

## ГЕОДЕЗИЯ И КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.482

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРЕНА СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА СОВРЕМЕННЫМИ МЕТОДАМИ

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЕВ; канд. техн. наук, доц. В.В. ЯЛТЫХОВ  
(Полоцкий государственный университет)

*На основе анализа современных методов производства и обработки геодезических измерений рассматривается возможность более качественного и эффективного определения кренов сооружений башенного типа. Показано преимущество использования современных методов для решения подобных задач как с точки зрения измерений, например, электронными тахеометрами, так и с точки зрения вычислений, используя, в частности, встроенные алгоритмы оптимизации, или метода Каса на основе метода наименьших квадратов. Выявлены некоторые дополнительные факторы, влияющие на точность решения задачи, такие как выраженная несферичность и неровность поверхности конструкций, требующие учета и исследования. Даются рекомендации по рациональному использованию предложенных методик.*

**Введение.** Ряд важных геодезических работ за счет их измерительной и вычислительной сложности ранее выполнялся с использованием разного рода упрощений и приближений. Очевидно, что в некоторых случаях это приводило к значимой потере точности полученных результатов, но давало выигрыш во времени. С бурным развитием в геодезическом производстве измерительных и вычислительных средств необходимость в ряде упрощений и приближений отпадает, а рационально используя эти средства, мы незначительно увеличив затраты времени, сохраним высокую точность и продуктивность. Один из таких видов работ – это наблюдение за деформациями в виде крена инженерных сооружений башенного типа.

К сооружениям башенного типа относятся: дымовые и вентиляционные трубы, градирни, ректификационные колонны, грануляционные башни, копры над стволами шахт, водонапорные башни, радиотелевизионные антенные опоры, силосные башни и другие сооружения.

Крен – наиболее характерный показатель общей деформации высокого сооружения. Он возникает из-за неравномерных осадок фундамента, изменения гидрогеологии несущих грунтов, тектонических и техногенных процессов, искривлений верхней части конструкции и других факторов. Существенное влияние на величину и направление крена оказывают ветровые нагрузки и односторонний солнечный нагрев, в результате чего верх сооружения совершает амплитудно-частотные колебания.

Существует значительное количество способов определения крена высоких зданий и сооружений башенного типа:

- способ координат;
- способы на основе угловых измерений;
- способ вертикального проектирования;
- способы на основе нивелирования;
- способы с применением клинометров;
- способ с использованием лазерного сканирования;
- способы с использованием GPS-приемников;
- комбинированные;
- некоторые другие способы.

**Постановка задачи.** В статье [1] профессора Г.А. Шеховцова предлагается новый способ определения крена высоких сооружений башенного типа круглой формы (например, дымовых труб, градирен, нефтехранилищ и т.п.) с помощью электронного тахеометра. Современные электронные тахеометры позволяют измерять расстояния без отражателя до 200...500 и более метров с точностью 1...3 мм и, помимо прочего, определять координаты точек визирования. Способ назван автором «односторонний координатный», в отличие от других (например, от известного способа направлений), этот способ не требует видимости образующих такого сооружения, для его реализации достаточно наблюдать лишь часть тела сооружения.

Сущность способа заключается в следующем (рис. 1). Устанавливают прибор на некотором расстоянии от сооружения и в произвольной системе прямоугольных координат определяют координаты

любых трёх точек, расположенных в заданном сечении. Предполагая, что сечение имеет форму окружности по всей форме, записываем координатное уравнение окружности:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = R^2, \quad (1)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – координаты центра сооружения.

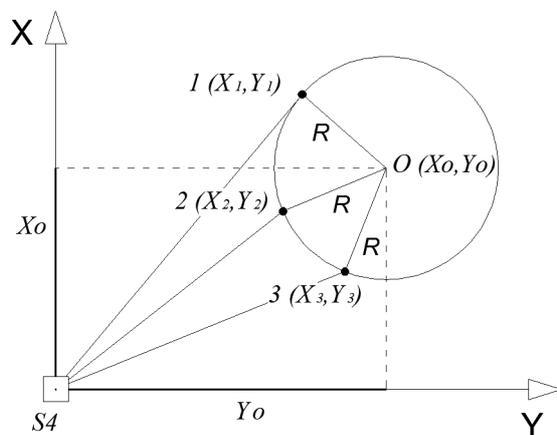


Рис. 1. Схема определения крена односторонним способом

Для определения координат центра окружности при неизвестном радиусе необходимо решить систему из трех уравнений, используя координаты определенных точек:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= R^2, \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= R^2, \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Предлагается вычисления производить по следующим формулам:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) \end{vmatrix} = 4(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_3) - 4(x_1 - x_3) \cdot (y_1 - y_2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) & 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2) & 2(y_1 - y_3) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = 2(y_1 - y_3)((x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)) - 2(y_1 - y_2)((x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2));$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2(y_1 - y_2) & (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) \\ 2(y_1 - y_3) & (x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = 2(y_1 - y_2)((x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2)) - 2(y_1 - y_3)((x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)).$$

Также рекомендуется для повышения точности и надёжности получаемых результатов увеличить количество наблюдаемых точек. Тогда для четырёх точек получаем четыре значения координат центра: для пяти – десять значений, для шести – двадцать, и т.д. В качестве конечных результатов берутся соответствующие средние.

Анализ методики измерений и вычислений, предложенной Г.А. Шеховцовым, позволяет сделать выводы, что по ряду причин односторонние наблюдения для определения крена сооружений башенного типа не всегда оптимальны, а методика обработки может дать приближенные конечные результаты.

Цель данной работы – доказать практически результаты анализа и предложить более оптимальную схему измерений и вычислений, решающую поставленную задачу с наименьшей потерей точности и наименьшими временными затратами.

**Решение.** Для практического доказательства были взяты данные определения крена дымовой трубы высотой 120 м двумя методами: методом прямой угловой засечки (эталон) и односторонним координатным способом (предложен Г.А. Шеховцовым). Схема измерений и результаты вычислений для первого способа приведены на рисунке 2 и в таблице 1, а для способа 2 – на рисунке 3 и в таблице 2.

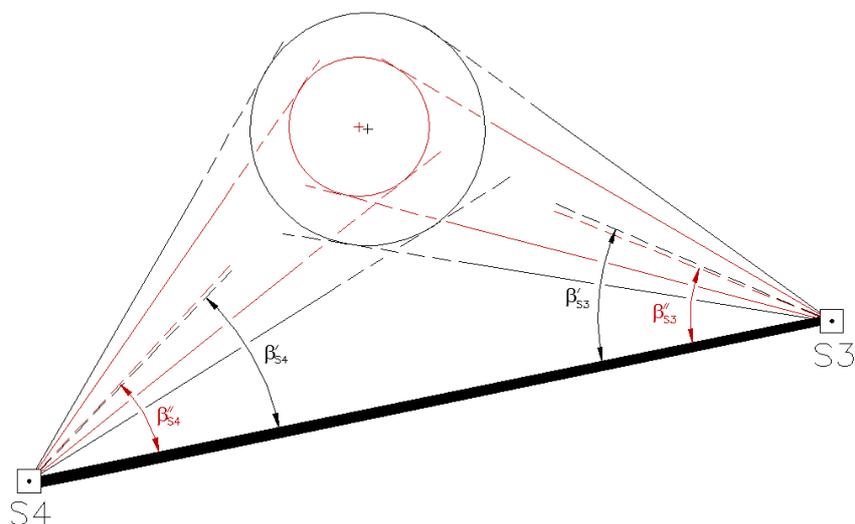


Рис. 2. Схема определения крена прямой угловой засечкой

Таблица 1

Результаты вычислений крена методом прямой угловой засечки

Измеренные горизонтальные углы $\beta_i$				Координаты пунктов наблюдения		Сечение	Координаты центров трубы	
$\beta'_{S3} =$	26°	11'	26"	$X_{S3} =$	50,601 м		Нижнее	$X''_o =$
$\beta'_{S4} =$	28°	45'	33"	$Y_{S3} =$	271,524 м	$Y''_o =$		115,204 м
$\beta''_{S3} =$	26°	10'	10"	$X_{S4} =$	0,000 м	Верхнее	$X''_o =$	94,382 м
$\beta''_{S4} =$	28°	51'	18"	$Y_{S4} =$	0,000 м		$Y''_o =$	114,855 м
Общий крен $Q =$								351 мм
Направление крена $A =$								275,9°

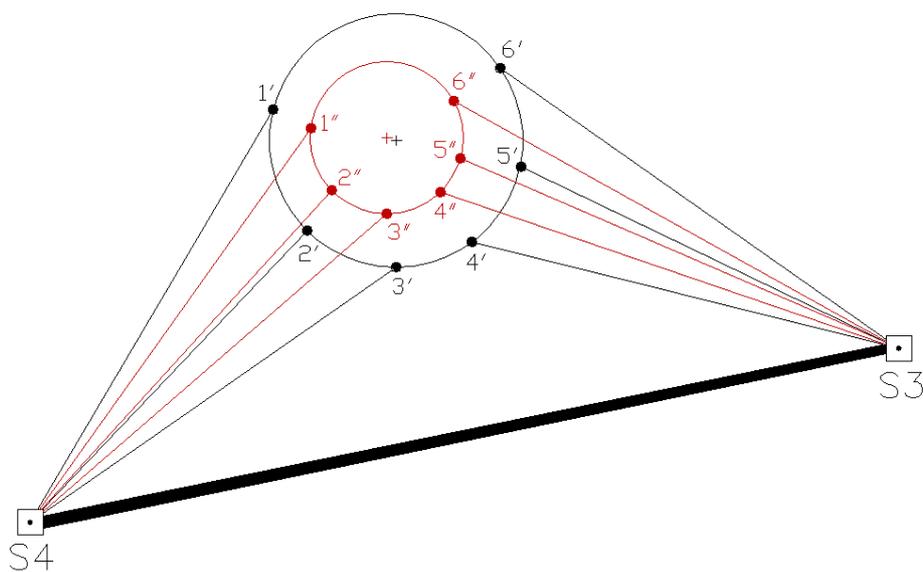


Рис. 3. Схема определения крена односторонним координатным способом

Таблица 2

Результаты вычисления крена односторонним координатным способом

Определение крена со станции S <sub>4</sub>				Определение крена со станции S <sub>3</sub>			
Нижнее сечение				Нижнее сечение			
X'1 =	95,485 м	Δ	-59,3972	X'4 =	89,949 м	Δ	-45,2921
Y'1 =	110,116 м	Δx =	-5608,55	Y'4 =	118,056 м	Δx =	-4271,49
X'2 =	90,911 м	Δy =	-6849,34	X'5 =	92,780 м	Δy =	-5214,96
Y'2 =	111,339 м	Координаты центра		Y'5 =	120,158 м	Координаты центра	
X'3 =	89,125 м	X'o =	94,424 м	X'6 =	97,255 м	X'o =	94,310 м
Y'3 =	115,063 м	Y'o =	115,314 м	Y'6 =	119,481 м	Y'o =	115,140 м
Верхнее сечение				Верхнее сечение			
X''1 =	95,101 м	Δ	-18,3317	X''4 =	92,037 м	Δ	-11,4011
Y''1 =	111,699 м	Δx =	-1729,19	Y''4 =	117,104 м	Δx =	-1076,38
X''2 =	92,696 м	Δy =	-2103,8	X''5 =	93,776 м	Δy =	-1307,71
Y''2 =	112,057 м	Координаты центра		Y''5 =	118,018 м	Координаты центра	
X''3 =	91,222 м	X''o =	94,328 м	X''6 =	96,122 м	X''o =	94,410 м
Y''3 =	114,182 м	Y''o =	114,763 м	Y''6 =	117,612 м	Y''o =	114,700 м
Общий крен Q =			560 мм	Общий крен Q =			451 мм
Направление крена A =			260,1°	Направление крена A =			282,8°

Как видно из полученных результатов, величина крена отличается на 109 мм, изменение направления крена составило 22,7°, а это не допустимо, что и требовалось показать.

Такой результат можно объяснить, во-первых, локальными неровностями на поверхности дымовой трубы, возникшими при бетонировании (рис. 4), а во-вторых, тем, что сооружение, принимаемое за окружность по всей протяженности в одностороннем методе, не обязательно является таковым.



Рис. 4. Возможные неровности формы сооружений башенного типа

Для нашего примера (по шесть точек в одном сечении) возможно вычислить значения координат центра окружности в одном сечении, используя различные комбинации точек. И таких комбинаций будет 20, что значительно увеличивает объем вычислений, а усреднение их значений может привести к не совсем математически корректным результатам.

Более корректный подход обработки результатов измерений с математической точки зрения – это решение системы нелинейных уравнений под условием минимизации функции качества вида

$$F = \sum v_i^2 \Rightarrow \min.$$

Современные вычислительные средства дают разные возможности решения этой задачи с сохранением точности и математической строгости.

Для решения запишем уравнение окружности (1) в развернутом виде. Если все точки принадлежат окружности, то разность между правой и левой частью уравнения равна нулю. Но так как мы имеем от-

клонения от окружности по форме и из-за точности измерений, эта разность будет иметь какое-то не нулевое значение  $v_i$  для  $i$ -й точки вида

$$x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x_0 - 2y_i y_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = v_i. \tag{3}$$

Здесь  $x_0$  и  $y_0$  – координаты центра окружности;  $R$  – радиус окружности,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты  $i$ -й точки на окружности.

Полученную систему для  $n$  точек с тремя неизвестными ( $x_0, y_0, R$ ) можно решить под условием, что  $F = \sum v_i^2 \Rightarrow \min$ , на основе метода наименьших квадратов. Наиболее рациональный метод решения таких систем – это метод Каса (2), описанный также в учебнике по обработке результатов измерений для геодезистов в (3). В этом методе уравнение (1) после раскрытия скобок группируется следующим образом:

$$x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x_0 - 2y_i y_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = a_1(x_i^2 - y_i^2) + a_4 x_i + a_5 y_i + a_6 = 0, \tag{4}$$

в котором принято

$$\begin{aligned} a_4 &= -2x_0; \\ \begin{cases} a_1 = 1; \\ a_5 = -2y_0; \end{cases} & \tag{5} \\ a_6 &= x_0^2 + y_0^2 - R^2. \end{aligned}$$

Записывая уравнения (4) для  $n$  точек, получим систему уравнений, которую в матричном виде можно представить как

$$A_1 \cdot a_1 + A_2 \cdot x_2 = 0, \tag{6}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда вектор решения значения  $\hat{x}_2$  можно получить по формуле

$$\hat{x}_2 = (A_2^T A_2)^{-1} A_2^T A_1. \tag{8}$$

Выполним вычисления по приведенным выше формулам, используя данные таблицы 3.

Таблица 3

Исходные данные для расчета на основе алгоритма Каса

Нижнее сечение			Верхнее сечение		
№	X, м	Y, м	№	X, м	Y, м
1	95,485	110,116	1	95,101	111,699
2	90,911	111,339	2	92,696	112,057
3	89,125	115,063	3	91,222	114,182
4	89,949	118,056	4	92,037	117,104
5	92,780	120,158	5	93,776	118,018
6	97,255	119,481	6	96,122	117,612

В результате вычислений получим:

- для нижнего сечения:

$$A_1' = \begin{pmatrix} 21242,938 \\ 20661,149 \\ 21182,722 \\ 22027,999 \\ 23046,076 \\ 23734,251 \end{pmatrix}, \quad A_2' = \begin{pmatrix} 95,485 & 110,116 & 1 \\ 90,911 & 111,339 & 1 \\ 89,125 & 115,063 & 1 \\ 89,949 & 118,056 & 1 \\ 92,780 & 120,158 & 1 \\ 97,255 & 119,481 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_2' = \begin{pmatrix} -188,646 & -188,646 \\ -230,411 & -230,411 \\ 22142,185 & 22142,185 \end{pmatrix}$$

- для верхнего сечения:

	21520,728	95,101	111,699	1			
	21149,217	92,696	112,057	1			
$A_1'' =$	21358,957	$A_2'' =$	91,222	114,182	1	$\hat{x}_2'' =$	-188,777
	22184,115		92,037	117,104	1		-229,701
	22722,124		93,776	118,018	1		22089,194
	23072,115		96,122	117,612	1		22089,194

Окончательные результаты определение величины и направления крена приведены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты определение величины и направления крена

Сечение	Нижнее, м	Верхнее, м
$X_0 =$	94,323	94,388 м
$Y_0 =$	115,206	114,850 м
$R =$	5,195	3,246
Величина крена $Q$ , мм	361	
Направление крена $A^\circ$	280,4	

Для контроля решение системы нелинейных уравнений было выполнено с использованием поиска минимума функции квадратичного вида на основе функции «Поиск решения» из программного продукта Excel (рис. 5). Здесь исходные координаты помещены в ячейках В9-14:С9-14; Н9-14:И9-14, приближенные значения неизвестных – в ячейках В3:В5 и Н3:Н5. В столбце D вычисляется значение  $v_i$  (в метрах) из формулы (3) для поправок  $v_i$

$$x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x_0 - 2y_i y_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = v_i.$$

В ячейке D4 вычисляется  $\sum v_i^2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Нижнее сечение</b>					<b>Верхнее сечение</b>					
2	Параметры					Параметры					
3	$X_0 =$	94,323	м	Целевая функция			$X_0 =$	94,388	м		
4	$Y_0 =$	115,206	м	0,387817			$Y_0 =$	114,850	м		
5	$R =$	5,195	м				$R =$	3,246	м		
8	№	X, м	Y, м	$v_i$ , м	$\delta R$ , мм		№	X, м	Y, м	$v_i$ , м	$\delta R$ , мм
9	1	95,485	110,116	0,270	26		11	95,101	111,699	-0,098	-15
10	2	90,911	111,339	-0,394	-38		12	92,696	112,057	0,130	20
11	3	89,125	115,063	0,053	5		13	91,222	114,182	-0,067	-10
12	4	89,949	118,056	0,270	26		14	92,037	117,104	0,072	11
13	5	92,780	120,158	-0,086	-8		15	93,776	118,018	-0,133	-20
14	6	97,255	119,481	-0,113	-11		16	96,122	117,612	0,096	15

Рис. 5. Решение задачи минимизации в программе Excel

Результаты вычислений всеми методами сведены в общую таблицу 5.

Таблица 5

Сводные результаты вычислений

Способ определения		Общий крен Q, мм	Направление крена $A^\circ$
Прямой угловой засечки		351	275,9
Односторонний координатный способ:			
со станции S3		451	282,8
со станции S4		560	260,1
МНК	по формулам (4-8)	361	280,4
	MS Excel «Поиск решения»	361	280,4

**Заключение.** Результаты вычислений по формулам (4)–(8) метода Каса и на основе функции «Поиск решения» в программе Excel полностью совпадают, но отличаются от решения на основе одностороннего метода.

Как можно видеть из результатов вычисления крена, любая классическая схема измерений с равномерным распределением точек или достаточным охватом (например, координатный метод или метод угловой засечки) и способом обработки по строгой схеме метода наименьших квадратов в каком-либо виде (метод Каса, поиск экстремума и т.д.) также практически идентичны (разница составляет 10 мм при допустимой величине крена для данной трубы 0,50 м согласно [4]).

Предложенный профессором Шеховцовым «односторонний метод» нужно использовать очень осторожно. В силу того, что метод «односторонний» его результаты существенно зависят от реальной формы объекта и качества поверхности объекта. Поэтому объекты, крен которых определяется «односторонним координатным методом», должны иметь достаточно правильную геометрическую форму, то есть быть симметричными относительно области наблюдений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеховцов, Г.А. Теоретические основы одностороннего координатного способа определения крена сооружений башенного типа / Г.А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и Аэрофотосъемка. – 2012. – № 5. – С. 30–31.
2. Kása, I. A Circle Fitting Procedure and Its Error Analysis / I. Kása // IEEE transactions on instrumentation and measurement, march 1976. – P. 8–14.
3. Jäger, R. Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – ein Leit faden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern / R. Jäger, T. Müller, H. Saler, R. Schwäble. – Wichman, 2005. – 340 p.
4. Основания и фундаменты зданий и сооружений: СНБ 5.01.01-99 / МАиС Респ. Беларусь. – Минск, 1999. – 36 с.

*Поступила 05.06.2014*

#### **DEFINITION OF TOWER BUILDING TILT WITH THE HELP OF MODERN METHODS**

***A. DEGTJAREV, V. JALTYHOV***

*Based on the analysis of the modern methods of carrying out and processing geodetic measurements, the article discusses the possibilities of more efficient definition of tower building tilt. The advantages of using up-to-date methods are demonstrated for solving these problems not only for measurement purposes, for instance, with the help of a total station, but also for data processing, for instance, with the help of the optimization procedure or Kasa method based on least square adjustment. The article reveals a few additional factors, which have impact on the results accuracy, such as expressed non-sphericity and unevenness of construction surface, requiring consideration and research. The author provides recommendations for the rational implementation of the suggested techniques.*