

СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 624.012.45

DOI 10.52928/2070-1683-2026-45-2-2-8

ГИПОТЕЗА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

*д-р техн. наук, проф. Д.Н. ЛАЗОВСКИЙ¹⁾,**д-р техн. наук, проф. В.В. ТУР²⁾,**канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ³⁾**(¹⁾ Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,**(²⁾ Брестский государственный технический университет, (³⁾ ООО «Софтклуб», Минск)*

Применение нелинейной деформационной расчетной модели для железобетонных элементов требует учета особенностей применения гипотезы плоских сечений после образования трещин нормального отрыва в поперечном сечении (неравномерность деформирования бетона сжатой зоны по длине элемента и работа растянутого бетона между трещинами и над трещиной). Рассмотрены два варианта учета особенностей деформирования железобетона с трещинами: применение трансформированных диаграмм деформирования бетона и арматуры для осредненного сечения, что соответствует гипотезе плоских сечений для процесса деформирования; применение исходных диаграмм деформирования для сечения с трещиной с последующим переходом к средним деформациям.

Ключевые слова: *изгибаемые железобетонные элементы, нелинейная деформационная расчетная модель, гипотеза плоских сечений, кривизна, средние деформации.*

Введение. В последнее время благодаря обширным исследованиям¹ [1–7] становится практикой широкое применение метода сечений с использованием нелинейной деформационной модели (НДМ), позволяющей с единых универсальных позиций рассчитывать железобетонные элементы любой формы поперечного сечения, с различными арматурой и бетоном, различным размещением арматуры в их сечении^{2,3,4}. Характерной особенностью модели является применение, кроме уравнений равновесия усилий, диаграмм деформирования бетона и арматуры, условия деформирования поперечного сечения, по которому распределяются деформации по поперечному сечению. Учитывая специфику железобетона как комбинированного материала (бетон и арматура), который работает при наличии трещин нормального отрыва (нарушение сплошности), применение широко распространенной для других материалов строительных конструкций гипотезы плоских сечений (Я. Бернулли) требует внесения существенных уточнений. Особенности применения гипотезы плоских сечений для железобетонных элементов установлены исследованиями В.И. Мурашева и Я.М. Немировского [8–10], которые учитываются в расчете железобетонных элементов с трещинами в действующих нормативных документах⁵.

Цель работы: применение гипотезы плоских сечений при моделировании работы изгибаемого железобетонного элемента с трещинами нормального отрыва в поперечном сечении, нормальном к его продольной оси, под нагрузкой вплоть до разрушения.

Диаграммы деформирования материалов. Аппроксимация диаграммы деформирования бетона при сжатии в нормативных документах принимается либо параболической с нисходящей ветвью⁶, либо трехлинейной с горизонтальным участком⁷. Следует отметить, что в предлагаемой авторами методике, в отличие от нормативных документов, диаграмма деформирования бетона при сжатии не ограничивается относительными деформациями его предельной сжимаемости, а также учитывается работа растянутого бетона.

Диаграмма деформирования бетона при осевом кратковременном растяжении принята криволинейного очертания с ниспадающей ветвью в соответствии с [11–13] и представлена на рисунке 1.

¹ Карпенко С.Н. Модели деформирования железобетона в приложениях и методы расчета конструкций: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / Карпенко Сергей Николаевич; Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук. – М., 2010. – 48 с.

² СЕВ-FIB. Model Code for Concrete Structures. – Ernst & Sohn, 2013. – 402 p.

³ СП 5.03.01-2020. «Бетонные и железобетонные конструкции». – Минск: РУП «Стройтехнорм» М-ва архитектуры и стр-ва Респ. Беларусь, 2020. – 236 с.

⁴ СП 63.13330.2018. «СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения». – М., 2018. – 143 с.

⁵ См. сноски 2–4.

⁶ См. сноски 2, 3.

⁷ См. сноску 4.

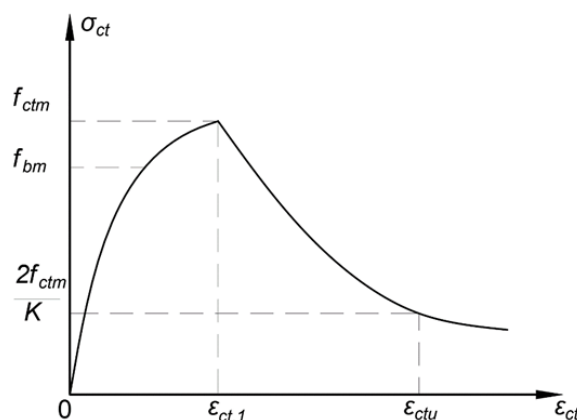


Рисунок 1. – Диаграмма деформирования бетона при осевом кратковременном растяжении

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct,1}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct,1}} \right)^2 \right]; \quad (1)$$

$$\sigma_{ct} = \frac{f_{ctm} \varepsilon_{ct,1}}{\varepsilon_{ct}} = \frac{2 f_{ctm} \varepsilon_{ctu}}{K \varepsilon_{ct}} = \frac{2 f_{c,cube} \varepsilon_{ctu}}{K^2 \varepsilon_{ct}}, \quad (2)$$

где $f_{c,cube}$ – кубиковая прочность бетона при сжатии, МПа;
 f_{ctm} – сопротивление бетона при растяжении (напряжение в верхней точке диаграммы деформирования), МПа;
 K – отношение призмочной прочности бетона при сжатии к сопротивлению бетона при растяжении;
 $\varepsilon_{ct,1}$ – значение относительной деформации в пиковой точке диаграммы деформирования;
 $\varepsilon_{ctu} = (K \cdot \varepsilon_{ct,1}) / 2$ – предельная растяжимость бетона;
 E_{ct} – начальный модуль упругости бетона при растяжении, МПа.

$$K = 6,4 + 0,1223 \cdot f_{cm}; \quad E_{ct} = \frac{10^7 \cdot f_{ctm}}{750 + 81,55 \cdot f_{ctm}}, \quad (3)$$

где f_{cm} – средняя призмочная прочность бетона при осевом сжатии, МПа;
 f_{ctm} – средняя призмочная прочность бетона при осевом растяжении, МПа.
Относительные деформации $\varepsilon_{ctm,1}$ в пиковой точке диаграммы деформирования и предельная растяжимость бетона ε_{ctu} нелинейной диаграммы деформирования бетона изгибаемой конструкции при растяжении согласно [11–13] равны:

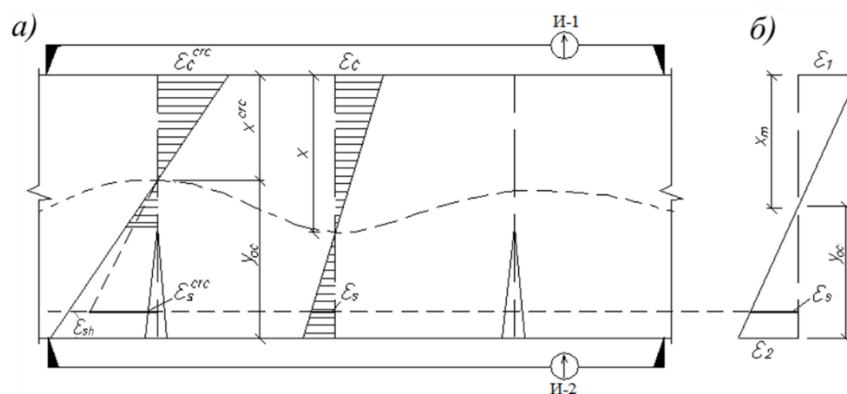
$$\varepsilon_{ctm,1} = \frac{2 \cdot f_{ctm}}{E_{ct}}, \quad \varepsilon_{ctu} = \frac{K \cdot \varepsilon_{ctm,1}}{2}. \quad (4)$$

Гипотеза плоских сечений. Распределение деформаций по поперечному сечению железобетонного элемента до появления трещин подчиняется гипотезе плоских сечений. После появления трещин в момент разрыва бетона растянутой зоны на уровне арматуры появляется сдвиг между арматурой и бетоном, поперечное сечение искривляется. По длине элемента деформации сжатой и растянутой зон сечения переменные, а нейтральная ось волнообразная. При этом в сечении с трещиной участок поперечного сечения железобетонного элемента над трещиной остается плоским. Для поперечных сечений, расположенных на участке между трещинами с отсутствием сдвиговых деформаций в контактном шве арматуры с бетоном, также справедлива гипотеза плоских сечений (рисунок 2, а).

В НДМ для железобетонных элементов применяется гипотеза плоских сечений в постановке В.И. Мурашева – Я.М. Немировского [8–10] для средних продольных деформаций растянутой и сжатой зоны. Многочисленные экспериментальные исследования показали справедливость названной гипотезы для железобетонных элементов, длина которых в 5 и более раз превышает максимальный размер поперечного сечения. В этом случае влиянием сдвигов можно пренебречь. Гипотеза плоских сечений используется в качестве допущения для железобетонных элементов, имеющих трещины в растянутой зоне, не для конкретного сечения элемента, а для средних продольных деформаций растянутой и сжатой зоны (рисунок 2, б). Гипотеза плоских сечений для распределения относительных деформаций широко используется в нормативных документах всех зарубежных стран.

Важным моментом в расчетной модели нормального сечения для оценки напряженно-деформированного состояния эксплуатируемых железобетонных конструкций является учет работы бетона растянутой зоны между трещинами. В стадии нагружения изгибаемого элемента до появления трещин в бетоне сопротивление растяжению оказывает бетон и продольная арматура. Деформации бетона и арматуры благодаря сцеплению между ними равны

между собой. С увеличением нагрузки на наиболее ослабленных участках (вследствие неоднородности структуры бетона и частично арматуры) растягивающие напряжения в бетоне приближаются к предельным и появляются трещины. В сечении с трещиной и вблизи него сцепление нарушается, растягивающие усилия воспринимаются арматурой. В сечении между трещинами растягивающие усилия воспринимаются бетоном и арматурой, уменьшая деформативность изгибаемого элемента.



а) – распределение деформаций в сечениях; б) – распределение средних деформаций

Рисунок 2. – Напряженно-деформированное состояние железобетонного элемента с трещинами

Работа растянутого бетона после образования трещины нормального отрыва учитывается путем использования трансформированной диаграммы деформирования арматуры при растяжении, в которой напряжения σ_s приняты как для свободно растянутой арматуры, а относительные деформации ε_s уменьшенные – как для осредненного (виртуального) поперечного сечения в соответствии с гипотезой плоских сечений в постановке В.И. Мурсаева – Я.М. Немировского с учетом коэффициента ψ_s неравномерности деформаций арматуры на участке растянутого бетона с трещинами⁸.

$$\psi_s = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2; \quad \psi_s = 1 - 0,8 \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}, \quad (5)$$

где σ_{sr} – напряжения в продольной растянутой арматуре в сечении с трещиной сразу после образования нормальных трещин;

σ_s – то же, при рассматриваемом воздействии;

$\beta=1$ – при кратковременных воздействиях;

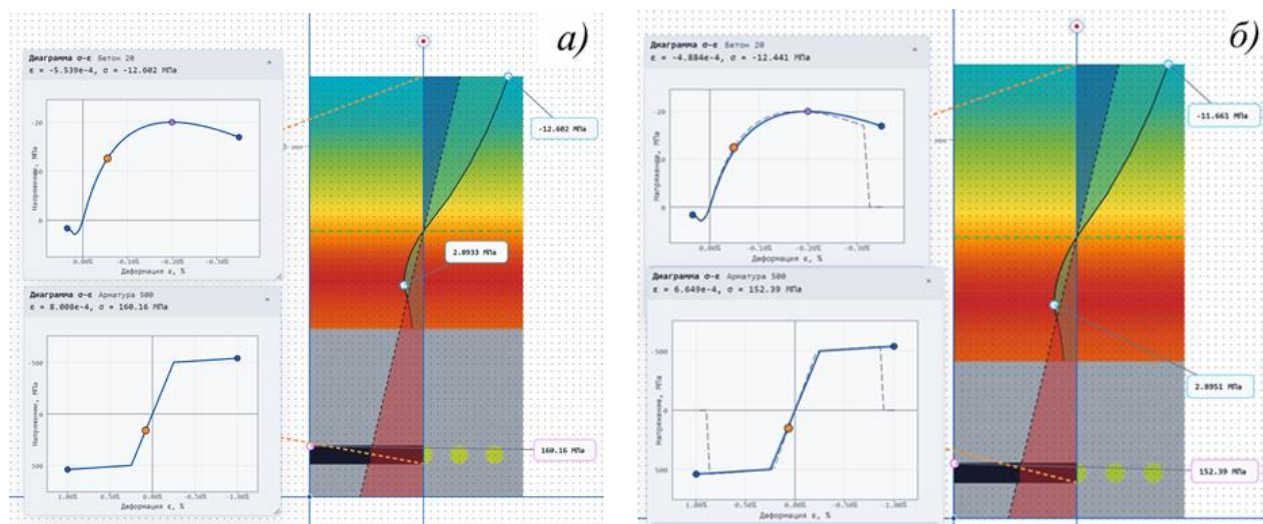
$\beta=0,5$ – при длительных и многократно повторяющихся воздействиях.

После образования трещин и выключения из работы растянутого бетона деформации бетона сжатой зоны по длине железобетонного элемента аналогично деформациям арматуры неравномерны: максимальное значение в сечении с трещиной, уменьшающееся по мере удаления от краев трещины. Неравномерность деформаций бетона сжатой зоны по ее длине характеризуется коэффициентом $\psi_c=0,75...1$, выражающим отношение средних краевых деформаций бетона сжатой зоны к деформациям в сечении с трещиной. Неравномерность деформаций бетона сжатой зоны возрастает при увеличении глубины трещин. Действующие нормативные документы рекомендуют для всех случаев приближенно принимать $\psi_c=0,9$. Таким образом, если относительная деформация бетона на уровне центра тяжести арматуры не превышает предельного значения относительных деформаций при растяжении, то в расчет вводится диаграмма деформирования бетона с учетом неравномерности деформирования по длине элемента (трансформированная).

Применение трансформированных диаграмм деформирования арматуры (коэффициент ψ_s) и бетона (коэффициент ψ_c) для железобетонного элемента с трещинами нормального отрыва позволяет получить картину его деформирования для осредненного поперечного сечения, для которого действительна принятая гипотеза плоских сечений.

Для сопоставления на рисунке 3 приведены данные расчета в соответствии с НДМ поперечного сечения с трещиной ($M_{cr}=132,1$ МПа) железобетонного элемента (300×600 мм ($d=540$ мм)) из бетона ($f_{cm}=20$ МПа; $f_{ctm}=2,9$ МПа; $E_c=32 \cdot 10^3$ МПа), армирование $5\phi 25$ ($f_{ym}=500$ МПа; $E_s=2 \cdot 10^5$ МПа) при одном и том же изгибающем моменте $M=200$ кНм от кратковременного воздействия с исходными и трансформированными диаграммами деформирования материалов.

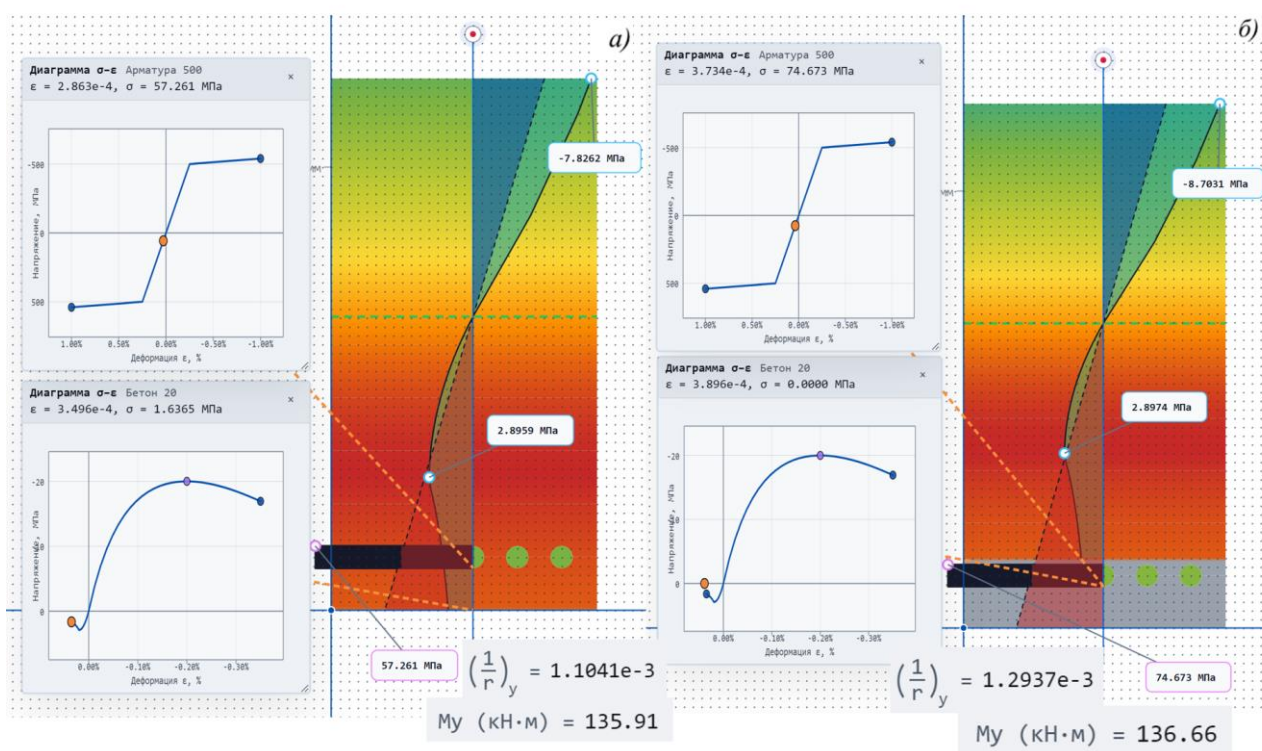
⁸ См. сноски 2–4.



а) – при исходных диаграммах деформирования бетона и арматуры;
 б) – то же, при трансформированных

Рисунок 3. – Результаты расчета изгибаемого железобетонного элемента при $M=200 \text{ кНм}$ в соответствии с НДМ

Результаты вычислений свидетельствуют об увеличении расчетной жесткости элемента на 17,5% (кривизна в варианте а) $1/r=2,509 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$; в варианте б) $1/r=2,136 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$) за счет учета работы растянутого бетона между трещинами (а) – $\varepsilon_s=8,008 \cdot 10^{-4}$; $\sigma_s=160,16 \text{ МПа}$ и б) – $\varepsilon_{sm}=6,649 \cdot 10^{-4}$; $\sigma_s=152,39 \text{ МПа}$) и неравномерности распределения деформаций в бетоне сжатой зоны (а) – $\varepsilon_{cc}=5,539 \cdot 10^{-4}$; $\sigma_c=12,602 \text{ МПа}$; б) – $\varepsilon_{cm}=4,884 \cdot 10^{-4}$; $\sigma_c=11,661 \text{ МПа}$) при высоте сжатой зоны бетона (а) – $x=220 \text{ мм}$; б) – $x=230 \text{ мм}$). Напряжения в арматуре составляют: перед образованием трещины $\sigma_s=57,261 \text{ МПа}$; сразу после образования трещины $\sigma_{sr}=74,673 \text{ МПа}$.



а) – перед образованием трещины;
 б) – то же, сразу после образования

Рисунок 4. – Результаты расчета изгибаемого железобетонного элемента при образовании трещин в соответствии с НДМ

В действующих нормативных документах⁹ распределение относительных деформаций по высоте поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента после образования трещин нормального отрыва при использовании НДМ принимается в соответствии с гипотезой плоских сечений при исходных диаграммах деформирования (т.е. как для сечения с трещиной). При определении кривизны железобетонного элемента выполняют переход с применением коэффициентов $\psi_c=0,9$ и ψ_s (формулы (5)) к средним деформациям:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{cr} = \frac{\varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sm}}{d}, \quad (6)$$

где d – расстояние между сжатой гранью сечения и центром тяжести арматуры.

Тогда для принятого примера поперечного сечения изгибаемого железобетонного элемента ($M=200$ кНм):

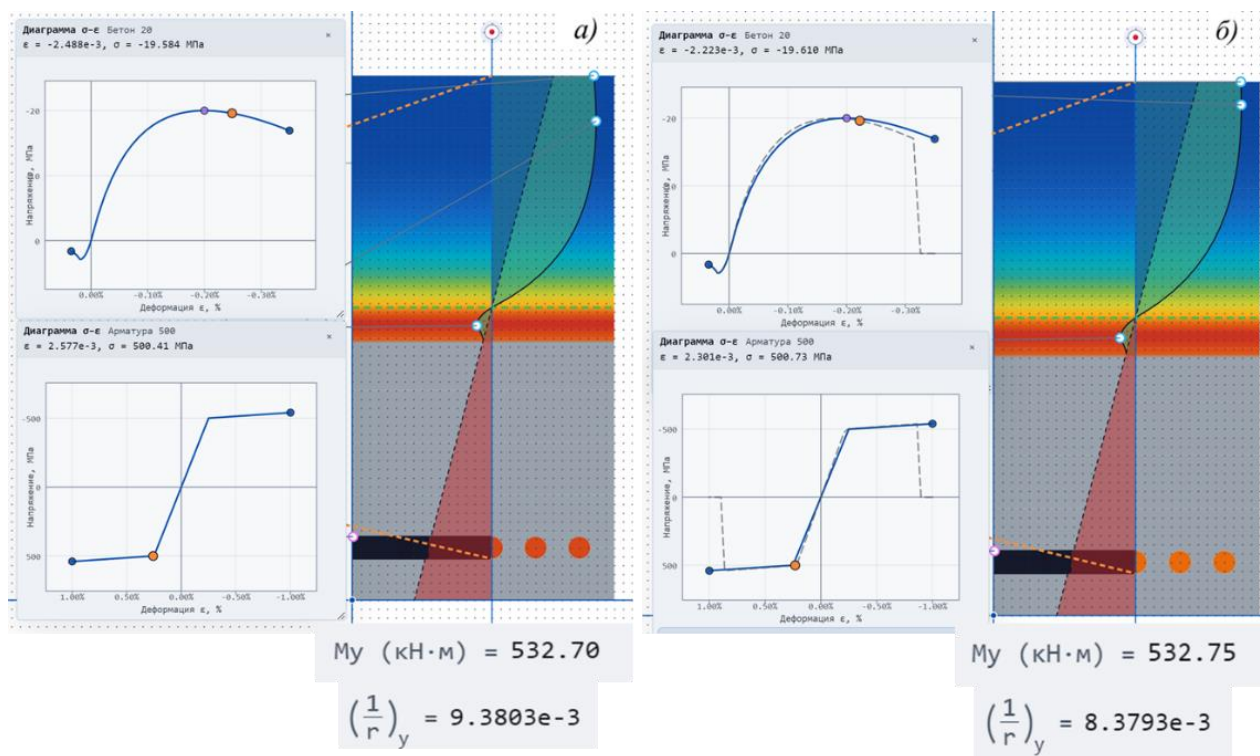
$$\psi_s = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 = 1 - 1 \cdot \left(\frac{74,673}{160,16}\right)^2 = 0,783,$$

$$\varepsilon_{cm} = \psi_c \cdot \varepsilon_{cc} = 0,9 \cdot 5,539 \cdot 10^{-4} = 4,985 \cdot 10^{-4},$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{cr} = \frac{\varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sm}}{d} = \frac{4,985 \cdot 10^{-4} + 6,27 \cdot 10^{-4}}{0,54} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Расхождение кривизны железобетонного элемента с учетом неравномерности деформаций бетона сжатой зоны и растянутого бетона между трещинами, вычисленных разными методами, составляет: $100\% \cdot (2,136 \cdot 10^{-3} - -2,08 \cdot 10^{-3}) / 2,136 \cdot 10^{-3} = 2,6\%$.

В предельной стадии оба варианта расчета показывают одинаковые результаты по прочности $M_{u1}=532,7$ кНм; $M_{u2}=532,75$ кНм (высота сжатой зоны бетона в обоих вариантах $x=260$ мм) (рисунок 5).



а) – при исходных диаграммах деформирования бетона и арматуры; б) – то же, при трансформированных

Рисунок 5. – Результаты расчета изгибаемого железобетонного элемента в предельной стадии в соответствии с НДМ

Заключение. Применение нелинейной деформационной расчетной модели для железобетонных элементов требует учета особенностей применения гипотезы плоских сечений после образования трещин нормального отрыва в поперечном сечении.

⁹ См. сноски 2–4.

Положительным качеством методики является единство подхода к моделированию с позиций деформирования железобетона под нагрузкой, включая стадию работы с трещинами (учет неравномерности деформирования бетона сжатой зоны по длине элемента и работы растянутого бетона между трещинами). Имеются два варианта учета особенностей деформирования железобетона с трещинами: применение трансформированных диаграмм деформирования бетона и арматуры для осредненного сечения, что соответствует гипотезе плоских сечений для процесса деформирования; применение исходных диаграмм деформирования для сечения с трещиной с последующим переходом к средним деформациям. Оба варианта дают близкие результаты.

Целесообразно в действующих нормативных документах¹⁰ учитывать работу растянутого бетона над трещиной, для чего нормировать диаграмму деформирования бетона при растяжении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. Лазовский Д.Н. Усиление железобетонных конструкций эксплуатируемых строительных сооружений. – Новополоцк: Полот. гос. ун-т, 1998. – 240 с.
3. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. – М.: АСВ, 2004. – 471 с.
4. Колчунов В.И., Пимочкин В.Н. Деформационный эффект при сопротивлении растянутого бетона между трещинами в железобетонном элементе (или вскрытие истинных причин расхождения внешних и внутренних усилий в поперечном сечении железобетонного элемента, рассчитываемого по теории В.И. Мурашева) // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Строительство и транспорт. – 2005. – № 3-4. – С. 49–55.
5. Федоров В.С., Левитский В.Е. Расчетные модели в теории железобетона // Перспективы развития строительного комплекса. – 2014. – Т. 1. – С. 268–279.
6. Развитие метода расчета железобетонных конструкций по образованию и раскрытию нормальных трещин / Н.Н. Трекин, Э.Н. Кодыш, С.Г. Парфенов и др. // Железобетонные конструкции. – 2023. – Т. 4, № 4. – С. 20–31. DOI: 10.22227/2949-1622.2023.4.20-31.
7. Мирсаяпов И.Т., Антаков И.А., Антаков А.Б. К расчету прогибов изгибаемых бетонных элементов, армированных композитной полимерной арматурой // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 4. – С. 413–428. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.4.413-428.
8. Мурашев В.Н., Сигалов Э.Е., Байков В.Н. Железобетонные конструкции. – М., 1962. – 662 с.
9. Немировский Я.М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов при кратковременном и длительном нагружении // Бетон и железобетон. – 1955. – № 5. – С. 172–176.
10. Немировский Я.М. Исследование напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов с учетом работы растянутого бетона над трещиной и пересмотр на этой основе теории расчета деформаций и раскрытия трещин // Прочность и жесткость железобетонных конструкций: сб. науч. ст. / НИИЖБ; под ред. А.А. Гвоздева. – М., 1968. – С. 47–54.
11. Bortolotti L. First Cracking Load of Concrete Subjected to Direct Tension // ACI Materials Journal. – 1991. – Vol. 88, № 1. – P. 70–73.
12. Kolleger J. Comparison of Fixed and Rotating Crack Models in the Analysis of Panels, Plates and Shells Subjected to Shear // Concrete Shear in Earthquake: Houston International Workshop, Texas, USA, 13–16 January 1991. – P. 216–225.
13. Тур В.В., Рак Н.А. Прочность и деформации бетона в расчетах конструкций: монография. – Брест: БГТУ, 2003. – 252 с.

REFERENCES

1. Karpenko, N.I. (1996). *Obshchiye modeli mekhaniki zhelezobetona*. Moscow: Stroyizdat. (In Russ.).
2. Lazovskiy, D.N. (1998). *Usileniye zhelezobetonnykh konstruksiy ekspluatiruyemykh stroitel'nykh sooruzheniy*. Novopolotsk: Polots. gos. un-t. (In Russ.).
3. Bondarenko, V.M. & Kolchunov, V.I. (2004). *Raschetnyye modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona*. Moscow: ASV. (In Russ.).
4. Kolchunov, V.I., & Pimochkin, V.N. (2005). Deformatsionnyy effekt pri soprotivlenii rastyanutogo betona mezhdru treshchinami v zhelezobetonnom elemente (ili vskrytiye istinnykh prichin raskhozheniya vnesnykh i vnutrennykh usiliy v poperechnom sechenii zhelezobetonnoy elementa, rasschityvayemogo po teorii V.I. Murasheva). *Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i transport*, 3-4, 49–55. (In Russ.).
5. Fedorov, V.S., & Levitskiy, V.Ye. (2014). *Raschetnyye modeli v teorii zhelezobetona. Perspektivy razvitiya stroitel'nogo kompleksa*, 1, 268–279. (In Russ.).
6. Trekin, N.N., Kodysh, E.N., Parfenov, S.G., & Andryan K.R. (2023). *Razvitiye metoda rascheta zhelezobetonnykh konstruksiy po obrazovaniyu i raskrytiyu normal'nykh treshchin. Zhelezobetonnyye konstruksii*, 4(4), 20–31. DOI: 10.22227/2949-1622.2023.4.20-31. (In Russ.).
7. Mirsayapov, I.T., Antakov, I.A., & Antakov, A.B. (2021). K raschetu progibov izgibayemykh betonnykh elementov, armirovannykh kompozitnoy polimernoy armaturoy. *Vestnik MGSU*, 16(4), 413–428. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.4.413-428. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Murashev, V.N., Sigalov, E.Ye., & Baykov, V.N. (1962). *Zhelezobetonnyye konstruksii*. Moscow. (In Russ.).
9. Nemirovskiy, Ya.M. (1955). Zhestkost' izgibayemykh zhelezobetonnykh elementov pri kratkovremennom i dlitel'nom zagruzheniyakh. *Beton i zhelezobeton*, 5, 172–176. (In Russ.).
10. Nemirovskiy, Ya.M. (1968). Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zhelezobetonnykh elementov s uchedom raboty rastyanutogo betona nad treshchinoy i peresmotr na etoy osnove teorii rascheta deformatsiy i raskrytiya treshchin. In A. Gvozdev (Eds.) *Prochnost' i zhestkost' zhelezobetonnykh konstruksiy: sb. nauch. st.* (47–54). Moscow. (In Russ.).
11. Bortolotti, L. (1991). First Cracking Load of Concrete Subjected to Direct Tension. *ACI Materials Journal*, 88(1), 70–73.

¹⁰ См. сноски 2–4.

12. Kolleger, J. (1991). Comparison of Fixed and Rotating Crack Models in the Analysis of Panels, Plates and Shells Subjected to Shear. In *Concrete Shear in Earthquake*: Houston International Workshop, Texas, USA, 13–16 January 1991 (216–225).
13. Tur, V.V., & Rak, N.A. (2003). *Prochnost' i deformatsii betona v raschetakh konstruksii: monografiya*. Brest: BG TU. (In Russ.).

Поступила 29.06.2026

PLANE SECTION HYPOTHESIS IN MODELING REINFORCED CONCRETE ELEMENTS BASED ON A NONLINEAR DEFORMATION COMPUTATION MODEL

D. LAZOVSKY¹⁾, V. TUR²⁾, D. GLUKHOV³⁾

⁽¹⁾ *Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk,*

²⁾ *Brest State Technical University,* ³⁾ *Softclub LLC, Minsk)*

The use of a nonlinear deformation calculation model for reinforced concrete elements requires consideration of the specifics of applying the flat-section hypothesis after the formation of normal tensile cracks in the cross-section (uneven deformation of concrete in the compressed zone along the element's length and the work of tensile concrete between and above the cracks). Two options for accounting for the deformation characteristics of cracked reinforced concrete are considered: the use of transformed concrete and reinforcement deformation diagrams for an averaged section, which corresponds to the flat-section hypothesis for the deformation process; and the use of the original deformation diagrams for a section with a crack, followed by a transition to mean deformations.

Keywords: *flexible reinforced concrete elements, nonlinear deformation calculation model, flat-section hypothesis, curvature, mean deformations.*