ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОЭКОЛОГИЯ

УДК 528.063

ОТБРАКОВКА ГРУБЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «РОССИЯ – БЕЛАРУСЬ»

А.Ю. БУДО
(Белорусский национальный технический университет, Минск);
д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Впервые рассматривается вопрос и решена задача вычисления фактической точности измерений по результатам математической обработки измеренных величин. Задача решена двумя способами: линейным (в представляемом нами исследовании этот способ назван Полоцким методом), реализованным в программном комплексе «Россия – Беларусь», и нелинейным, рассмотренным и апробированным в Полоцком университете еще в 2003 году.

Первый (линейный) метод вычисления фактической точности измерений по результатам математической обработки эксперимента

Этот способ разработан, основываясь на трудах академика Ю.В. Линника, профессоров К.Л. Проворова, В.Г. Конусова, Г.В. Макарова, Ю.И. Маркузе, В.А. Коугия, М.Д. Герасименко, А.В. Хлебникова, З.М. Юршанского и многих других. В линейном способе заложены следующие возможности: отыскивается не допуск на поправки из уравнивания, а выполняется поиск фактической точности самих измерений, по которой можно судить о качестве выполненных измерений; здесь сразу узнаем, где находятся грубые измерения, а где качественные наблюдения; не нужны сведения о точности выполненных измерений перед математической обработкой; не требуется знать ни закона распределения ошибок измерений, ни квантиля t, зависящего от уровня значимости.

Для отбраковки грубо ошибочных измерений при использовании параметрического способа уравнивания научной общественностью рекомендуется применять критерий [1]

$$\left|\frac{V_i}{\sigma_{V_i}}\right| > t\ , \tag{1}$$

где V_i – поправка в измерение из уравнивания; σ_{V_i} – стандарт соответствующей поправки; t – квантиль, зависящий от уровня значимости.

В [2] предлагается следующая методика отбраковки. Если неравенству (1) удовлетворяют несколько поправок, одно грубое измерение с наибольшей нормированной поправкой, входящей слева в неравенство (1), исключают, продолжая отбраковку до тех пор, пока методом последовательной обработки не будут удалены все грубо ошибочные измерения. Эта методика надежно выполняет отбраковку грубых ошибок измерений и обобщена в [3] на случай, когда погрешности измерений подчинены различным законам распределения, отличным от нормального. Однако мы не спешили внедрять методику, изложенную в [2], в геодезическое производство, например, в «Комплексную программу» К.Л. Проворова и В.И. Мицкевича, по следующим соображениям:

1) «комплексная программа» позволяет обрабатывать до 300 пунктов геодезической сети и 2500 измерений. Если допустить, что в обработку войдёт большое количество грубо ошибочных измерений, то даже высокоскоростные персональные компьютеры не смогут выполнить обработку за приемлемое время, поскольку производственные объекты редко обходятся без отбраковки грубых ошибок в исходных данных;

2) величину σ_{V_i} можно вычислить с использованием формулы Ю.В. Линника [4, с. 15]:

$$K_V = \left(E - AF\right) \cdot P^{-1}, \tag{2}$$

где $E_{N\times N}$ – единичная матрица; $A_{N\times T}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $F_{T\times N} = \left(A^T PA\right)^{-1} A^T P$; $P_{N\times N} = diag\left(\dfrac{1}{\sigma_i^2}\right)$ – матрица весов измерений; σ_i – стандарт i-того измерения; N – количество выполненных измерений; T – число параметров.

Диагональные элементы матрицы K_V суть дисперсии, поэтому

$$\sigma_{V_i} = \sqrt{K_{V_{ii}}} \,. \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что величина σ_{V_i} зависит от принятых до уравнивания стандартов измерений σ_i.

Если стандарты излишне малы, что характерно для производственников, завышающих характеристики точности выполненных ими измерений, то согласно (1)–(3) будет забраковано большое количество измерений, что приведёт к ещё более длительному процессу обработки, тем самым отрицательно скажется при использовании программы с данным алгоритмом. Если же σ_i увеличить, то по изложенной выше методике грубо ошибочные измерения могут оказаться не отбракованными.

Докажем, что матрицу коэффициентов условных уравнений B можно вычислить по матрице коэффициентов параметрических уравнений поправок A по формуле

$$B^* = E - AF \,, \tag{4}$$

и матрица B^*, как и матрица $\boldsymbol{B}$, может быть применена для вычисления допуска на полученную из уравнивания поправку в ***i***-тое измерение:

$$\left(V_i\right)_{доп} = t\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(b^*\right)_i^2 \cdot \sigma_i^2} \,, \tag{5}$$

точно так же, как в коррелатном способе уравнивания, вычисляют допустимое значение свободного члена условного уравнения

$$W_{доп} = t\sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \cdot \sigma_i^2} \,. \tag{6}$$

Доказательство

Известно [6], что

$$BA = 0. \tag{7}$$

Это равенство известно из работ профессора Г.В. Макарова ещё с 2004 года.

Умножим (4) справа на матрицу A

$$B^* A = EA - AFA = EA - AE = 0 \,,$$

что и требовалось доказать.

Легко убедиться, что матрица B^* идемпотентна, то есть

$$B^* = B^* B^* B^* \ldots B^* \,, \tag{8}$$

поэтому вместо (5) можно записать [5]

$$\left(V_i\right)_{доп} = t\sqrt{B_{ii}^* \cdot \sigma_i^2} \,, \tag{9}$$

или, сравнивая (2) с (4), имеем

$$\left(V_i\right)_{доп} = t\sqrt{K_{V_{ii}}} \,.$$

Теперь становится ясно, что исключение одного грубо ошибочного измерения с последующим повторением процедуры уравнивания по указанной выше методике нецелесообразно на конечном этапе обработки, когда грубые промахи в измерениях уже отфильтрованы. Поскольку эти промахи могут так исказить поправки в измерения из уравнивания, что найти грубо ошибочные измерения будет затруднительно, то методику В.А. Коугия обязательно следует применять. После отбраковки грубых промахов поиск грубо ошибочных измерений выполняют без итераций.

Определению грубых промахов в информации посвящено много работ, в частности кандидатская диссертация А.В. Зубова [7], выполненная под руководством доктора технических наук, профессора А.В. Хлебникова, которому принадлежит следующая формула [8]:

$$V = \left(E - AF\right) \cdot L \,,$$

позволяющая находить вектор поправок из уравнивания, зная вектор свободных членов параметрических уравнений поправок L.

Поскольку фильтрация грубых промахов может быть выполнена с использованием предварительно известных (не отвечающих действительности) стандартов измерений, то корректировку стандартов измерений, близких к реальным, можно осуществить автоматически после удаления грубых промахов, используя методику В.А. Коугия [2].

В программе «Россия – Беларусь» предусмотрена отбраковка грубо ошибочных измерений для геодезических сетей с дефектом конфигурации и с дефектом данных, поскольку в комплексе предусмотрено вычисление псевдообратной матрицы A^{+}.

В этой программе также реализован обобщённый метод уравнивания, что делает простым вычисление

$$K_V = \left(E - AF\right) \cdot K , \qquad (10)$$

где $K_{N \times N}$ – ковариационная матрица измерений.

$$F = \left(A^T K^{-1} A\right)^{-1} A^T \cdot K^{-1}. \qquad (11)$$

Примеры использования формул (10), (11), а также теория обобщённого метода уравнивания детально рассмотрены в [9].

Формулу (9) можно записать иначе:

$$V_i = \sqrt{B_{ii}^{*} \cdot \sigma_i^2} , \qquad (12)$$

откуда немедленно следует

$$\sigma_i = \frac{|V_i|}{\sqrt{B_{ii}^{*}}} . \qquad (13)$$

Следовательно, зная $|V_i|$ и диагональные элементы матрицы B^{*}, известной ещё академику Ю.В. Линнику, можно вычислить фактическую точность измерений σ_i. Этот метод внедрён в программу «Россия – Беларусь» и назван нами Полоцким методом по аналогии с известным Датским методом. Методика применения выражения (13) заключается в следующем: если выявлены грубые промахи в информации, то, применяя формулу (4), мгновенно вычисляется σ_i, который назовём фактической точностью измерений и обозначим *FT*. Таким образом, теоретически обосновано и доказано, что

$$FT_i = \frac{|V_i|}{\sqrt{B_{ii}^{*}}} . \qquad (14)$$

В результате становится возможным следующее:

1) надо искать не допуск на поправку из уравнивания, а выполнять оценку точности самих измерений, по которой судить о качественности этих измерений;

2) в этом случае мы сразу узнаем, где находятся грубые измерения;

3) не нужны сведения о точности выполненных измерений перед математической обработкой;

4) не требуется знать ни закона распределения ошибок измерений, ни квантиль t;

5) после получения *FT* можно заново вычислить веса измерений и новые значения *FT* для уточнённых характеристик точности измерений.

Числовые примеры приведём ниже.

Второй (нелинейный) метод вычисления фактической точности измерений по результатам математической обработки эксперимента

Нелинейный способ применялся ранее при решении задачи проектирования геодезических сетей путем поиска таких значений характеристик точности измерений, при которых можно получить наперед заданные характеристики оценочных функций измеренных и уравненных величин, сформулированной З.П. Тамутисом.

В [5] предлагается следующая методика отбраковки грубо ошибочных измерений. Если неравенству (1) удовлетворяют несколько поправок, одно грубое измерение с наибольшей нормированной поправкой, входящей слева в неравенство (1), исключают, продолжая отбраковку до тех пор, пока методом последовательной обработки не будут удалены все грубо ошибочные измерения.

Эта методика надёжно выполняет отбраковку грубых ошибок измерений и обобщена в [3] на случай, когда погрешности измерений подчинены законам распределения, отличным от нормального. Сущность нашего предложения изложена в [5, с. 15] при решении вопроса о вычислении весов измерений по результатам уравнивания.

Определение оптимального плана измерений при заданной точности искомых параметров сети и минимальном числе повторений наблюдений наиболее полно изложено в [5].

Рассмотрим решение аналогичной задачи с позиций многокритериальной оптимизации с применением следующих двух целевых функций [16]:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{k,i} L_i^2(X), \tag{15}$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M), \tag{16}$$

где X – вектор координат определяемых пунктов; N – количество измерений; $L(X)$ – свободный член параметрического уравнения; $P_{i,k}$ – вес параметрического уравнения, причем

$$P_{k,i} = \left| p_i + \frac{p_i}{5} K_i \right|. \tag{17}$$

Здесь

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}; \tag{18}$$

K_i – коэффициент для каждого измерения ($-4 \le K \le 20$), отыскиваемый методом релаксации [10; 11] под условием минимума $\Phi_2(X)$.

Поиск K_i осуществляется в j-том приближении для каждого измерения в отдельности методом подбора из трех вариантов: K_i, K_i+1 и K_i-1. При этом принимают вариант, отвечающий минимуму функции (16). Количество приближений – не более 20.

В (16) M – ошибка положения определяемого пункта.

Известно, что веса измерений при уравнивании должны быть определены до обработки и должны оставаться неизменными. Так требует теория уравнительных вычислений. Но все же нарушая это правило, предпримем попытку уточнения весов измерений в процессе уравнивания. Для этих целей используем формулы:

$$M = \mu_j \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}}, \tag{19}$$

$$\mu_j = \sqrt{\frac{V^T \mathrm{P}_{k,i} V}{r}}. \tag{20}$$

Если выполняется многокритериальная оптимизация [5; 6], то сначала определяется степень n, далее решается указанная выше задача по нахождению K, а затем и P, а следовательно и σ для каждого измерения.

Выполним обработку поиска фактической точности измерений с помощью программы «Россия – Беларусь» по указанной выше методике для одного примера [17].

Результаты вычислений:

```
MNKGAUSS1
Метод МНК
  N=        8 T=        4
Задача обыкновенная
N=        8
T=        4
PR=       0
MJ=     12.532941157629690
значения параметров DX из уравнивания
        1  3.301564098076235E-007         2  -4.625456865038277E-006
        3  8.005966403809572E-006         4  -2.104533864663583E-006
свободные члены перед уравниванием
        1      -8.669000000000001         2       12.235000000000000
        3     -13.783000000000000         4  2.160000000000000E-001
        5      -1.327000000000000         6       21.893000000000000
        7  4.470000000000000E-001         8       18.986000000000000
```

фактическая точность измерений

1	11.186860751407810	2	14.920557846201360
3	14.519514795909930	4	2.873173999442655E-001
5	1.615822409092577	6	24.913216228263330
7	5.753256569336016E-001	8	22.246119800264530

истинные поправки из уравнивания

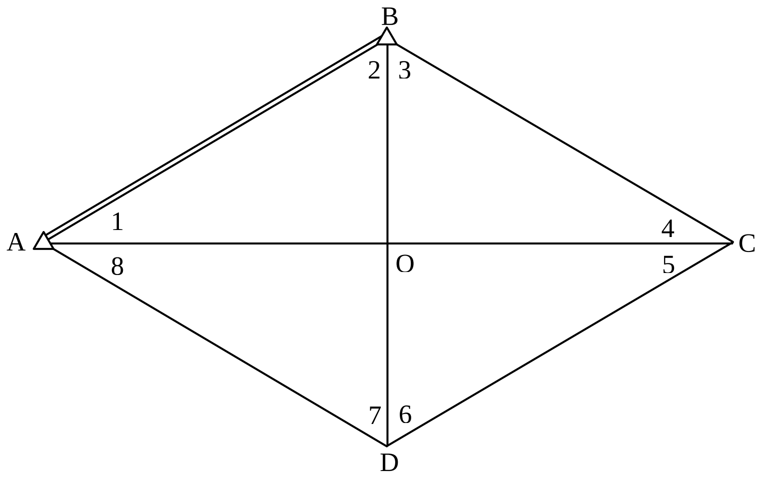
1	-8.669169357469254	2	12.234626757889300
3	-13.783298769034050	4	2.168413681514578E-001
5	-1.327469992259643	6	21.892927392679700
7	4.475684562390628E-001	8	18.985974143340890

Откуда видно, что самым грубым является измерение № 6. При этом заметим, что поправка в это измерение также является наибольшей, что не всегда обязательно и особенно важно.

Апробация первого метода вычисления фактической точности полевых измерений с использованием результатов уравнивания

Числовые примеры

Применим новые формулы для уравнивания геодезического четырехугольника [17], показанного на рисунке.



Геодезический четырехугольник

Измеренные углы

Угол	Измерение
1	37° 58' 22"
2	39° 18' 30"
3	61° 01' 37"
4	41° 41' 41"
5	50° 01' 55"
6	27° 14' 40"
7	26° 57' 40"
8	75°45' 05"

Свободные члены линейных параметрический уравнений для измеренных углов и вычисленных углов по координатам точек A, B, C и D, указанным в [17]

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
Свободный член L	–29,8	17,7	–6,4	8,5	0,9	4,0	5,1	30,0

Все расчеты выполним по следующим четырем программам комплекса «Россия – Беларусь»:

1. GAUSS1 уравнивание измерений по МНК необобщенным способом с применением псевдообращения матриц [16].

2. MIZK2 многокритериальное необобщенное уравнивание [15].

3. TIXONOV2 уравнивание по МНК необобщенное при единичной корреляционной матрице и обобщенное при неединичной корреляционной матрице с применением регуляризированного решения [13].

Счет по программе № 1. Исходные пункты A, B

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	11,21	14,89	14,72	0,03	1,19	25,30	1,25	22,8
FT	5,12	10,86	15,74	0,00	0,09	22,83	0,07	17,33
ист. V	–5,12	10,86	–15,74	0,00	–0,09	22,83	–0,07	17,33

Замечание: первое значение *FT* получено по (14), второе значение *FT* получено также по (14) с последующей обработкой по программам, делая замену $\sigma_i = FT_i$, при вычислении весов измерений перед повторным уравниванием.

Счет по программе № 2. Исходные пункты А, В

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	1,39	1,73	1,81	1,42	1,22	1,35	1,33	1,32
FT	4,86	3,55	3,62	5,33	6,20	4,97	5,26	6,06
ист. V	4,74	5,08	5,19	5,07	4,99	4,78	5,05	5,13

Счет по программе № 3. Исходные пункты А, В. Необобщенный МНК

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	5,72	5,85	5,25	7,74	3,15	14,31	8,63	19,34
FT	3,74	6,86	8,07	4,39	5,65	10,88	8,79	20,19
ист. V	3,44	6,57	–6,10	–3,91	5,09	9,82	8,64	16,45

Счет по программе № 3. Исходные пункты А, В.
Обобщенный МНК с корреляционной матрицей, предназначенной для уравнивания по направлениям

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	8,24	2,31	2,31	8,38	0,31	15,99	7,33	22,16
FT	8,98	2,94	6,25	6,51	1,63	15,37	7,58	20,32
ист. V	8,05	2,79	–4,77	–6,08	1,54	14,21	7,55	16,70

Счет по программе № 1. Без исходных пунктов. Необобщенный МНК

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	11,48	14,54	17,58	0,03	1,31	26,85	1,24	26,54
FT	4,11	10,57	16,46	0,00	0,10	23,56	0,07	16,61
ист. V	–4,11	10,57	–16,46	0,00	–0,10	23,56	–0,07	16,61

Счет по программе № 2. Без исходных пунктов. Многокритериальный

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	1,57	1,30	1,54	1,47	1,35	1,28	1,32	1,55
FT	4,09	5,25	4,50	5,05	5,12	5,53	5,28	4,80
ист. V	5,02	4,74	4,88	5,33	5,05	4,65	4,78	5,54

Счет по программе № 3. Без исходных пунктов. Необобщенный МНК

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	0,79	5,11	2,28	4,07	0,22	5,42	5,26	11,77
FT	1,24	0,15	0,25	1,20	2,80	3,88	3,38	5,11
ист. V	0,99	0,12	–0,19	–0,92	–2,50	3,61	3,06	–4,16

Счет по программе № 3. Без исходных пунктов. Обобщенный МНК для уравнивания по направлениям

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
FT	6,30	1,29	3,92	4,07	1,62	8,15	3,80	11,14
FT	0,84	0,19	1,66	2,88	4,52	5,30	4,50	5,72
ист. V	0,66	0,16	1,30	–2,12	–4,07	4,89	4,03	–4,86

В заключение можно сделать следующие **выводы:**

1) **теперь не требуется** выбирать метод уравнивания при неизвестном законе распределения погрешностей измерений. Для конкретного примера подходит тот метод, для которого будет минимальной из максимальных значений фактических точностей *FT*. Это соответствуют утверждению Гаусса «Правильная математическая обработка должна приводить к повышению точности самих измерений»;

2) приобщать специалиста для поиска грубо выполненных измерений. Можно обнаружить аномальные ошибки измерения, используя вычисленную *FT* с их априорной точностью;

3) **становится возможным** выполнять эталонирование любого измерительного прибора, сравнивая FT для исследуемых по качественным характеристикам приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасименко, М.Д. К вопросу о выявлении грубых ошибок измерений / М.Д. Герасименко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2010. – № 6. – С. 3–6.

2. Коугия, В.А. Сравнение двух методов обнаружения и идентификации грубых ошибок измерений / В.А. Коугия // Геодезия и картография. – 1998. – № 5. – С. 23–28.
3. Бондаренко, В.А. Уравнивание нивелирных сетей с поиском грубых ошибок измерений / В.А. Бондаренко, В.И. Мицкевич, Н.С. Сырова // Геодезия и картография. – 2003. – № 5. – С. 26–28.
4. Коугия, В.А. Обнаружение грубых ошибок измерений по результатам уравнивания / В.А. Коугия // Геодезия и картография. – 1995. – № 6. – С. 14–19.
5. Мицкевич, В.И. Алгоритмы уравнивания геодезических сетей коррелатным способом / В.И. Мицкевич, П.Ф. Парадня, В.Е. Плюта. – Новополоцк, ПГУ, 2009.
6. Дроздов, Н.Д. Линейная алгебра в теории уравнивания измерений / Н.Д. Дроздов. – М.: Недра, 1972.
7. Зубов, А.В. Автоматизированный контроль качества проектирования и обработки маркшейдерско-геодезических сетей: автореф. дис. … канд. техн. наук / А.В. Зубов. – СПб., 1997.
8. Гудков, В.М. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений / В.М. Гудков. – М.: Недра, 1990.
9. Мицкевич, В.И. Альтернативные методы проектирования и уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо, Е.В. Грищенков. – Новополоцк: ПГУ, 2008.
10. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксаци / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36–40.
11. Мицкевич, В.И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25–28.
12. Обработка антирядов измерений одной величины при разных значениях количества неизвестных и различных характеристиках точности измерений с помощью программного комплекса «Россия – Беларусь» / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2012. – № 16. – С. 109–113.
13. Решение примера академика А.Н. Тихонова по обработке нивелирных сетей по программному комплексу «Россия – Беларусь» / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2012. – № 16. – С. 126–131.
14. Головань, Г.Е. Создание программного продукта «Ломоносов» для обработки «взвешенных» антирядов измерений и проверка правильности работы программного комплекса «Россия – Беларусь» / Г.Е. Головань, А.О. Гурко, В.И. Мицкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2013. – № 8. – С. 107–113.
15. Мицкевич, В.И. О программном комплексе «Россия – Беларусь», разработанном и отлаженном в Полоцком государственном университете // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2013. – № 18. – С. 122–126.
16. Мицкевич, В.И. Поиск оптимальных весов результатов измерений в условиях многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2003. – № 11. – С. 19.
17. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24–26.

Поступила 21.10.2014

RUDE MEASUREMENT ERROR SCREENING IN SOFTWARE PACKAGE "RUSSIA – BELARUS"

A. BUDO, V. MITSKEVICH

The issue and the solution to the problem of factual accuracy measurement are considered for the first time based on the results of mathematic processing of measures. The problem is solved with two methods: linear (in the research the approach is called Polotsk method) with the help of the software package "Russia – Belarus", and non-linear, considered and probed at Polotsk State University back in 2003.