УДК 624.072

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Анализируется метод, позволяющий определять для однопролетных балок с произвольным закреплением концов собственные частоты свободных колебаний без составления и решения дифференциальных уравнений. Свободные колебания балок рассматриваются как вынужденные колебания свободной балки под действием реакций удаленных опорных связей. Для описания этих колебаний по рекуррентной формуле строится так называемая обобщенная динамическая функция Грина. Идея ее построения состоит в том, что динамическая функция Грина свободной балки последовательно «исправляется» при присоединении к ней опорных связей. Приравнивая нулю «исправленные» динамические функции Грина, получаем уравнения, позволяющие найти собственные частоты однопролетных балок с различными закреплениями концов. Метод обобщенной динамической функции Грина следует рассматривать как неявный прием раскрытия определителя, связанного с получением частотного уравнения методом сил.

Современные балочные конструкции под действием высокочастотных динамических нагрузок испытывают вибрации с одновременным возбуждением большого числа собственных форм колебаний. Поэтому определение характеристик высших составляющих свободных колебаний представляет практический интерес.

Известно, что определение собственных частот свободных колебаний балочных конструкций можно осуществлять методом начальных параметров, методами сил и перемещений. Однако применение этих методов к балкам переменного сечения сопряжено с вычислительными трудностями. Рассматриваемый в данной работе метод, основанный на использовании динамической функции Грина [1], позволяет определять для однопролетной балки переменного сечения собственные частоты свободных колебаний без составления и решения дифференциального уравнения.

Известно, что, используя функцию Грина в стержневых конструкциях, возможно определять единичное перемещение в произвольном сечении от действия приложенной в произвольном месте силы, равной единице. Принято считать, что динамическую функцию Грина можно построить только для закрепленных объектов. Однако если в число собственных форм свободных колебаний балки включить формы движения плоского абсолютно твердого тела как собственные формы с нулевыми частотами, то можно построить динамическую функцию Грина для свободной балки.

Смещенное положение балки как плоского абсолютно твердого тела в произвольный момент времени (рис. 1) описывается выражением

$$w(x) = A + B\xi\, l\,,$$

где $\xi = \dfrac{x}{l}$ – безразмерная абсцисса сечения; A, B – произвольные постоянные.

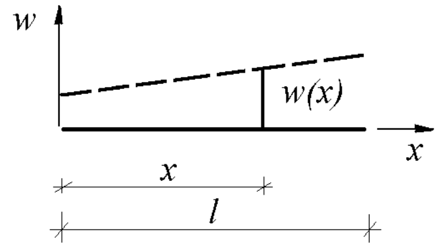

Рис. 1. Смещенное положение балки как плоского абсолютно твердого тела

Используя условия динамического равновесия, можно найти произвольные постоянные A, B.

Тогда нормированные формы движения принимают вид:

- для поступательного движения

$$W_{01} = \frac{1}{\sqrt{l}}\,;$$

- для вращательного движения

$$W_{02} = \frac{\sqrt{3}}{l}(1 - 2\xi).$$

Особенностью этих форм является их взаимная ортогональность и ортогональность к формам колебаний балки как деформируемого тела.

Рассмотрим свободную балку, подверженную действию некоторой возмущающей гармонической силы с круговой частотой θ (рис. 2).

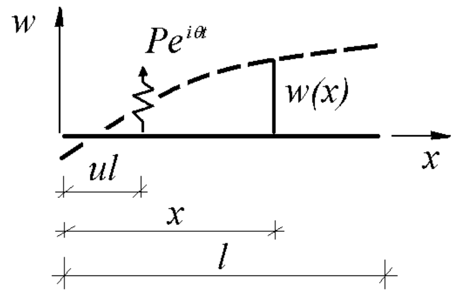

Рис. 2. Свободная балка под действием гармонической силы

Дифференциальное уравнение движения такой балки с учетом деформируемости материала имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P(ul)}{EI} e^{i\theta t} \delta(x - ul), \tag{1}$$

где EI – изгибная жесткость поперечного сечения балки; m – погонная масса балки; $\delta(x - ul)$ – дельта-функция.

Для установившегося процесса решение (1) ищется методом Фурье и имеет вид

$$w(x) = W(x)e^{i\theta t}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнение относительно амплитудной функции $W(x)$

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = \frac{P(ul)}{EI}\delta(x - ul), \tag{3}$$

где $k^4 = \dfrac{m\theta^2}{EI}$ – частотный коэффициент.

Амплитудная функция $W(x)$, являющаяся решением уравнения (3), раскладывается в ряд по собственным формам свободной балки, включая в их число формы движения балки как абсолютно твердого тела

$$W(x) = W_{01} + W_{02} + \sum_n A_n W_n, \tag{4}$$

где $W_n = \frac{1}{\sqrt{l}}\left[(ch\lambda_n\xi + \cos\lambda_n\xi) - \sigma_n(sh\lambda_n\xi + \sin\lambda_n\xi)\right]$ – нормированные собственные формы колебаний свободной балки как деформируемого тела. Входящие в них коэффициент σ_n и безразмерный частотный коэффициент $\lambda_n = k_n l$ принимают согласно [2] следующие значения:

$$\sigma_1 = 0,98250, \quad \lambda_1 = 4,731,$$

$$\sigma_2 = 1,00078, \quad \lambda_2 = 7,853,$$

$$\sigma_3 = 0,99997, \quad \lambda_3 = 11,033,$$

$$\sigma_4 = 1,00000, \quad \lambda_4 = 14,137,$$

$$\sigma_5 = 1,00000, \quad \lambda_1 = 16,877,$$

$$\sigma_n = 1,00000, \quad \lambda_n = \pi\frac{2n+1}{2} \quad (n > 5).$$

После отыскания коэффициентов A_n получим, что амплитудная функция для установившегося процесса колебаний свободной балки имеет вид произведения возмущающей силы на некоторую функцию

$$W(\xi) = P(u)G_0(u,\xi). \tag{5}$$

Входящая в (5) функция

$$G_0(u,\xi) = \frac{12\xi u - 6(\xi + u) + 4}{-\lambda^{-4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(u)W_n(\xi)}{\lambda_n^4 - \lambda^{-4}} \tag{6}$$

и является динамической функцией Грина свободной балки.

При произвольном количестве возмущающих сил выражение (5) для амплитудной функции примет вид

$$W(\xi) = \sum_i P(u_i)G_0(u_i,\xi). \tag{7}$$

Полученную динамическую функцию можно использовать для определения собственных частот свободных колебаний неразрезных балок. Для этого необходимо воспользоваться приемом, предложенным И.М. Рабиновичем. Его суть заключается в том, что собственные колебания несвободных систем можно рассматривать как вынужденные колебания свободной системы. При этом роль возмущающих сил играют реактивные силы, присущие каждому виду присоединяемого объекта – связь, масса. Частота таких возмущающих сил может принимать значения собственных частот несвободной системы.

Тогда свободные колебания однопролетной балки можно рассматривать как вынужденные колебания свободной балки под действием реакций удаленных опорных связей. Для описания этих колебаний, используя динамическую функцию Грина, строится обобщенная динамическая функция Грина. Идея ее построения состоит в том, что динамическая функция Грина свободной балки последовательно «исправляется» при каждом присоединении к ней опорных стержней. Рассмотрим построение обобщенной динамической функции Грина на примере шарнирно опертой балки.

Прежде присоединим к свободной балке опору в начале координат (рис. 3).

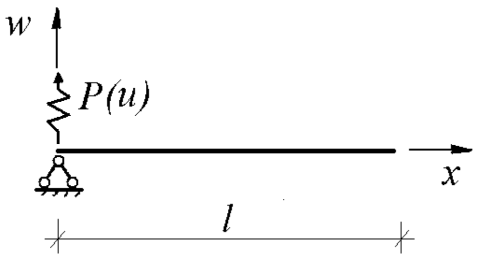

Рис. 3. Свободная балка с присоединенной опорой

Тогда выражение для амплитудной функции, с учетом того, что $u = 0$, примет вид

$$W(\xi) = P(0)G_0(\xi,0).$$

Затем присоединим вторую опору в конце балки (рис. 4).

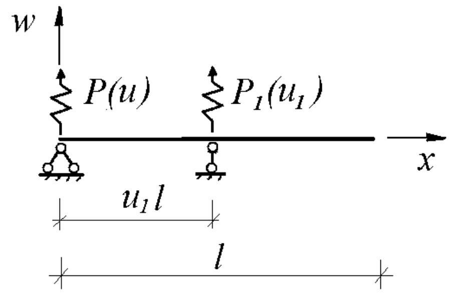

Рис. 4. Шарнирно опертая балка

Выражение для амплитудной функции в данном случае будет иметь вид

$$W(\xi) = P(0)G_0(0,\xi) + P_1(u_1)G_0(u_1,\xi). \tag{8}$$

Используя условие

$$W(u_1) = 0,$$

выразим $P_1(u_1)$ через $P(0)$

$$P_1(u_1) = -\frac{G_0(0,u_1)}{G_0(u_1,u_1)} P(0). \quad (9)$$

С учетом (9) выражение для амплитудной функции примет вид

$$W(\xi) = P(0) G_1(0,\xi). \quad (10)$$

Входящая в (10) функция

$$G_1(0,\xi) = G_0(0,\xi) - \frac{G_0(u_1,\xi) G_0(0,u_1)}{G_0(u_1,u_1)}$$

является динамической функцией Грина для шарнирно опертой балки:

$$G_2(0,\xi) = G_1(0,\xi) - \frac{G_1(1,\xi) G_1(0,1)}{G_1(1,1)}. \quad (11)$$

Приравнивая к нулю «исправленную» динамическую функцию Грина (11), получим уравнение, позволяющее найти собственные частоты шарнирно опертой балки с двумя опорами. Это уравнение имеет вид

$$G_1(0,0) = 0.$$

Таким образом, рассмотренный метод обобщенной динамической функции Грина следует рассматривать как неявный прием раскрытия определителя, связанного с получением частотного уравнения методом сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туровский, Л.М. Исследование свободных колебаний пластин с комбинированным «наполнением» / Л.М. Туровский, Г.П. Мудрый // Механика. Вып. 2. – Воронеж, 1974. – С. 23–31.
2. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз «Наука», 1967. – 442 с.

Поступила 18.12.2014

BY THE DETERMINATION OF THE INTRINSIC FREQUENCY OF FREE OSCILLATIONS BEAMS

L. TURISHCHEV

Considered in the paper, the method allows to determine for single-span beams with arbitrary fixing all the natural frequencies of free oscillations without setting up and solving differential equations. Free vibrations of beams are considered as forced oscillations of the free beam by reactions remote support connections. To describe these fluctuations by the recurrence formula is constructed so-called generalized dynamic Green's function. The idea of its construction is that the dynamic Green's function of the free beam series "corrected" in acceding to the reference link. Equating the "corrected" Dynamic Green's functions are obtained equations to find the natural frequencies of the single-span beams with various fixed end. The above method of generalized dynamic Green's function should be considered as an implicit acceptance of the determinant of disclosure necessary to obtain the frequency equation by force.