смешанные производные второго порядка.

Разделим первое уравнение вспомогательной системы на  $u$ , а второе – на  $v$ :

$$\frac{\partial u}{u \partial x} = v; \quad \frac{\partial v}{v \partial y} = u. \tag{8}$$

Прологарифмируем:

$$\frac{\partial(\ln u)}{\partial x} = v; \quad \frac{\partial(\ln v)}{\partial y} = u. \tag{9}$$

Продифференцируем обе части первого уравнения по  $y$ , а второго – по  $x$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \ln u = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln v = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{10}$$

Отметим, что в силу допущения о наличии смешанных производных второго порядка, порядок дифференцирования не имеет значения. Поэтому последнюю систему запишем в виде, где в правых частях стоят соответственно левые части вспомогательной системы:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln u = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln v = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тогда, с учетом строения вспомогательной системы, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln u = uv; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln v = uv.$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln u - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln v = 0 \quad (11)$$

или на основании правил дифференцирования и логарифмирования

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln u - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \ln \frac{u}{v} \right) = 0.$$

В итоге вспомогательная система сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \ln \frac{u}{v} \right) = 0. \quad (12)$$

Выполним поэтапное интегрирование полученного уравнения, сначала по переменной  $y$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \frac{u}{v} \right) = -C_1(x),$$

а затем по переменной  $x$  :

$$\ln \frac{u}{v} = C_1(x) + C_2(y),$$

где  $C_1(x), C_2(y)$  – произвольные функции своих аргументов.

Поэтому последнее уравнение для удобства дальнейшего изложения можно записать в виде:

$$\ln \frac{u}{v} = -C_1(x) + C_2(y),$$

считая при этом, что  $-C_1(x) + C_2(y) > 0$ . Из полученного уравнения находим:

$$\frac{u}{v} = e^{-C_1(x) + C_2(y)} = \frac{e^{C_2(y)}}{e^{C_1(x)}},$$

откуда, приняв обозначения

$$e^{C_2(y)} = R(y); \quad e^{C_1(x)} = S(x),$$

можно получить следующие зависимости между искомыми функциями:

$$u = \frac{R(y)}{S(x)} v; \quad v = \frac{S(x)}{R(y)} u.$$

Тогда вспомогательная система примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u^2 \frac{S(x)}{R(y)}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v^2 \frac{R(y)}{S(x)},$$

или после элементарных преобразований:

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{S(x)}{R(y)}; \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{R(y)}{S(x)}. \quad (13)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции [10], из полученных уравнений находим выражения для частных производных, содержащих искомые функции:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u} \right) = \frac{S(x)}{R(y)}; \quad -\frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{R(y)}{S(x)}.$$

Проинтегрируем обе части первого уравнения по  $x$ , а второго – по  $y$ :

$$\int -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u} \right) dx = \int \frac{S(x)}{R(y)} dx; \quad \int -\frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{1}{v} \right) dy = \int \frac{R(y)}{S(x)} dy,$$

получим:

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{R(y)} (\int S(x) dx + \varphi_1(y)); \quad -\frac{1}{v} = \frac{1}{S(x)} (\int R(y) dy + \varphi_2(x)),$$

где  $\varphi_1(y), \varphi_2(x)$  – произвольные функции своих аргументов.

Из полученных соотношений находим общее решение вспомогательной системы:

$$u = -\frac{R(y)}{\int S(x) dx + \varphi_1(y)}; \quad v = -\frac{S(x)}{\int R(y) dy + \varphi_2(x)}, \quad (14)$$

считая при этом, что

$$u = \int S(x) dx + \varphi_1(y) \neq 0; \quad \int R(y) dy + \varphi_2(x) \neq 0; \quad (x, y) \in \Omega.$$

Введем обозначения:

$$\int R(y) dy = a(y); \quad \int S(x) dx = b(x),$$

из которых следует, что

$$R(y) = a'(y); \quad S(x) = b'(x).$$

Поэтому общее решение вспомогательной системы можно записать в виде:

$$u = \frac{-a'(y)}{b(x) + \varphi_1(y)}; \quad v = \frac{-b'(x)}{a(y) + \varphi_2(x)}, \quad (15)$$

где

$$e^{C_2(y)} = R(y); \quad e^{C_1(x)} = S(x); \quad a(y) = \int R(y) dy = \int e^{C_2(y)} dy; \quad b(x) = \int S(x) dx = \int e^{C_1(x)} dx.$$

Покажем, что между функциями  $a(y)$  и  $\varphi_1(y)$ , а также  $b(x)$  и  $\varphi_2(x)$  существует зависимость. Для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a'(y)b'(x)}{(b(x) + \varphi_1(y))^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{b'(x)a'(y)}{(a(y) + \varphi_2(x))^2}. \quad (16)$$

С другой стороны, в силу строения вспомогательной системы, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a'(y)b'(x)}{(b(x)+\varphi_1(y))(a(y)+\varphi_2(x))}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{b'(x)a'(y)}{(b(x)+\varphi_1(y))(a(y)+\varphi_2(x))}.$$

Из полученных равенств следует, что знаменатели их правых частей равны между собой:

$$(b(x)+\varphi_1(y))^2 = (a(y)+\varphi_2(x))^2 = (b(x)+\varphi_1(y))(a(y)+\varphi_2(x)).$$

Значит:

$$b(x)+\varphi_1(y) = a(y)+\varphi_2(x)$$

или после группировки:

$$b(x)-\varphi_2(x) = a(y)-\varphi_1(y).$$

Так как левая часть полученного равенства является функцией только от  $x$ , а правая – функцией от  $y$ , то такое равенство возможно лишь тогда, когда эти функции постоянные:

$$b(x)-\varphi_2(x) = a(y)-\varphi_1(y) \equiv -C^* = \text{const}.$$

Следовательно:

$$\varphi_2(x) = b(x) + C^* \quad \varphi_1(y) = a(y) + C^*,$$

т.е. функции  $a(y)$  и  $\varphi_1(y)$ , а также  $b(x)$  и  $\varphi_2(x)$  отличаются друг от друга на одну и ту же постоянную. Поскольку эти функции выбирались произвольными, то можно положить  $C^* = 0$ . Тогда

$$\varphi_2(x) = b(x) \quad \varphi_1(y) = a(y).$$

Таким образом, с учетом принятых обозначений находим общее решение вспомогательной системы:

$$u = \frac{-a'(y)}{b(x)+a(y)}; \quad v = \frac{-b'(x)}{a(y)+b(x)}, \quad (17)$$

где  $a(y) = \int e^{C_2(y)} dy$ ,  $b(x) = \int e^{C_1(x)} dx$ ;

$C_1(x)$ ,  $C_2(y)$  – произвольные функции своих аргументов, удовлетворяющие условию:  $-C_1(x) + C_2(y) > 0$ .

Заметим, что последнее условие является следствием способа получения общего решения и не является обязательным. Нетрудно проверить, что функции (17) удовлетворяют вспомогательной системе при любом выборе дифференцируемых функций  $a(y)$ ,  $b(x)$  всюду, где их сумма отлична от нуля.

Так как система (15) является полным аналогом вспомогательной системы, общее решение которой найдено:

$$u = \frac{-a'(y)}{b(x)+a(y)}; \quad v = \frac{-b'(x)}{a(y)+b(x)},$$

общее решение системы имеет такую же структуру:

$$C_{Fe^{2+}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{-a'(\tilde{\tau})}{b(\tilde{\lambda})+a(\tilde{\tau})}; \quad C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{-b'(\tilde{\lambda})}{b(\tilde{\lambda})+a(\tilde{\tau})}. \quad (18)$$

Граничные условия, обеспечивающие получение нужного решения, имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} = 0; & \quad C_{Fe^{2+}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = C_{Fe^{2+}}; \\ \tilde{\tau} = 0; & \quad C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = C_{\bar{O}_2}^*; \quad C_{Fe^{2+}} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Первое условие совпадает с тем, что приведено в [8, глава 21], а именно: за наиболее дальним от скважины положением фронта адсорбции содержание железа такое же, как и в подземных водах (так как в этой зоне находятся только они). Второе условие задано на подвижной границе контакта закачанной и подземной воды и показывает, что в первый момент контакта заряженных кислородом пород и движущихся по направлению к скважине подземных вод концентрация адсорбированного кислорода максимальна. Подставим принятые граничные условия в общее решение.

1) При  $\tilde{\lambda} = 0$  имеем:

$$C_{Fe^{2+}}(0, \tilde{\tau}) = \frac{-a'(\tilde{\tau})}{b(0) + a(\tilde{\tau})} = C_{Fe_0^{2+}},$$

откуда получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения коэффициента  $a(\tilde{\tau})$ :

$$a'(\tilde{\tau}) + C_{Fe_0^{2+}} a(\tilde{\tau}) = -C_{Fe_0^{2+}} b(0).$$

Общее решение этого уравнения находится как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного:

$$a(\tilde{\tau}) = B e^{-C_{Fe_0^{2+}} \tilde{\tau}} - b(0), \quad (20)$$

где  $B$  – произвольная вещественная постоянная.  
Тогда:

$$a(0) = B e^{-C_{Fe_0^{2+}} \cdot 0} - b(0) = B - b(0). \quad (21)$$

2) При  $\tilde{\tau} = 0$  имеем:

$$C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, 0) = \frac{-b'(\tilde{\lambda})}{b(\tilde{\lambda}) + a(0)} = C_{\bar{O}_2}^*,$$

откуда получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения коэффициента  $b(\tilde{\lambda})$ :

$$b'(\tilde{\lambda}) + C_{\bar{O}_2}^* b(\tilde{\lambda}) = -C_{\bar{O}_2}^* a(0).$$

Общее решение этого уравнения также находится стандартным образом:

$$b(\tilde{\lambda}) = D e^{-C_{\bar{O}_2}^* \tilde{\lambda}} - a(0), \quad (22)$$

где  $D$  – произвольная вещественная постоянная, при этом

$$b(0) = D - a(0).$$

Как видим, значения  $a(0)$ ,  $b(0)$  связаны следующими равенствами:

$$a(0) = B - b(0); \quad b(0) = D - a(0),$$

из которых следует, что

$$B = D = a(0) + b(0).$$

Обозначим:

$$B = D = a(0) + b(0) = K.$$



Тогда формулы для коэффициентов  $a(\tilde{\tau})$  и  $b(\tilde{\lambda})$  примут вид:

$$a(\tilde{\tau}) = Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - b(0);$$

$$b(\tilde{\lambda}) = Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} - a(0).$$

Подставляя коэффициенты  $a(\tilde{\tau})$ ,  $b(\tilde{\lambda})$  в общее решение, находим решение поставленной краевой задачи:

$$\begin{aligned} C_{Fe^{2+}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) &= \frac{-\left(Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - K\right)'}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} - b(0) + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - a(0)} = \\ &= \frac{KC_{Fe0}2+e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}}}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - (a(0)+b(0))} = \frac{KC_{Fe0}2+e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}}}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - K} = \\ &= \frac{C_{Fe0}2+e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - 1}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) &= \frac{-\left(Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} - K\right)'}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} - a(0) + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - b(0)} = \\ &= \frac{KC_{\bar{O}_2}^*e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}}}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - (a(0)+b(0))} = \frac{KC_{\bar{O}_2}^*e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}}}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - (a(0)+b(0))} = \\ &= \frac{KC_{\bar{O}_2}^*e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}}}{Ke^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + Ke^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - K} = \frac{C_{\bar{O}_2}^*e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - 1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Произведем преобразование полученных формул.

Нами выведены формулы (первая и вторая) решения граничной задачи для системы (9):

$$C_{Fe^{2+}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{C_{Fe0}2+e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - 1}; \quad (25)$$

$$C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{C_{\bar{O}_2}^*e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^*\tilde{\lambda}} + e^{-C_{Fe0}2+\tilde{\tau}} - 1}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \lambda; & \lambda &= -\frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0; \\ \tilde{\tau} &= -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \tau; & \tau &= t - t^* + \lambda. \end{aligned}$$

Для сравнения этих формул с формулами [8] предварительно получим соотношение между новыми  $\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}$  и исходными независимыми переменными  $t, r$  :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \lambda = \frac{\sigma_{Fe^{2+}}}{n_0} \left( -\frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0 \right) = -\frac{\sigma_{Fe^{2+}} (R_0^2 - r^2)}{2q_0};$$

$$\tilde{\tau} = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \tau = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0 \right) = -\beta \sigma_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0 \right).$$

Сначала подставим эти соотношения в первую из формул:

$$C_{Fe^{2+}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{C_{Fe^{2+}} e^{-C_{Fe^{2+}} \left( \beta \sigma_{Fe^{2+}} \left( -\left( t - t^* \right) + \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0 \right) \right)}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^* \left( \frac{(R_0^2 - r^2) \sigma_{Fe^{2+}}}{2q_0} \right)} + e^{-C_{Fe^{2+}} \left( \beta \sigma_{Fe^{2+}} \left( -\left( t - t^* \right) + \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} n_0 \right) \right)} - 1}$$

откуда имеем:

$$\frac{C_{Fe^{2+}}(t, r)}{C_{Fe^{2+}}} = \frac{e^{\beta C_{Fe^{2+}} \sigma_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - n_0 \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} \right)}}{e^{C_{\bar{O}_2}^* \frac{(R_0^2 - r^2) \sigma_{Fe^{2+}}}{2q_0}} + e^{\beta C_{Fe^{2+}} \sigma_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - n_0 \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} \right)} - 1}$$

Подставим далее значения  $\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}$  во вторую из формул:

$$C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \frac{C_{\bar{O}_2}^* e^{-C_{\bar{O}_2}^* \left( \frac{(R_0^2 - r^2) \sigma_{Fe^{2+}}}{2q_0} \right)}}{e^{-C_{\bar{O}_2}^* \left( \frac{(R_0^2 - r^2) \sigma_{Fe^{2+}}}{2q_0} \right)} + e^{C_{Fe^{2+}} \left( \beta \sigma_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - n_0 \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} \right) \right)} - 1}$$

откуда имеем:

$$\frac{C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau})}{C_{\bar{O}_2}^*} = \frac{e^{\sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2}^* \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0}}}{e^{\sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2}^* \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0}} + e^{\beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - n_0 \frac{R_0^2 - r^2}{2q_0} \right)} - 1}$$

Обозначим:

$$T = \beta \sigma_{Fe^{2+}} C_{Fe^{2+}} \left( t - t^* - \frac{n_0 (R_0^2 - r^2)}{2q_0} \right);$$

$$X = \sigma_{Fe^{2+}} C_{\bar{O}_2}^* \frac{(R_0^2 - r^2)}{2q_0}.$$

После этого получаем решение поставленной задачи в виде, почти полностью совпадающем с решением, приведенным в [8], за исключением опечатки: в соответствующих формулах ошибочно присутствует величина  $C_{\bar{O}_2}^*$ , которую следует заменить на  $C_{\bar{O}_2}^*$ :

$$\frac{C_{Fe^{2+}}(t, r)}{C_{Fe^{2+}}} = \frac{e^T}{e^X + e^T - 1}; \quad (27)$$

$$\frac{C_{\bar{O}_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau})}{C_{\bar{O}_2}^*} = \frac{e^X}{e^X + e^T - 1}. \quad (28)$$

**Заключение.** Метод обезжелезивания воды непосредственно в водоносном пласте скважин *in-situ* в исполнении системы *Subterra* может быть применен для малых населенных пунктов.

Для более успешного рассмотрения протекания различных процессов в водоносных пластах необходимо получить математическую модель окисления и удаления железа из подземной воды.

В предложенном Г.М. Коммунаром решении по получению математической модели [8] не приводится ряд существенных промежуточных выкладок, что затрудняет ее практическое использование. При этом имеет место несоответствие предъявляемых решений и граничных условий.

Нами в статье [9] был проведен детальный анализ математического аппарата модели Г.М. Коммунара в части, относящейся к процессу закрепления кислорода и создания окислительной зоны, в результате восстановлены недостающие выкладки, устранены обнаруженные неточности и представлена уточненная математическая модель зарядки пласта кислородом. Но даже в исправленном виде полученные решения не дают возможности решить эту задачу по механизму окисления железа в водоносном пласте. Для его получения требуется реальная постановка краевого условия концентрации осажденного кислорода на границе контакта подземных вод и ранее закачанной аэрированной воды.

В данной статье, которая является продолжением предыдущей, приводится путь получения уточненной математической модели окисления и удаления железа с обоснованием краевых условий, которые адекватны к рассматриваемой задаче, с полным обоснованием получения соответствующих ей решений. В анализируемой модели предполагается, что предварительно созданная при закачке обогащенной кислородом воды окислительная зона имеет вид цилиндра с высотой равной мощности пласта и осью, совпадающей с осью скважины. При движении потока подземной воды через окислительную зону в стадии откачки в водопроводную сеть удаление железа происходит за счет реакции окисления кислородом, который адсорбирован на породах пласта, без участия кислорода, растворенного в воде.

В дальнейшем это позволит обосновать методику расчета систем водоснабжения малых населенных пунктов без применения графоаналитического метода определения входящих в нее неизвестных параметров на основе экспериментальных данных, полученных непосредственно в водоносном пласте скважин *in-situ*.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рашкевич Е.И., Ющенко В.Д. Закачка воды в подземный водоносный пласт скважины из пылевидного и средне-мелкозернистого песка при малом водопотреблении // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. F, Стр-во. Приклад. науки. – 2022. – № 14(3). – С. 64–70.
2. Кулаков В.В. Использование внутрипластовой очистки подземных вод от железа и марганца (на примере водоснабжения г. Хабаровск) // Вестн. ДВО РАН. – 2013. – № 2. – С. 84–89.
3. Braester C., Martinell R. The Vyredox and Nytrebox method in-situ treatment of groundwater // Wat. Sci. Tech. – 1988. – Vol. 20, № 3. – P. 149–163.
4. Гуринович А.Д., Ваврженюк П., Ельский И. Возможности удаления из воды железа в водоносном пласте на примере существующих водозаборных скважин // Вода и экология: проблемы и решения. – 2013. – Т. 2, № 54. – С. 12–20.
5. Гледко Ю.А. Гидрогеология. – Минск: Выш. шк., 2012. – 446 с.
6. Кудельский А.В., Пашкевич В.И. Региональная гидрогеология и геохимия подземных вод Беларуси. – Минск: Бел. наука, 2014. – 261 с.
7. Ленченко Н.Н. Динамика подземных вод (теоретический курс). – М.: МГТУ, 2004. – 209 с.
8. Плотников Н.А., Алексеев В.С. Проектирование и эксплуатация водозаборов подземных вод. – М.: Стройиздат, 1990. – 256 с.
9. Рашкевич Е.И., Ющенко В.Д., Макаров Е.К., Деменчук А.К. Уточненная математическая модель «зарядки» кислородом водовмещающих пород в процессе внутрипластовой обработки подземных вод // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. F, Стр-во. Приклад. науки. – 2023. – № 2(34). – С. 38–46.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2006. – 472 с.

## REFERENCES

1. Rashkevich, E.I. & Yushchenko, V.D. (2022). Zakachka vody v podzemnyi vodonosnyi plast skvazhiny iz pylevidnogo i sredne-melkozernistogo peska pri malom vodopotreblenii [Water injection into the underground aquifer of the well from pulverized and medium-fine-grained sand at low water consumption]. *Vestn. Polotsk. gos. un-t. Ser. F, Str-vo. Priklad. nauki [Herald of Polotsk State University. Series F, Civil engineering. Applied sciences]*, 14(3), 64–70. DOI: 10.52928/2070-1683-2022-32-14-64-70. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Kulakov, V.V. (2013). Ispol'zovanie vnutriplastovoi ochistki podzemnykh vod ot zheleza i margantsa (na primere vodosnabzheniya g. Khabarovsk) [Use in situ treatment of groundwater from iron and manganese (by the example of water supply in Khabarovsk)]. *Vestn. DVO RAN [Vestnik FEB RAS]*, (2), 84–89. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Braester, C. & Martinell, R. (1988). The Vyredox and Nytrelox method in-situ treatment of groundwater. *Wat. Sci. Tech.*, 20(3), 149–163.
4. Gurinovich, A.D., Vavrzhenyuk, P. & El'skii, I. (2013). Vozmozhnosti udaleniya iz vody zheleza v vodonosnom plaste na primere sushchestvuyushchikh vodozabomykh skvazhin [Possibilities of removing iron from water in an aquifer using the example of existing water wells]. *Voda i ekologiya: problemy i resheniya [Water and ecology: problems and solutions]*, 2 (54), 12–20. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Gledko, Yu.A. (2012). *Gidrogeologiya*. Minsk: Vysh. shk. (In Russ.).
6. Kudel'skii, A.V. & Pashkevich, H.I. (2014). *Regional'naya gidrogeologiya i geokhimiya podzemnykh vod Belarusi*. Minsk: Bel. navuka. (In Russ.).
7. Lenchenko, N.N. (2004). *Dinamika podzemnykh vod (teoreticheskii kurs)*. Moscow: MSGU. (In Russ.).
8. Plotnikov, N.A. & Alekseev, V.S. (1990). *Proektirovanie i ekspluatatsiya vodozaborov podzemnykh vod*. Moscow: Stroiidat. (In Russ.).
9. Rashkevich, E.I., Yushchenko, V.D., Makarov, E.K. & Demenchuk, A.K. (2023). Utochnennaya matematicheskaya model' «zaryadki» kislorodom vodovmeshchayushchikh porod v protsesse vnutriplastovoi obrabotki podzemnykh vod [Analysis of the mathematical model of "charging" oxygen of water-bearing rocks in the process of in-situ treatment of groundwater]. *Vestn. Polotsk. gos. un-t. Ser. F, Str-vo. Priklad. nauki [Herald of Polotsk State University. Series F, Civil engineering. Applied sciences]*, 2(34), 38–46. DOI: 10.52928/2070-1683-2023-34-2-38-46. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Stepanov, V.V. (2006). *Kurs differentsial'nykh uravnenii*. Moscow: URSS. (In Russ.).

Поступила 18.01.2024

#### MATHEMATICAL MODEL OF IRON REMOVAL IN THE PROCESS OF IN-SITU TREATMENT OF GROUNDWATER

**H. RASHKEVICH<sup>1)</sup>, V. YUSHCHENKO<sup>2)</sup>, E. MAKAROV<sup>3)</sup>, A. DEMENCHUK<sup>4)</sup>**

<sup>1), 2)</sup> *Vitebsk Regional Municipal Unitary Enterprise of water supply and sewage "Vitebskoblvodokanal"*,  
<sup>3), 4)</sup> *State Scientific Institution "Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus"*

*The article shows that the boundary conditions given in the literature for the system of model equations describing the process of in-situ treatment of groundwater contain inaccuracies and typos and do not make it possible to obtain a solution that meets real conditions. To find such a solution, a boundary condition is proposed for the concentration of deposited oxygen at the mobile boundary of the contact of groundwater and previously injected aerated water.*

**Keywords:** *method of in-situ treatment of groundwater, concentration of deposited oxygen in aquifers, boundary conditions of contact of groundwater with adsorbed oxygen, mathematical model of iron oxidation.*