

УДК 624.072

DOI 10.52928/2070-1683-2024-36-1-39-44

**СТАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ БАЛОЧНОЙ ПЛИТЫ НА ОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**канд. техн. наук **О.В. КОЗУНОВА<sup>1)</sup>**, **А.Г. ПУСЕНКОВ<sup>2)</sup>**<sup>1)</sup> *Белорусский национальный технический университет, Минск,*<sup>2)</sup> *завод КПД ОАО «Гомельский ДСК»*<sup>1)</sup> *kozunova@gmail.com,* <sup>2)</sup> *pusenkov\_a@mail.ru*

В статье рассматриваются публикации статического расчета, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого основания под балочной плитой без учета касательных напряжений (продольных деформаций) в зоне контакта, а также приводится новая методика расчета с их учетом. Проводится числовая апробация вариационно-разностным методом (ВРМ) и верифицируются результаты для оценки влияния касательных напряжений на НДС упругого основания.

**Ключевые слова:** упругое однородное основание, балочная плита, осадки основания, напряженно-деформированное состояние, касательные напряжения, контактная зона.

**Введение.** Актуальность данной статьи связана с тем, что в расчетах конструкций на упругом основании учитывают только нормальные напряжения в зоне контакта. В представленной работе авторы применяют (усложняют) методику расчета, учитывая касательные напряжения (продольные деформации).

Статическими расчетами балочных плит на упругом основании занимались следующие отечественные ученые:

1. Клубин П.И. проводил расчет *способом ортогональных многочленов*. Данный способ более точен, чем гипотезы Винклера, и учитывает особенности реактивных давлений основания. Статический расчет заключается в решении системы из дифференциального уравнения изгиба плиты и интегрального уравнения для осадок с соблюдением условий равновесия и удовлетворением граничных условий. Однако возникают сложности при расчетах плит переменной жесткости и при воздействии на плиту произвольной нагрузки [1].

2. Жемочкин Б.Н. предложил заменить сплошной контакт основания и балочной плиты *точечными связями в виде жестких вертикальных стержней*. Количество таких стержней определяется произвольно, но чем больше их принято, тем точнее результат расчета. Для удержания балки от боковых смещений используется горизонтальный стержень (рисунок 1).

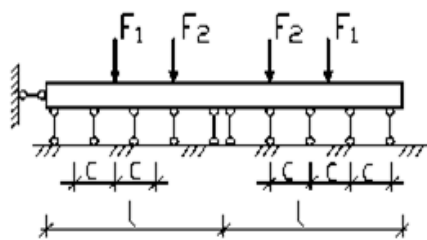


Рисунок 1. – Расчетная схема балки

Получается статически неопределимая система, решение которой проводится смешанным способом строительной механики. Между балкой и основанием стержневые связи заменяют неизвестными силами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и вводят горизонтальную заделку в сечении балки [2].

3. Яголковский С.Н. для расчета предложил использовать упругий слой, который сцеплен с недеформируемым основанием в зоне взаимодействия с балкой. Такой способ по сравнению со смешанным методом приводит к уменьшению числа неизвестных, однако гораздо сложнее определяются коэффициенты при неизвестных [3].

4. Дураев А.Е., Сеницын А.П. и др. предложили способ решения *методом конечных разностей*. При помощи данного метода на расчетной области непрерывного изменения аргумента строится сетка с конечным множеством точек (узлов). Вместо функций непрерывного аргумента рассматривают функции, определенные только в узлах сетки – сеточные функции. Производные, которые входят в дифференциальное уравнение и краевые условия, заменяют их разностными аналогами – линейными комбинациями значений сеточных функций в некоторых узлах сетки. В результате краевую задачу заменяют дискретной краевой задачей (разностной схемой), представляющей собой систему конечного числа линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Эту систему уравнений решают с получением приближенного значения решения в узлах.

Проблемой МКР является построение правильной разностной схемы, т.к. для одной такой задачи возможно построить множество разностных схем, а также он не может быть применен для абсолютно жесткой конструкции [4; 5].

5. Горбунов-Посадов М.И. в своих работах использовал уравнения для определения коэффициентов *степенного ряда* и таблицы для расчета определяемых параметров балочных, прямоугольных и осесимметрично нагруженных круглых плит на упругом однородном изотропном полупространстве.

Такой метод расчета совпадает с методом расчета полос в условиях плоской задачи, но имеет отличия в том, что функции влияния берутся от нагрузки поверхности основания по прямоугольнику, а не по линии [6].

Также статические расчеты предложены в работах Е.Ф. Винокурова с итерационным методом нелинейных расчетов [7]. В статье В.Г. Федоровского предлагается реализация итеративного алгоритма Шварца методом конечных элементов (МКЭ) плиты на любой модели упругого основания [8].

Однако все решения контактных задач происходят в традиционной постановке, т.е. без учета касательных напряжений в зоне контакта.

Различные вариации балочных плит и упругих оснований не позволяют получить строгое решение пространственной задачи. В связи с этим допускается приближенное решение, при котором касательные напряжения и жесткость балочной плиты определяют строго в плоской постановке. Эти факторы используются для приближенной оценки влияния на результаты расчетов существующими методами, но без их учета<sup>1</sup>.

Решение задачи биконтактного взаимодействия основания и плиты с учетом касательных напряжений (продольных деформаций) в зоне контакта представляет собой разновидность задачи теории упругости [9]. Решение данной задачи можно выполнить в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, т.е. с учетом физической нелинейности.

Нелинейный расчет деформирования балочной плиты позволяет выполнить более достоверную оценку работы плиты по предельным состояниям эксплуатационной пригодности за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий. Также можно отметить, что при таком расчете возникает возрастание неравномерности осадок.

**Постановка задачи.** На упругом однородном основании глубиной (толщиной)  $H$  расположена балочная плита ленточных фундаментов с приложенной внешней нагрузкой  $q(x)$ . Параметры плиты следующие: высота плиты  $h$ , ширина плиты  $2l$ , изгибная жесткость  $EJ$ .

Вводим гипотезы (предположения) и допущения для расчета балочных плит на упругом основании:

- 1) допущения и гипотезы теории упругости справедливы для рассчитываемой области упругого основания;
- 2) допущения и гипотезы плоского изгиба балки (плиты) справедливы для плиты;
- 3) при моделировании контактной зоны между балочной плитой и основанием могут возникать и растягивающие, и сжимающие напряжения, силы трения при моделировании учитываются, также учитываются касательные напряжения в зоне контактного взаимодействия.

**Алгоритм решения задачи.** Задача решается вариационно-разностным методом (ВРМ)<sup>2</sup>, который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (вид плоской деформации) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из фундаментной плиты, непросадочных грунтов основания и зоны контактного взаимодействия.

Основание заменяется прямоугольной расчетной областью и аппроксимируется разбивочной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям (рисунок 2). На границах расчетной области перемещения равны нулю, а в зоне контакта осадки основания – соответствуют прогибам плиты.

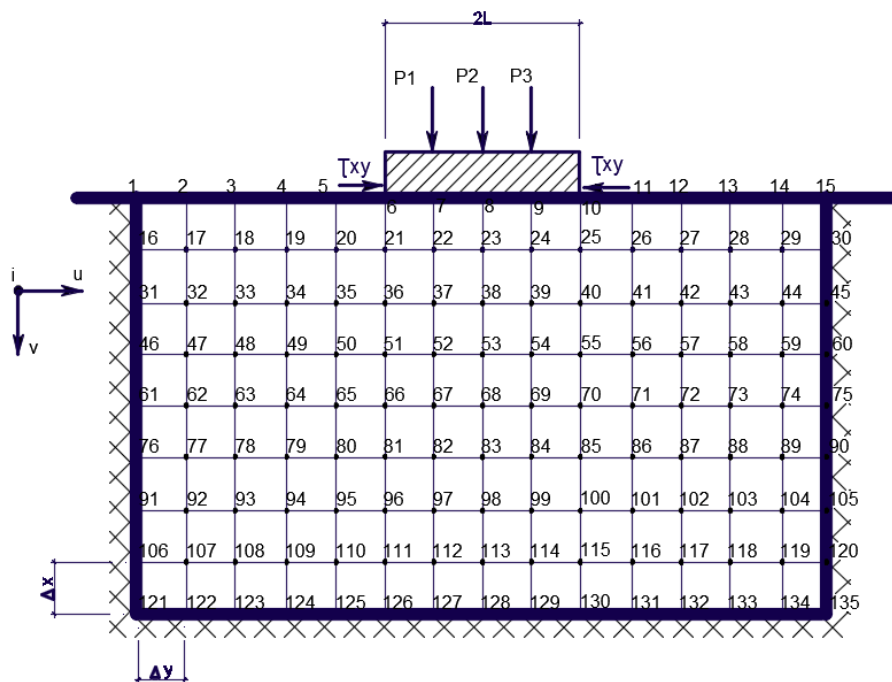


Рисунок 2. – Разбивочная сетка расчетной области

<sup>1</sup> Руководство по проектированию плитных фундаментов каркасных зданий и сооружений башенного типа. Разработано к СНиП II-15-74. – М.: Стройиздат, 1984. – 265 с.

<sup>2</sup> Козунова О.В. Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами: Р 5.01.056.09: введ. 01.10.09. – Минск: Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.

За неизвестные принимаем:  $u_i(x,y), v_i(x,y)$  – компоненты вектора перемещения  $i$ -той узловой точки основания, направленные вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $p_y^{(i)}(x,y)$  – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием,  $\tau_{xy}^{(i)}(x,y)$  – касательные напряжения.

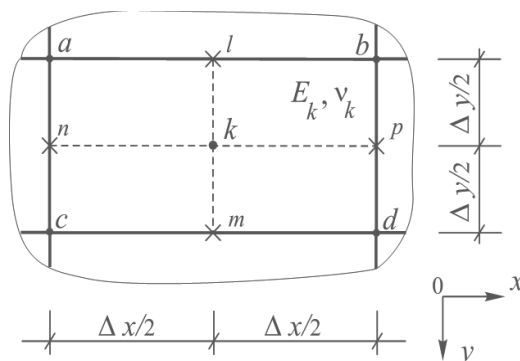


Рисунок 3. – Прямоугольная ячейка МКР

Зависимость интенсивности напряжений и деформаций для упругого однородного основания определяется по следующей формуле<sup>3</sup>:

$$\sigma_i = \sigma_y \operatorname{th} \left( \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_i^{(k)} \right), \tag{1}$$

где  $\sigma_y$  – предел текучести основания;

$E$  – начальный модуль деформации основания;

$\varepsilon_i^{(k)}$  – интенсивность деформаций в точке  $k$  упругого основания.

Интенсивность деформации имеет следующее выражение:

$$\varepsilon_i^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2}, \tag{2}$$

где  $\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}$  – деформации в точке  $k$ . Они определяются по соотношению Коши:

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left( \frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \tag{3}$$

$$\varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left( \frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \left( \frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки имеет следующее выражение:

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[ \frac{\nu_k}{1-2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y. \tag{5}$$

<sup>3</sup> Босаков С.В., Машкова (Козунова) О.В. Расчет балки на упругой физически нелинейной полуплоскости // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: материалы X междунар. науч.-метод. межвуз. семинара. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 40–43.

Величина полной потенциальной энергии балочной плиты на упругом основании  $\mathcal{E}$  состоит из суммы энергии деформации плиты  $U$ , энергии деформации упругого основания  $A$  и работы внешней нагрузки  $\Pi$ :

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi. \quad (6)$$

В соотношении определения полной энергии деформации упругого основания  $A$  (6), авторами предлагается усложнение расчета за счет учета касательных напряжений в зоне:

$$A = U_f + U_t, \quad (7)$$

где  $U_f$  – энергия деформации упругого основания (плоская деформация)<sup>4</sup>;

$U_t$  – энергия продольных деформаций в контактной зоне плиты с основанием.

Энергия деформаций упругого основания

$$\begin{aligned} U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} \left( \frac{E_k}{1+\nu_k} \cdot \left[ \frac{\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta x} \cdot (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} \cdot (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \right) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $NX$  – число узлов по оси  $X$ ;

$MY$  – число узлов по оси  $Y$ .

Энергия продольных деформаций

$$U_t = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=I+1}^{K1-1} EA_{i=II+1} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2. \quad (9)$$

Энергия деформации изгиба плиты

$$U = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=I+1}^{K1-1} EJ_{i=II+1} \cdot \left( \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2. \quad (10)$$

Потенциал внешней нагрузки

$$\Pi = - \sum_{i=I+1}^{K1-1} q_i(x) v_i \Delta x. \quad (11)$$

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений  $i$ -той узловой точки  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$ , используя геометрические уравнения Коши и конечно-разностные соотношения (3, 4), определяется интенсивность деформаций и напряжений в центрах ячеек (см. формулы теории упругости).

Учитывая значения напряжений и перемещений, полученные при решении задачи в первой итерации, определяется касательный или секущий модули деформации для каждой ячейки, и задача решается во втором и последующих приближениях с учетом изгибной и продольных жесткостей балочной плиты.

Нелинейный расчет заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать установленной точности решения задачи.

<sup>4</sup> Козунова О.В. Статический анализ системы "балочная плита — нелинейно-упругое неоднородное основание" вариационно-разностным методом: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. – Минск: БНТУ, 2017. – 168 л.

**Решение задачи.** Для решения задачи составлена расчетная программа Mathematica 10.0 и проведена ее числовая апробация для однослойного основания.

В качестве непросадочного основания выбираем пылевато-глинистые грунты (супесь) с коэффициентом пористости  $e=0,7$  и следующими упругими постоянными:  $\sigma_y = 0,25$  МПа ;  $\nu = 0,33$  ;  $E = 10$  МПа .

Балочной плитой выступает железобетонная плита ленточного фундамента (ФЛ) с классом бетона по прочности С20/25 с типовым армированием. Задаем следующие характеристики плиты: длина –  $l = 1,6$  м; высота –  $h = 0,3$  м; модуль упругости бетона –  $E_b = 2,75 \cdot 10^{10}$  Па .

На балочную плиту действует равномерно распределенная нагрузка  $q(x)$ , которая заменяется сосредоточенными силами  $P_1 = P_3 = 100$  кН,  $P_2 = 200$  кН.

Для итерационного процесса сходимости устанавливаем критерий равный 3%.

В компьютерной программе Mathematica 10.0 составляем алгоритм расчета и определяем горизонтальные и вертикальные перемещения узловых точек в линейном, а затем и в нелинейных расчетах. Результаты получаем как с учетом касательных напряжений, так и без них. Далее проводится верификация.

Ниже представлены результаты осадок основания и фундаментной плиты с учетом касательных напряжений и без них в зоне контакта. Сходимость подтверждена во второй итерации и составила 2,2%. По результатам расчета осадки упругого основания с учетом касательных напряжений снизились на 3,1% в сравнении с расчетом без учета касательных напряжений.

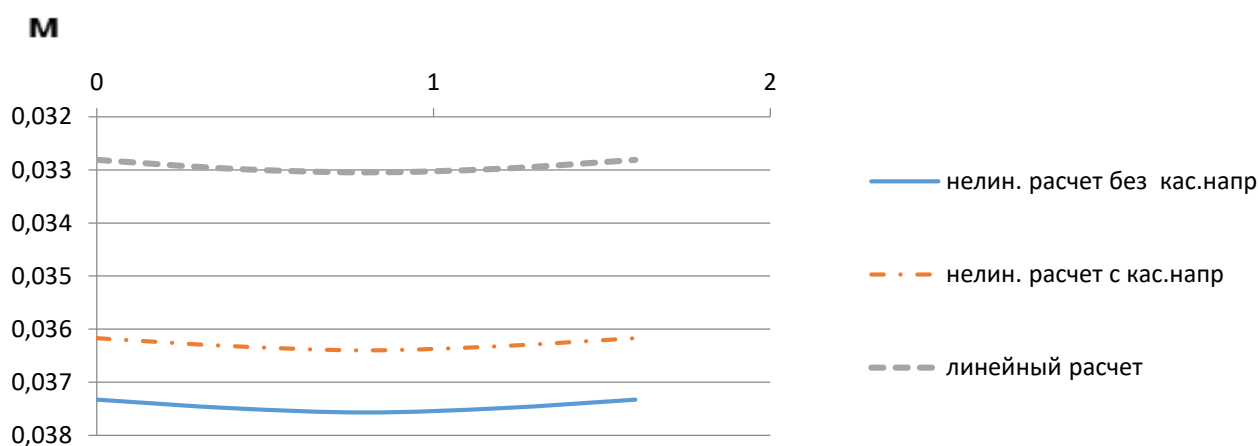


Рисунок 4. – Результаты осадок в зоне контакта

**Заключение.** В представленной статье авторами усложнена постановка задачи и методика расчета системы балочной плиты с однородным упругим основанием ВРМ с использованием конечно-разностных уравнений полной потенциальной энергии, что, в свою очередь, позволяет более полно исследовать эту зону биконтактного взаимодействия с учетом касательных напряжений, вычислить осадки упругого основания под плитой и определить внутренние усилия в балочной плите.

Результаты уменьшения осадок в зоне контакта (см. рисунок 4) говорят о влиянии касательных напряжений, что также подтверждается в работах И.И. Гудушаури [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инженерный сборник. – 1952. – № 12. – С. 95–135.
2. Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1962. – 262 с.
3. Яголковский С.Н. Влияние учета сцепления упругого слоя с подстилающим основанием на результаты расчета балок // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. – № 4. – С. 3–5.
4. Дураев А.Е. Расчет методом конечных разностей прямоугольных плит, лежащих на грунтовом основании, модуль деформации которого изменяется с глубиной // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1971. – № 4. – С. 32–34.
5. Сеницын А.П. Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости. – М.: Стройиздат, 1974. – 176 с.
6. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 631 с.
7. Винокуров Е.Ф. Итерационный метод расчета оснований и фундаментов // Стр-во и архитектура Белоруссии. – 1970. – № 1. – С. 31–34.
8. Федоровский В.Г., Кагановская С.Е. Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связном основании (плоская задача) // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 1. – С. 41–44.
9. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
10. Гудушаури И.И. Расчет фундаментных полос на действие симметричных и антисимметричных нагрузок с учетом касательных напряжений на поверхности контакта // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 49–57.

## REFERENCES

1. Klubin, P.I. (1952). Raschet balochnykh i kruglykh plit na uprugom osnovanii. *Inzhenernyi sbornik*, (12), 95–135. (In Russ.).
2. Zhemochkin, B.N. & Sinitsyn, A.P. (1962). *Prakticheskie metody rascheta fundamentnykh balok i plit na uprugom osnovanii*. Moscow: Stroizdat. (In Russ.).
3. Yagolkovskii, S.N. (1969). Vliyanie ucheta stepeniya uprugogo sloya s podstilayushchim osnovaniem na rezul'taty rascheta balok. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov*, (4), 3–5. (In Russ.).
4. Duraev, A.E. (1971). Raschet metodom konechnykh raznostei pryamougol'nykh plit, lezhashchikh na gruntovom osnovanii, modul' deformatsii kotorogo izmenyaetsya s glubinoi. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov*, (4), 32–34. (In Russ.).
5. Sinitsyn, A.P. (1974). *Raschet balok i plit na uprugom osnovanii za predelom uprugosti*. Moscow: Stroizdat. (In Russ.).
6. Gorbunov-Posadov, M.I., Malikova, T.A. & Solomin, V.I. (1984). *Raschet konstruksii na uprugom osnovanii*. Moscow: Stroizdat. (In Russ.).
7. Vinokurov, E.F. (1970). Iteratsionnyi metod rascheta osnovanii i fundamentov. *Str-vo i arkhitektura Belorussii*, (1), 31–34. (In Russ.).
8. Fedorovskii, V.G. & Kaganovskaya, S.E. (1975). Zhestkii shtamp na nelineino-deformiruемом svyaznom osnovanii (ploskaya zadacha). *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov*, (1), 41–44. (In Russ.).
9. Aleksandrov, A.V. & Potapov, V.D. (2002). *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti: ucheb. dlya stroit. spets. vuzov*. Moscow: Vyssh. shk. (In Russ.).
10. Gudushauri, I.I. (1960). Raschet fundamentnykh polos na deistvie simmetrichnykh i obratnosimmetrichnykh nagruzok s uchedom kasatel'nykh napryazhenii na poverkhnosti kontakta. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie*, (5), 49–57. (In Russ.).

Поступила 06.02.2024

**STATIC CALCULATIONS OF A BEAM SLAB IN THE ELASTIC DIRECTION  
TAKING INTO ACCOUNT SHEAR STRESSES**

**O. KOZUNOVA<sup>1)</sup>, A. PUSENKOV<sup>2)</sup>**

<sup>1)</sup> *Belarussian National Technical University, Minsk,*

<sup>2)</sup> *KPD plant OJSC "Gomel DSK"*

*In the article on static calculation, it is possible to determine the crisis-strain state (CSS) of the elastic foundation under a beam slab without taking into account tangential stresses (longitudinal deformations) in an open contact, and also leads to a new calculation method taking them into account. Numerical testing is carried out using the variation-difference method (VDM) and the results are checked to estimate the shear stresses on the stress-strain state of the elastic foundation.*

**Keywords:** *elastic homogeneous base, beam slab, base settlements, stress-strain state, tangential stresses, contact zone.*