ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.236 **DOI 10.52928/2070-1683-2025-40-1-46-50**

МАТРИЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЁВ, П.Ф. ПАРАДНЯ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

В статье представлена возможность обобщения преобразований разного рода топоцентрических координат с использованием матричной формы, что делает сами процедуры преобразования более понятными, компактными и обратимыми с наименьшими вычислительными и теоретическими затратами.

Ключевые слова: *системы координат, декартовы топоцентрические координаты, декартовы геоцентрические координаты, полярные топоцентрические координаты, преобразования координат, матричное представление преобразований.*

Введение. Топоцентрические координаты играют важную роль в геодезии, астрономии, спутниковых измерениях [1; 2]. Их используют при проведении точных измерений и построении карт местности. Они позволяют определить положение объекта относительно конкретной точки наблюдения на поверхности Земли. Это важно для создания топографических и кадастровых карт. В астрономии топоцентрические координаты применяются для определения положения небесных объектов с точки, находящейся на поверхности Земли. Это особенно значимо при наблюдении звёзд, планет и спутников. При работе со спутниковыми системами (GPS, ГЛОНАСС и т.п.) топоцентрические координаты используются для точного определения положения спутников на орбите относительно наземного наблюдателя, что позволяет корректно интерпретировать данные спутниковых измерений и использовать их для различных приложений.

Топоцентрические координаты находят применение в работе оптических и радиолокационных систем, используемых для наблюдения и измерения различных объектов, таких как самолеты, корабли и даже астрономические объекты. Поскольку топоцентрические координаты (азимут, зенитное расстояние, высота) используются в системах координат для описания положения объектов в пространстве относительно точки наблюдения, то это помогает в решении задач, связанных с ориентацией и навигацией. Эти координаты позволяют более точно и детально представлять и анализировать пространственные данные, что делает их незаменимыми в геодезических и астрономических приложениях.

Основная часть. Рассмотрим подробнее виды и структуру топоцентрических координат. В этой системе начало координат находится в некоторой точке Q_0 (B_0, L_0, H_0), расположенной обычно на земной поверхности. В зависимости от того, что принято за поверхность относимости, выделяют *горизонтную* и *экваториальную* систему. В экваториальной за плоскость относимости принимается плоскость, параллельная экватору, а в горизонтной – плоскость, перпендикулярная отвесной линии, тогда система *астрономическая*, или перпендикулярная нормали к поверхности в точке – система *геодезическая*, задающая геодезический горизонт. Вторая система получила в геодезии наибольшее распространение. Топоцентрические геодезические горизонтные системы в свою очередь делят на ряд систем:

– декартовы прямоугольные топоцентрические координаты: ось z расположена на продолжении нормали к поверхности эллипсоида в точке Q_0, ось x расположена в плоскости меридиана точки Q_0 перпендикулярно к оси z и направлена в сторону оси вращения эллипсоида, ось y перпендикулярна к осям x и z и направлена в сторону увеличения долготы;

– полярные топоцентрические координаты: геодезический азимут A_0 – двугранный угол между плоскостью меридиана начальной точки и нормальной плоскостью, проходящей через нормаль в точке Q_0 и заданную точку Q пространства, зенитное расстояние Z_0 – угол между осью z и прямолинейным направлением из точки Q_0 в точку Q, расстояние D между точками Q_0 и Q по прямой (рисунок 1).

Из рисунка 1 связь между двумя системами топоцентрических координат представим следующими формулами:

$$\begin{cases} x = D \cdot \sin(Z_0) \cdot \cos(A_0); \\ y = D \cdot \sin(Z_0) \cdot \sin(A_0); \\ z = D \cdot \cos(Z_0). \end{cases} \quad (1)$$

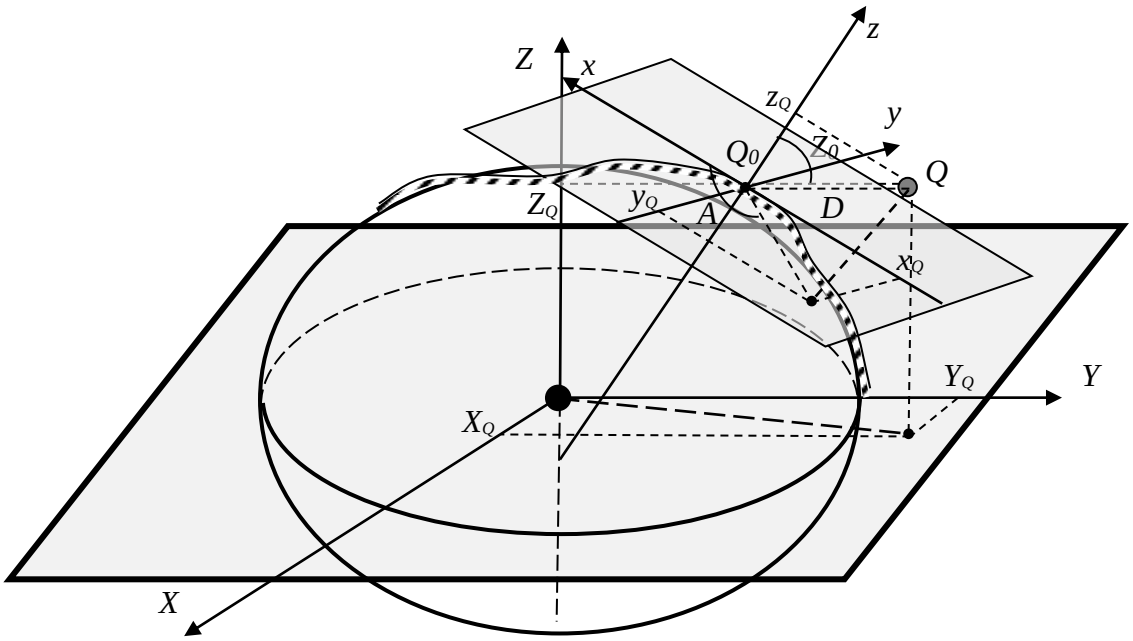

Рисунок 1. – Виды топоцентрических координат на поверхности Земли

В формулах (1) величины

$$c = \begin{cases} l = \sin(Z_0)\cdot\cos(A_0); \\ m = \sin(Z_0)\cdot\sin(A_0); \\ n = \cos(Z_0) \end{cases}$$

являются направляющими косинусами. Тогда (1) можно переписать как

$$\begin{cases} x = D\cdot l; \\ y = D\cdot m; \\ z = D\cdot n. \end{cases} \tag{1a}$$

Обратный переход будет иметь вид [4]:

$$\begin{cases} \tan(A_0) = \dfrac{y}{x}; \\ \operatorname{cotan}(Z_0) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{z}{x\cdot\cos(A_0)+y\cdot\sin(A_0)}; \\ D = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(x\cdot\cos(A_0)+y\cdot\sin(A_0)\right)\cdot\sin(Z_0)+z\cdot\cos(Z_0), \end{cases} \tag{2}$$

а согласно (1а), выражение (2) через направляющие косинусы формулы примет вид:

$$\begin{cases} \tan(A_0) = \dfrac{m}{l}; \\ \operatorname{cotan}(Z_0) = \dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2}}; \\ D = D\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}. \end{cases}$$

Связь между декартовыми топоцентрическими и декартовыми геоцентрическими координатами, отнесёнными к определённому эллипсоиду, установим следующим образом [3].

Шаг 1. Перенесем начало координат топоцентрической системы в точку n_0 (см. рисунок 1), в результате чего координата z увеличится на величину $N_0 + H_0$.

Шаг 2. Повернем оси координат x и z вокруг оси y на угол (90°– B_0), чтобы ось z совпала с осью вращения эллипсоида.

Шаг 3. Перенесем начало координат n_0 в центр эллипсоида O на расстояние $On_0 = e^2 \cdot N_0 \cdot \sin(B_0)$.

Шаг 4. Оси координат, лежащие в плоскости экватора, повернем вокруг оси Z на угол, равный долготе L_0 начальной точки Q_0, а у абсциссы изменим знак на обратный.

В результате преобразований получим формулы в алгебраическом развёрнутом виде [3]:

$$\begin{cases} X = \left[\left(z + N_0 + H_0\right)\cdot\cos(B_0) - x\cdot\sin(B_0)\right]\cdot\cos(L_0) - y\cdot\sin(L_0); \\ Y = \left[\left(z + N_0 + H_0\right)\cdot\cos(B_0) - x\cdot\sin(B_0)\right]\cdot\sin(L_0) + y\cdot\cos(L_0); \\ Z = \left(z + N_0 + H_0\right)\cdot\sin(B_0) + x\cdot\cos(B_0) - e^2 N_0\cdot\sin(B_0). \end{cases} \quad (3)$$

Формулы (3) удобны для прямых вычислений, но очень неудобны, когда требуется вычислить тройку других величин, например, координаты (x, y, z), для решения обратной задачи. Для упрощения этого процесса представим уравнения (3) в матричном виде согласно описанным шагам:

– введем матрицы вращения для шага 2:

$$R_y(90° - B_0) = \begin{bmatrix} -\sin(B_0) & 0 & \cos(B_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(B_0) & 0 & \sin(B_0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

и для шага 4:

$$R_z(L_0) = \begin{bmatrix} \cos(L_0) & -\sin(L_0) & 0 \\ \sin(L_0)0 & \cos(L_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

– учтем сдвиги в преобразовании на шаге 1 и 4 и окончательно получим:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \left[R_z(L_0)\cdot R_y(90° - B_0)\cdot\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 + H_0 \end{bmatrix}\right)\right] - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^2\cdot N_0\cdot\sin(B_0) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Перепишем выражение (6), используя соответствующие обозначения:

$$K_d = E_1\cdot(R\cdot(K_t + \Delta_1) - \Delta_2). \quad (6а)$$

Здесь E_1 матрица вида

$$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрица вращения R

$$R = R_z(L_0)\cdot R_y(90° - B_0) = \begin{pmatrix} \cos(L_0)\sin(B_0) & \sin(L_0) & -\cos(B_0)\cos(L_0) \\ -\sin(B_0)\sin(L_0) & \cos(L_0) & \cos(B_0)\sin(L_0) \\ \cos(B_0) & 0 & \sin(B_0) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Теперь из свёрнутого вида (6а) легко получить в матричном виде обратное преобразование декартовых геоцентрических прямоугольных координат K_d в топоцентрические прямоугольные координаты K_t в виде простой формулы

$$K_t = R^T\cdot\left(E_1^{-1}\cdot K_d + \Delta_2\right) - \Delta_1. \quad (8)$$

Можно учесть, что $E_1^{-1} = E_1$. Ортогональная матрица вращения R равна своей транспонированной, т.е. $R^{-1} = R^T$.

Если есть необходимость, например, для анализа, матричный вид (8) можно записать в алгебраическом, развёрнутом виде, произведя соответствующие матричные операции. Тогда имеем

$$\begin{cases} x = \left(Z + e^2 N_0 \cdot \sin(B_0)\right) \cdot \cos(B_0) - \left(X \cdot \cos(L_0) + Y \cdot \sin(L_0)\right) \cdot \sin(B_0); \\ y = Y \cdot \cos(L_0) - X \cdot \sin(L_0); \\ z = \left(Z + e^2 N_0 \cdot \sin(B_0)\right) \cdot \sin(B_0) + \left(X \cdot \cos(L_0) + Y \cdot \sin(L_0)\right) \cdot \cos(B_0) - \left(N_0 + H_0\right). \end{cases} \quad (9)$$

Если заданы декартовые геоцентрические координаты центра топоцентрической системы (x_0, y_0, z_0) = K_{0d}, (алгебраический вид см. [3]), то формула (8) примет весьма простой и компактный вид

$$K_t = R^T \cdot E_1^{-1} \cdot \left(K_d - K_{0d}\right), \quad (10)$$

а обратная ей формула (6)

$$K_d = E_1 \cdot \left(R \cdot K_t + K_{0d}\right). \quad (11)$$

Если заданы топоцентрические полярные координаты (A_{12}, z_{12}, s_{12}) или топоцентрические горизонтные прямоугольные координаты (x_2, y_2, z_2), то можно найти разность геоцентрических прямоугольных декартовых экваториальных координат между точками 1 и 2 (ΔX_{12}, ΔY_{12}, ΔZ_{12}), используя матрицу преобразования $A = R \cdot E_1$ как

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = A \cdot s_{12} \cdot \begin{bmatrix} \sin(z_{12}) \cdot \cos(A_{12}) \\ \sin(z_{12}) \cdot \sin(A_{12}) \\ \cos(z_{12}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Теперь, зная пространственные прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты первой точки, имея приращения координат, легко вычислить пространственные прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты второй точки.

При обратном преобразовании, когда известны разности прямоугольных геоцентрических координат, полярные или топоцентрические горизонтные координаты легко вычисляются из предыдущей формулы как

$$K_t = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = s_{12} \cdot \begin{bmatrix} \sin(z_{12}) \cdot \cos(A_{12}) \\ \sin(z_{12}) \cdot \sin(A_{12}) \\ \cos(z_{12}) \end{bmatrix} = A^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В геодезической литературе (см. [1]) часто горизонтные топоцентрические координаты обозначают как ENU (East-North-Up).

Используя совместно (7), (8) и (13), имеем общий матричный набор формул, позволяющий быстро решить как прямые, так и обратные задачи преобразования топоцентрических координат в виде

$$K_t = R^T \cdot \left(E_1^{-1} \cdot K_d + \Delta_2\right) - \Delta_1 = s_{12} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}_p = A^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Заключение. Полученные формулы (10) и (11) намного удобнее для практического использования, чем их алгебраический аналог [3], так как легко позволяют решать все обратные задачи, т.е. при необходимости определить координаты K_d, K_t или координаты центра K_{0d} без трудоемкого процесса решения системы нелинейных уравнений.

На основании формулы (14) находятся все требуемые формулы связи между геоцентрическими прямоугольными, топоцентрическими горизонтными и полярными координатами с минимальными вычислительными затратами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: монография: в 2 т. – М.: ФГУП «Картгеоцентр», 2005. – Т. 1. – 334 с.
2. Бойко Е.Г. Высшая геодезия. Часть 2. Сфероидическая геодезия: учебник для вузов. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2003. – 144 с.
3. Машимов М.М. Геодезия. Теоретическая геодезия: справочное пособие / Под ред. В.П. Савиных, В.Р. Ященко. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
4. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Недра, 1979. – 296 с.

REFERENCES

1. Antonovich, K.M. (2005). *Ispol'zovanie sputnikovykh radionavigatsionnykh sistem v geodezii: monografiya: v 2 t. T. 1*. Moscow: FGUP «Kartgeotsentr». (In Russ.).
2. Boiko, E.G. (2003). *Vysshaya geodeziya. Chast' 2. Sferoidicheskaya geodeziya: uchebnik dlya vuzov*. Moscow: Kartgeotsentr-Geodezizdat. (In Russ.).
3. Mashimov, M.M., Savinykh, V.P. (Eds.) & Yashchenko, V.R. (Eds.) (1991). *Geodeziya. Teoreticheskaya geodeziya: spravochnoe posobie*. Moscow: Nedra. (In Russ.).
4. Morozov, V.P. (1979). *Kurs sferoidicheskoi geodezii. Izd. 2-e, pererab. i dop*. Moscow: Nedra. (In Russ.).

Поступила 18.02.2025

MATRIX GENERALIZATION OF TOPOCENTRIC COORDINATE TRANSFORMATIONS

A. DEGTJAREV, P. PARADNYA
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

The article presents the possibility of generalizing the transformations of various types of topocentric coordinates using a matrix form, which makes the transformation procedures themselves more understandable, compact and reversible with the least computational and theoretical costs.

Keywords: *coordinate systems, cartesian topocentric coordinates, cartesian geocentric coordinates, polar topocentric coordinates, coordinate transformations, matrix representation of transformations.*