УДК 528.63

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРАНСФОРМАЦИИ НА ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЁВ; А.С. ИВАШНЁВА
(Полоцкий государственный университет)

Анализируется возникающая достаточно часто в геодезии задача трансформации координат. В большинстве практических случаев задача такого рода решается при вставке части сети в сеть с другой системой координат, при получении элементов деформации различных объектов, при включении главных осей объектов в государственную систему, при фотограмметрических работах и т.д. Показано несколько путей для решения задачи трансформации. Ход решения и вычислительные результаты представлены по трем методам преобразования координат.

Связь между двумя системами координат может быть установлена, если известен закон преобразования (трансформации) одной системы в другую или если координаты двух (или более) точек известны в обеих системах. Из основных задач трансформации выделяют задачу собственно преобразования и задачу поиска оптимальных, в каком-либо смысле, деформационных характеристик.

Обычная задача трансформации формулируется следующим образом. Есть координаты (x, y) для n точек в старой системе K_c и есть координаты (X, Y) для этих же точек в новой системе $K_н$. Необходимо найти оптимальную функцию f перехода от старой системы координат к новой

$$(X,Y) = f(x,y), \tag{1}$$

или

$$K_H = f(K_C). \tag{1а}$$

Так как подавляющее число преобразований для геодезических задач включает только вращение, сдвиг и масштабирование одной системы относительно другой, то в качестве вида функции f преобразования для (1а) достаточно использовать линейную функцию с матрицей A и вектором b вида

$$K_H = A \cdot K_C + b, \tag{2}$$

которая описывает самый общий, аффинный (6-параметровой) метод преобразования.

Так как для контроля и оценки точности берется избыточное число точек, то переопределенная система (2) решается под условием метода наименьших квадратов (МНК) с получением элементов преобразования в виде матрицы A и вектора b.

Запишем систему (2) в развернутом виде для одной i-той точки как

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \\ d \cdot x_i + e \cdot y_i + f \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где X_i, Y_i, x_i, y_i – координаты в новой и старой системе соответственно; a, b, c, d, e, f – коэффициенты линейного аффинного преобразования на плоскости.

При аффинной модели трансформации производится сдвиг по осям на величины t_x и t_y, масштаб изменяется на величины m_x и m_y, также выполняется поворот для точек относительно одной оси на угол φ_1, а другой – на угол $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon$, то есть с нарушением ортогональности исходной системы координат.

Наиболее часто в качестве реализации алгоритма аффинной трансформации используют так называемый «метод растягивания». В нем все неизвестные вытягиваются в вектор и решение производится на основе метода наименьших квадратов. Решение на основе данного подхода описано во многих источниках (см., например [1]).

Задача трансформации может трактоваться как двумерная регрессия с двумерным откликом [2]. Решение двумерной регрессии с двумерным откликом может быть реализовано на основе псевдонезависимой регрессии и на основе теоремы о характеристиках многомерного условного закона распределения. Каждый из подходов имеет свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим эти подходы более подробно. В статье [3] предложена процедура оптимального решения на основе МНК задачи многомерной регрессии с многомерным откликом. Для целей трансформации это будет двумерная регрессия с двумерным откликом [4; 5]. Для этого целесообразно систему (3) для шести параметров аффинного преобразования представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_2 \\ \cdots & \cdots \\ X_n & Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ c & f \end{bmatrix}, \tag{4}$$

добавив вектор сдвига в матрицу преобразования.

Эта система хорошо решается на основе общего алгоритма метода наименьших квадратов с получением матрицы общего аффинного преобразования:

$$k = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Для этого составляется матрица плана для преобразования A, вектор свободных членов преобразования l, нормальная матрица для системы нормальных уравнений N и вектор свободных членов системы нормальных уравнений b вида

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}, \\ l = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ \cdots & \cdots \\ X_n & Y_n \end{bmatrix}, \\ N = A^T \cdot A, \\ b = A^T \cdot l. \end{cases} \tag{6}$$

Решение данной системы $\hat{k} = N^{-1} \cdot b$ дает искомую матрицу преобразования координат, состоящую из матрицы трансформации $T = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ и вектора сдвига $s = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$. Необходимо учитывать, что матрица T получается в виде транспонированной.

Оценка точности производится по обычной схеме метода наименьших квадратов. Вначале получают матрицу поправок V как разность между новой уравненной системой координат и новой измеренной системой $K_н$:

$$V = \hat{k} \cdot K_c - K_н. \tag{7}$$

Значение целевой функции $\Phi = v^T v$ для оценки точности можно получить и как

$$v^T v = T_r (V \cdot V^T), \tag{8}$$

где $Tr(*)$ – след матрицы.

Теперь можно получить общую погрешность модели в виде стандартного отклонения

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{2n-6} S}, \tag{9}$$

где n – число точек; 6 – число оцениваемых коэффициентов.

При аффинном преобразовании погрешности коэффициентов построчно равны между собой, и для оценки точности можно использовать стандартную формулу МНК для ковариационной матрицы $K_к$

$$K_k = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q. \tag{10}$$

Тогда корень из диагональных элементов ковариационной матрицы $K_к$ будет тройкой стандартных отклонений для соответствующей пары коэффициентов преобразования:

$$\hat{\sigma}_a = \hat{\sigma}_d = \sqrt{(K_k)_{11}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q_{11}}; \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_e = \sqrt{(K)_{22}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q_{22}};$$

$$\hat{\sigma}_c = \hat{\sigma}_f = \sqrt{(K_k)_{33}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q_{33}}.$$

При решении задачи трансформации на основе условного математического ожидания с двумерным откликом используют теорему о характеристиках многомерного условного нормального закона распределения (см., например, [6]). Оценки, полученные на основе условных характеристик закона распределения, носят название байесовских оценок. Для решения задачи создается объединенная матрица плана K из старых $K_c = (x, y)$ и новых $K_н = (X, Y)$ координат по столбцам для n точек, из которой переходят к выборочной ковариационной матрице, вычисляемой на основе деления на блоки:

$$S = \frac{1}{n} C^T \cdot C = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} C_c^T C_c & C_c^T C_н \\ C_н^T C & C_н^T C_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cн} \\ S_{нc} & S_{нн} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где C_c и $C_н$ – соответственно центрированные средними старая и новая системы координат.

Теперь на основе матрицы S с использованием теоремы о многомерном условном распределении вероятностей имеем:

- для условного математического ожидания

$$MO(K_н / K_c) = \hat{K}_н = \bar{K}_н + S_{нc} \cdot S_{cc}^{-1}(K_c - \bar{K}_c) = \bar{K}_н + \hat{X}(K_c - \bar{K}_c), \tag{13}$$

- в нормальном виде

$$\hat{K}_н = \hat{X} \cdot K_c + (\bar{K}_н - \hat{X} \cdot \bar{K}_c) = \hat{X} \cdot K_c + D \tag{14}$$

с матрицей коэффициентов $\hat{X}$, которая равна матрице трансформации T, и вектором свободных членов D, равным вектору сдвига s:

$$\hat{X} = S_{нc} \cdot S_{cc}^{-1}, \qquad D = \bar{K}_н - \hat{X} \cdot \bar{K}_c, \tag{15}$$

где $\bar{K}_н, \bar{K}_c$ – векторы средних значений по координатам старой и новой систем.

Для оценки точности модели при определении коэффициентов преобразования на основе байесовского подхода используем формулу условной ковариационной матрицы

$$\tilde{N}_{K_н|K_c} = S_{нн} - S_{нc} \cdot S_{cc}^{-1} \cdot S_{cн}. \tag{16}$$

След этой матрицы будет в точности равен значению целевой функции Ф.

Стандартное отклонение модели рассчитывается по формуле (9).

Для примера рассмотрим преобразование пяти точек, расположенных произвольно (рисунок).

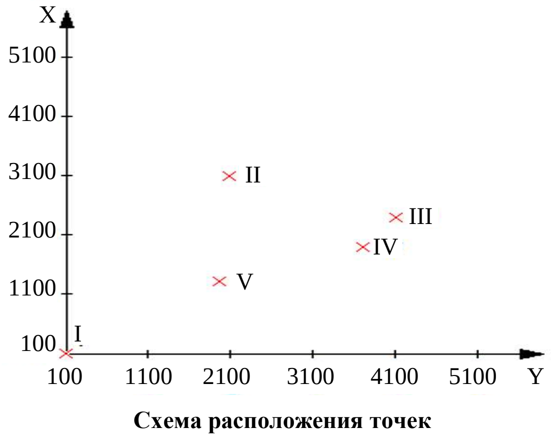

Схема расположения точек

Решение методом растягивания

Образуем совместную систему из 10 уравнений:

$$\begin{bmatrix} 122.254 \\ 285.735 \\ 1606.093 \\ 4701.791 \\ -859.413 \\ -6737.841 \\ -1363.858 \\ 5754.800 \\ -101.206 \\ 3370.349 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{X1} \\ v_{Y1} \\ v_{X2} \\ v_{Y2} \\ v_{X3} \\ v_{Y3} \\ v_{X4} \\ v_{Y4} \\ v_{X5} \\ v_{Y5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99.932 & 99.990 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 99.932 & 99.990 & 0 & 1 \\ 3100.152 & 2099.994 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3100.152 & 2099.994 & 0 & 1 \\ 2300.037 & 4100.074 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2300.037 & 4100.074 & 0 & 1 \\ 1499.997 & 3700.070 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1499.997 & 3700.070 & 0 & 1 \\ 1300.036 & 1900.071 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1300.036 & 1900.071 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \\ e \\ c \\ f \end{bmatrix}.$$

Решение системы – коэффициенты преобразования

$$k = \begin{bmatrix} 1.039159 \\ -0.816950 \\ 0.599934 \\ 1.258032 \\ 100.113 \\ 200.026 \end{bmatrix}$$

Из полученного вектора можно выделить матрицу трансформации

$$T = \begin{bmatrix} 1.039159 & -0.816950 \\ 0.599934 & 1.258032 \end{bmatrix}$$

и вектор сдвига

$$s = \begin{bmatrix} 100.113 \\ 200.026 \end{bmatrix}.$$

Апостериорная погрешность единицы веса

$$\hat{\sigma}_o = 0.07824.$$

Стандартные отклонения для соответствующей пары коэффициентов:

$$\hat{\sigma}_a = \hat{\sigma}_d = 0.000000938;$$

$$\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_e = 0.000000661;$$

$$\hat{\sigma}_c = \hat{\sigma}_f = 0.00161753.$$

Решение по алгоритму регрессии с двумерным откликом

Составляется матрица плана для преобразования A, вектор свободных членов преобразования l

$$A = \begin{bmatrix} 99.932 & 99.990 & 1 \\ 3100.152 & 2099.994 & 1 \\ 2300.036 & 4100.074 & 1 \\ 1499.997 & 3700.070 & 1 \\ 1300.036 & 1900.071 & 1 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 122.250 & 385.735 \\ 1606.093 & 4701.791 \\ -859.416 & 6737.841 \\ -1363.858 & 5754.800 \\ -101.206 & 3370.350 \end{bmatrix}.$$

Решение системы на основе формул (7) дает матрицу преобразования *k*:

$$k = \begin{bmatrix} 1.039159 & 0.599934 \\ -0.816950 & 1.258032 \\ 100.113 & 200.026 \end{bmatrix}.$$

Из полученной матрицы можно выделить матрицу трансформации

$$T = \begin{bmatrix} 1.039159 & -0.816950 \\ 0.599934 & 1.258032 \end{bmatrix}$$

и вектор сдвига

$$s = \begin{bmatrix} 100.113 \\ 200.026 \end{bmatrix}.$$

Апостериорная погрешность единицы веса $\hat{\sigma}_0 = 0.07824$.

Стандартные отклонения для соответствующей пары коэффициентов:

$$\hat{\sigma}_a = \hat{\sigma}_d = 0.000000938;$$

$$\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_e = 0.000000661;$$

$$\hat{\sigma}_c = \hat{\sigma}_f = 0.00161753.$$

Решение на основе теоремы о характеристиках многомерного условного закона распределения

Создаем объединенную матрицу плана *K*:

$$K = \begin{bmatrix} 99.932 & 99.990 & 122.254 & 385.735 \\ 3100.152 & 2099.994 & 1606.093 & 4701.791 \\ 2300.036 & 4100.074 & -859.412 & 6737.841 \\ 1499.997 & 3700.070 & -1363.858 & 5754.800 \\ 1300.036 & 1900.071 & -101.206 & 3370.349 \end{bmatrix}.$$

Решением является матрица коэффициентов $\hat{X}$, она же – матрица трансформации *T*, и вектор свободных членов *D*, он же – вектор сдвига *s*:

$$T = \begin{bmatrix} 1.039159 & -0.816950 \\ 0.599934 & 1.258032 \end{bmatrix}$$

$$s = \begin{bmatrix} 100.113 \\ 200.026 \end{bmatrix}$$

Апостериорная погрешность единицы веса

$$\hat{\sigma}_0 = 0.07824.$$

Заключение. По результатам вычислений видим, что все три метода дают одинаковые коэффициенты преобразования и одинаковую оценку точности. Однако более простой реализацией алгоритма обладают второй и третий методы преобразования, которые получены в результате трактовки задачи трансформации как двумерная регрессия с двумерным откликом. Также, в отличие от первого метода трансформации, во втором и третьем подходах на каждом шаге решения виден смысл производимых действий, позволяющих более оптимально строить вычисления и проводить анализ. Немаловажным является тот факт, что сводимость плоского аффинного преобразования к двумерной регрессии с двумерным откликом позволяет использовать все возможности, которые присущи регрессионному анализу, например, детерминация, робастность, ортогональная регрессия. Это, в свою очередь, дает возможность получать более качественные и адекватные результаты обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ghilani, Charles D. Adjustment computations: spatial data analysis / Charles D. Ghilani, Paul R. Wolf. – Hoboken: JOHN WILEY & SONS, INC., 2006. – 632 с.
2. Дегтярев, А.М. Идентификация модели трансформации в геодезии на основе аффинного преобразования / А.М. Дегтярев, В.В. Ялтыхов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2013. – № 2(49). – С. 71–74.
3. Zellner, A.S. An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias Author(s) / A.S. Zellner // Journal of the American Statistical Association. – Vol. 57, № 298 (Jun., 1962). – С. 348–368.
4. Демиденко, Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
5. Себер, Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер, В.П. Носко; под ред. М.Б. Малютова. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
6. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон. – М.: Физматлит, 1963. – 500 с.

Поступила 02.11.2015

TASK SOLLUTION OF TRANSFORMATION ON THE PLANE USING MULTIVARIATE DISTRIBUTION

A. DEGTYARYOV, A. IVASHNIOVA

The task of transforming the coordinates in geodesy occurs often enough. In most practical cases the problem of this kind is solved when the network part is inserted into the network with a different system of coordinates; when producing of deformation elements of various objects; when the main axes of the objects included in the public system; in photogrammetric work, etc. There are several ways to solve the problem of transformation. The process of the solution and computational results are presented for three methods of coordinate transformation.