ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (МАТЕМАТИКА)

УДК 517.44

ОДНО ОБОБЩЕННОЕ H-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, Е. Н. АРХИПОВЕЦ
(Полоцкий государственный университет)

Изучены свойства одного класса обобщенных H-*преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций на полуоси. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов таких преобразования из одних пространств* $L_{\nu,r}$ *в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям, получены различные интегральные представления для изучаемых преобразований, даны описания образов и выведены формулы их обращения.*

Ключевые слова: H-*преобразование, H-функция, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Изучается интегральное преобразование

$$(\mathrm{H}^{1}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f)(x) = x^{\eta}\int_0^{\infty} H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{\lambda x^{\gamma}}{t^{\delta}}\right] t^{\mu} f(t)dt \quad (x>0)\,, \tag{1.1}$$

где η, μ – комплексные, а $\gamma>0,\ \delta>\lambda>0$ – действительные постоянные.

H-функция $H^{m,n}_{p,q}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса при целых неотрицательных *m, n, p, q* $(0\le m\le q,\ 0\le n\le p)$, комплексных $a_i,\ b_j\in C$ и положительных $\alpha_i,\ \beta_j$ $(1\le i\le p,\ 1\le n\le p)$:

$$H^{m,n}_{p,q}[z] \equiv H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s) z^{-s}ds,\ z\ne 0\,, \tag{1.2}$$

где

$$\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s) \equiv \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left[\left.\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right| s\right] = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}, \tag{1.3}$$

здесь L – бесконечный контур, выбранный специально, пустые произведения считаются равными единице. Теория *H*-функции подробно изложена в [1, гл. 1–2].

В работе преобразование (1.1) изучается в пространствах $L_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу комплекснозначных функций f на действительной полуоси $R_+=(0,\infty)$, для которых

$$\|f\|_{\nu,r}<\infty\,, \text{ где } \|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^{\infty}\left|t^{\nu} f(t)\right|^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (1\le r<\infty,\nu\in R)\,. \tag{1.4}$$

$$\|f\|_{\nu,\infty} = \underset{t>0}{ess\sup}\left[t^{\nu}\,|f(t)|\right] \quad (r=\infty).$$

В частности, все полученные результаты верны для пространств *r*-суммируемых функций $L_r(R_+) = \mathcal{L}_{1/r,r}$ $(1\le r<\infty)$.

В работе [2] было изучено в пространствах $L_{\nu,r}$ интегральное преобразование вида

$$(\mathrm{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f)(x) = x^{\eta}\int_0^{\infty} H_{p,q}^{m,n}\left[\lambda x^{\gamma} t^{\delta}\right] t^{\mu} f(t)dt \qquad (x>0)\,, \tag{1.5}$$

где $\eta,\ \mu \in C,\ \ \gamma > 0,\ \delta > \lambda > 0$.

При $\gamma = \delta = \lambda = 1$ функциональные свойства конструкций вида (1.1) и (1.5) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu,r}$ хорошо изученны [1, гл. 5]. Настоящая работа продолжает эти исследования. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования вида (1.1), выведены различные интегральные представления для него и даны описания образов этих операторов, а также установлены формулы обращения.

Отметим, что конструкции вида (1.1) и (1.5) обобщают многие интегральные преобразования: G- и H-преобразования, преобразование Ханкеля, преобразование Лапласа, дробные интегралы Римана – Лиувилля, дробные интегралы Бушмана – Эрдейи, дробные интегралы с гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра и др. [1; 3].

2. Предварительные сведения. Для функции $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ $(1 \le r \le 2)$ преобразование Меллина $\mathcal{M}f$ определяется равенством (см., например, [1; 2])

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{\tau})e^{s\tau}d\tau \ \ (s = \nu + it;\ \nu, t \in \mathrm{R})\,. \tag{2.1}$$

Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r} \bigcap \mathcal{L}_{\nu,1}$ и $\mathrm{Re}(s) = \nu$, то (2.1) совпадает с обычным преобразованием Меллина

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt\,. \tag{2.2}$$

Для функции f определим почти всюду R_+ элементарные операторы M_{ξ}, W_{σ}, N_a [1; 2]:

$$(M_{\xi} f)(x) = x^{\xi} f(x) \ \ (\xi \in \mathrm{C}), \tag{2.3}$$

$$(W_{\omega} f)(x) = f(x/\omega) \ \ (\omega \in \mathrm{R}_+), \tag{2.4}$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \ \ (a \in \mathrm{R},\ a \ne 0). \tag{2.5}$$

Эти операторы обладают следующими свойствами [1; 2, лемма 1].

Лемма 1. *Для* $\nu \in \mathrm{R}$ *и* $1 \le r < \infty$ *верны следующие утверждения:*

A. M_{ξ} *является изометрическим изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на* $\mathcal{L}_{\nu-\mathrm{Re}(\xi),r}$, *и если* $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ $(1 \le r \le 2)$, *то*

$$(\mathcal{M}M_{\xi} f)(s) = (\mathcal{M}f)(s+\xi) \ \ (\mathrm{Re}(s) = \nu - \mathrm{Re}(\xi)). \tag{2.6}$$

M_{ξ}^{-1} *является изометрическим изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на* $\mathcal{L}_{\nu-\mathrm{Re}(\xi),r}$, *и*

$$M_{\xi}^{-1} = M_{-\xi}\,. \tag{2.7}$$

B. W_{ω} *является ограниченным изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на себя, и если* $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ $(1 \le r \le 2)$, *то*

$$(\mathcal{M}W_{\omega} f)(s) = \omega^{s}(\mathcal{M}f)(s) \ \ (\mathrm{Re}(s) = \nu). \tag{2.8}$$

W_{ω}^{-1} *является ограниченным изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на себя, и*

$$W_{\omega}^{-1} = W_{1/\omega}\,. \tag{2.9}$$

C. N_a *является ограниченным изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на* $\mathcal{L}_{a\,\nu,r}$, *и если* $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ $(1 \le r \le 2)$, *то*

$$(\mathcal{M}N_a f)(s) = |a|^{-1}(\mathcal{M}f)(s/a) \ \ (\mathrm{Re}(s) = a\,\nu). \tag{2.10}$$

N_a^{-1} *является ограниченным изоморфизмом* $\mathcal{L}_{\nu,r}$ *на* $\mathcal{L}_{\nu/a,r}$, *и*

$$N_a^{-1} = N_{1/a}\,. \tag{2.11}$$

Нам понадобятся также некоторые вспомогательные сведения.

Н-преобразованием называют интегральное преобразование [1]

$$\left(\mathrm{H}\, f\right)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[xt \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t)dt\,, \tag{2.12}$$

содержащее *H*-функцию (1.2) в ядре.

Для описания образа изучаемого преобразования (1.1) необходимы дробные интегралы типа Эрдейи – Кобера $I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}$ и $I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}$, определяемые при $x \in \mathrm{R}_+$ следующими формулами [2; 3, 18.1]:

$$(I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t)dt\,, \tag{2.13}$$

$$(I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} f)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)dt\,, \tag{2.14}$$

где $\mathrm{Re}(\alpha) > 0;\ \sigma > 0,\ \eta \in \mathrm{C},$ а также модифицированное преобразование Ханкеля

$$(\mathbf{H}_{k,\eta} f)(x) = \int_x^\infty (xt)^{1/k-1/2} J_\eta(|k|(xt)^{1/k}) f(t)dt \quad (k \in \mathrm{R}\setminus\{0\}, \mathrm{Re}(\eta) > -3/2). \tag{2.15}$$

Приведем некоторые определения и обозначения, необходимые для исследования свойств преобразования (1.1) [1; 2].

Для двух банаховых пространств X и Y будем обозначать через $[X,Y]$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Для *H*-функции $H_{p,q}^{m,n}[z]$ в равенстве (1.2) определим следующие числа:

$$\alpha = \begin{cases} -\min\limits_{1\le i\le m}\left[\beta_i^{-1}\,\mathrm{Re}(b_i)\right], & m>0, \\ -\infty, & m=0; \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} \min\limits_{1\le j\le n}\left[\alpha_j^{-1}(1-\mathrm{Re}(a_j))\right], & n>0, \\ \infty & n=0; \end{cases} \tag{2.16}$$

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j\,; \tag{2.17}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i\,; \tag{2.18}$$

$$\vartheta = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}. \tag{2.19}$$

Пустые суммы в (2.17)–(2.19) считаются равными нулю.

Кроме этого, для $1 \le r \le \infty$ обозначим через

$$\psi(r) = \max\left[r^{-1}, r'^{-1}\right] \quad (r^{-1} + r'^{-1} = 1)\,. \tag{2.20}$$

Исключительным множеством $\varepsilon_{\mathcal{H}}$ для функции $\mathcal{H}(s)$, определенной в (1.3), называют множество вещественных чисел ν таких, что $\alpha < 1-\nu < \beta$ и $\mathcal{H}(s)$ имеет нули на прямой $\mathrm{Re}(s) = 1-\nu$ [1; 2].

3. $\mathcal{L}_{\nu,r}$-теория преобразования $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f$. Обобщенное $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}$-преобразование (1.1) может быть представлено как композиция Н-преобразования (2.12) и элементарных операторов M_ξ, W_ω, N_a (2.3)–(2.5). Заменяя в (1.1) x на $x^{1/\gamma}$ и осуществляя замену переменных $\tau = \dfrac{\lambda}{t^\delta}$, имеем

$$(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f)(x^{1/\gamma}) = x^{\eta/\gamma} \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[\frac{\lambda x}{t^\delta}\right] t^\mu f(t)dt = \frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta} x^{\eta/\gamma} \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}[x\tau]\, \tau^{-(\mu+1)/\delta-1} f\left((\lambda/\tau)^{1/\delta}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta} (M_{\eta/\gamma}\, \mathrm{H}\, M_{-(\mu+1)/\delta-1} W_{1/\lambda} N_{-1/\delta} f)(x^{1/\gamma}).$$

Применяем к последнему равенству оператор N_γ, получаем следующее представление для обобщенного $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}$-преобразования (1.1):

$$(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(x) == \frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta}(\mathrm{N}_\gamma M_{\eta/\gamma}\,\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f)(x)\,. \tag{3.1}$$

Учитывая операторное соотношение [2, формула (28)] $N_a M_\xi = M_{a\xi}N_a$, получаем

$$(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(x) = \frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta}(M_\eta \mathrm{N}_\gamma\,\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f)(x)\,. \tag{3.2}$$

Применим преобразование Меллина (2.2) к (1.1). Учитывая равенство (3.2), лемму 1, получаем

$$(\mathcal{M}\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(\mathrm{s}) = \left(\mathcal{M}\left(\frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta}M_\eta \mathrm{N}_\gamma\,\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f\right)\right)(\mathrm{s}) =$$

$$= \frac{1}{\delta}\lambda^{(\mu+1)/\delta}\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{N}_\gamma\,\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f\right)\right)(\mathrm{s}+\eta) =$$

$$= \frac{1}{\delta\gamma}\lambda^{(\mu+1)/\delta}\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f\right)\right)\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta\gamma}\lambda^{(\mu+1)/\delta}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right)\left(\mathcal{M}\left(M_{-(\mu+1)/\delta-1}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f\right)\right)\left(1-\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta\gamma}\lambda^{(\mu+1)/\delta}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right)\left(\mathcal{M}\left(W_{1/\lambda}N_{-1/\delta}f\right)\right)\left(1-\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}-\frac{(\mu+1)}{\delta}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta\gamma}\lambda^{2(\mu+1)/\delta+(\mathrm{s}+\eta)/\gamma}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right)\left(\mathcal{M}\left(N_{-1/\delta}f\right)\right)\left(-\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}-\frac{(\mu+1)}{\delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\lambda^{2(\mu+1)/\delta+(\mathrm{s}+\eta)/\gamma}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right)\left(\mathcal{M}f\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}(\mathrm{s}+\eta)+\mu+1\right).$$

Таким образом, получили, что преобразование Меллина от конструкции (1.1) имеет вид

$$(\mathcal{M}\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(\mathrm{s}) = \frac{1}{\gamma}\lambda^{2(\mu+1)/\delta+(\mathrm{s}+\eta)/\gamma}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{\mathrm{s}+\eta}{\gamma}\right)\left(\mathcal{M}f\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}(\mathrm{s}+\eta)+\mu+1\right). \tag{3.3}$$

$\mathcal{L}_{\nu,r}$-теория преобразования (1.1) будет следовать из соответствующих утверждений для H-преобразования (2.12) [1, гл. 3], формул (3.1)–(3.3), леммы 1.

Для удобства изложения введем обозначения:

$$\theta = \delta^{-1}\left[-\nu+\mathrm{Re}(\mu)+1\right]+1\,; \qquad \kappa = \gamma\delta^{-1}\left[\nu-\mathrm{Re}(\mu)-1\right]-\mathrm{Re}(\eta).$$

Следующая теорема дает $\mathcal{L}_{\nu,2}$-теорию $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}$-преобразования (1.1).

Теорема 1. Пусть а) $\alpha < 1-\theta < \beta$ и выполнено одно из условий:

б) $a^* > 0$ или в) $a^* = 0,\ \Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta) \le 0$.

Верны следующие утверждения.

А. Преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ является инъективным элементом $\left[\mathcal{L}_{\nu,2},\mathcal{L}_{\kappa,2}\right]$, и при $\mathrm{Re}(s)=\kappa$ его преобразование Меллина имеет вид (3.3). Если $a^* = 0,\ \Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta) = 0$ и $\theta \notin \varepsilon_{\mathcal{H}}$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{\nu,2}$ на $\mathcal{L}_{\kappa,2}$.

B. Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{\kappa^*,2}$, где $\kappa^* = \delta\gamma^{-1}\left[1-\nu+\mathrm{Re}(\eta)\right]+\mathrm{Re}(\mu)+1,$ верно равенство

$$\int_0^\infty f(x)(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, g)(x)dx = \int_0^\infty (\mathrm{H}^2_{\mu,\eta;\delta,\gamma,\lambda}\, f)(x)g(x)dx\,, \tag{3.4}$$

где $\quad (\mathrm{H}^2_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, g)(x) = x^\mu \int_0^\infty H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{\lambda t^\gamma}{x^\delta}\right] t^\eta f(t)dt\,.$

C. Пусть $\varsigma \in \mathrm{C},\ h>0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$. Если $\mathrm{Re}(\varsigma) > (1-\theta)h-1,$ то почти для всех $x>0$ справедливо представление

$$(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f)(x) = \frac{1}{\gamma} h x^{\eta+1-\gamma(\varsigma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\gamma(\varsigma+1)/h} \int_0^\infty H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[\frac{\lambda x^\gamma}{t^\delta}\left|\begin{matrix}(-\varsigma,h),(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q},(-\varsigma-1,h)\end{matrix}\right.\right] t^\mu f(t)dt\,. \tag{3.5}$$

Если $\mathrm{Re}(\varsigma) < (1-\theta)h-1,$ то

$$(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f)(x) = -\frac{1}{\gamma} h x^{\eta+1-\gamma(\varsigma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\gamma(\varsigma+1)/h} \int_0^\infty H^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[\frac{\lambda x^\gamma}{t^\delta}\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p},(-\varsigma,h)\\ (-\varsigma-1,h),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right] t^\mu f(t)dt\,. \tag{3.6}$$

D. Преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ не зависит от ν в том смысле, что если ν и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют условию а) и одному из условий б) или в) и если преобразования $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ и $\tilde{\mathrm{H}}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ определены в $\mathcal{L}_{\nu,2}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{\nu},2}$ соответственно равенством (3.3), то $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f = \tilde{\mathrm{H}}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ для $f \in \mathcal{L}_{\nu,2} \bigcap \mathcal{L}_{\tilde{\nu},2}$.

E. Если $a^*>0$ или $a^*=0,\ \Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)<-1,$ то для $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$ преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ задается равенством (1.1).

Теоремы 2–4 содержат $\mathcal{L}_{\nu,r}$-теорию преобразования $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ в случае $a^*=0$.

Теорема 2. Пусть $a^*=\Delta=0,\ \mathrm{Re}(\vartheta)=0,\ \alpha<1-\theta<\beta$ и $1<r<\infty$.

A. Преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$, определенное в пространстве $\mathcal{L}_{\nu,2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элемент $\left[\mathcal{L}_{\nu,r},\mathcal{L}_{\kappa,r}\right]$.

B. Если $1<r\le 2$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ является биективным на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (3.3) для $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $\mathrm{Re}(s)=\kappa$.

C. Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{\kappa^*,r'}$, где $\kappa^* = \delta\gamma^{-1}\left[1-\nu+\mathrm{Re}(\eta)\right]+\mathrm{Re}(\mu)+1$ и $r'=r/(r-1)$, верно равенство (3.4).

D. Если $\theta \notin \varepsilon_{\mathcal{H}}$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{\nu,r}$ на $\mathcal{L}_{\kappa,r}$, т.е. $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r}) = \mathcal{L}_{\kappa,r}$.

E. Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $\varsigma \in \mathrm{C}$ и $h>0$, то при $\mathrm{Re}(\varsigma) > (1-\theta)h-1$ представление $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ дается в равенстве (3.5), а также в (3.6) при $\mathrm{Re}(\varsigma) < (1-\theta)h-1$.

Теорема 3. Пусть $a^*=\Delta=0,\ \mathrm{Re}(\vartheta)<0,\ \alpha<1-\theta<\beta$ и $m>0$ или $n>0$. Пусть также $1<r<\infty$.

A. Преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$, определенное в $\mathcal{L}_{\nu,2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элемент $\left[\mathcal{L}_{\nu,r},\mathcal{L}_{\kappa,s}\right]$ для всех $s \ge r$ таких, что $1/s > 1/r + \mathrm{Re}(\vartheta)$.

B. Если $1<r\le 2$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ является бинективным на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (3.3) для $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $\mathrm{Re}(s)=\kappa$.

C. Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{\kappa^*,s}$, где $\kappa^* = \delta\gamma^{-1}\left[1-\nu+\mathrm{Re}(\eta)\right]+\mathrm{Re}(\mu)+1,\quad 1<s<\infty$ и $1 \le 1/r+1/s < 1-\mathrm{Re}(\vartheta),$ верно равенство (3.4).

D. Если $\theta \notin \varepsilon_{\mathcal{H}}$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f$ взаимно однозначно на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и

$$\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r}) = I^{-\vartheta}_{-;\gamma k,(\eta/\gamma-\alpha)/k}(\mathcal{L}_{\kappa,r}) \tag{3.7}$$

для $k \ge 1$ и $m>0$, и

$$\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r}) = I^{-\vartheta}_{0+;\gamma k,(\beta-\eta/\gamma)/k-1}(\mathcal{L}_{\kappa,r}) \tag{3.8}$$

для $0<k\le 1$ и $n>0$. Если $\theta\in\varepsilon_{\mathcal{H}}$, то $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r})$ является подмножеством правых частей (3.7) и (3.8) в соответствующих случаях.

E. Если $f\in\mathcal{L}_{\nu,r}$, $\varsigma\in\mathrm{C}$ и $h>0$, то при $\mathrm{Re}(\vartheta)>(1-\theta)h-1$ преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ дается формулой (3.5) и формулой (3.6) при $\mathrm{Re}(\varsigma)<(1-\theta)h-1$. Если $\mathrm{Re}(\vartheta)<-1$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ дается равенством (1.1).

Теорема 4. Пусть $a^*=0,\ \Delta\ne 0,\ \alpha<1-\theta<\beta,\ 1<r<\infty$ и $\Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)\le 1/2-\gamma(r)$, где $\psi(r)$ задается равенством (2.20). Предположим также, что $m>0$, если $\Delta>0$, и $n>0$, если $\Delta<0$.

A. Преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$, определенное в $\mathcal{L}_{\nu,2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элемент $\left[\mathcal{L}_{\nu,r},\mathcal{L}_{\kappa,s}\right]$ для всех $s\ge r$ таких, что $s'\ge\left[1/2-\Delta(1-\theta)-\mathrm{Re}(\vartheta)\right]^{-1}$ и $1/s+1/s'=1$.

B. Если $1<r\le 2$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ является биективным на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (3.3) для $f\in\mathcal{L}_{\nu,r}$ и $\mathrm{Re}(s)=\kappa$.

C. Для двух функций $f\in\mathcal{L}_{\nu,r}$ и $g\in\mathcal{L}_{\kappa^*,s}$, где $\kappa^*=\delta\gamma^{-1}\left[1-\nu+\mathrm{Re}(\eta)\right]+\mathrm{Re}(\mu)+1$, $1<s<\infty$, $1/r+1/s\ge 1$ и $\Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)\le 1/2-\max\left[\psi(r),\ \psi(s)\right]$, верно равенство (3.4).

D. Если $\theta\notin\varepsilon_{\mathcal{H}}$, то преобразование $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ биективно на $\mathcal{L}_{\nu,r}$. Если положить $\omega=-\Delta\alpha-\vartheta-1$ для $\Delta>0$ и $\omega=-\Delta\beta-\vartheta-1$ для $\Delta<0$, то $\mathrm{Re}(\omega)>-1$ и

$$\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r}) = (N_\gamma M_{\eta/\gamma+\vartheta/\Delta+1/2}\mathbf{H}_{\Delta,\omega})(\mathcal{L}_{\theta-\mathrm{Re}(\vartheta)/\Delta-1/2,r}). \tag{3.9}$$

Если $\theta\in\varepsilon_{\mathcal{H}}$, то $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r})$ является подмножеством правой части (3.9).

E. Если $f\in\mathcal{L}_{\nu,r}$, $\varsigma\in\mathrm{C}$, $h>0$, то при $\Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)\le 1/2-\psi(r)$ интегральное представление $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ дается в равенстве (3.5) при $\mathrm{Re}(\varsigma)>(1-\theta)h-1$, а также в (3.6) при $\mathrm{Re}(\varsigma)<(1-\theta)h-1$. Если $\Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)<-1$, то $\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f$ дается равенством (1.1).

Из формул (3.1) и (3.2), формул обращения для H-преобразования [1] получаем следующие утверждения об обратимости оператора преобразования (1.1) в $\mathcal{L}_{\nu,r}$.

Теорема 5. Пусть $a^*=0$, $\alpha<1-\theta<\beta$, $\alpha_0<\theta<\beta_0$, где

$$\alpha_0=\begin{cases}1+\max\left[\beta_{m+1}^{-1}\left(\mathrm{Re}(b_{m+1})-1\right),\ \dots,\beta_q^{-1}\left(\mathrm{Re}(b_q)-1\right)\right], & q>m,\\ -\infty, & q=m;\end{cases}$$

$$\beta_0=\begin{cases}1+\min\left[\alpha_{n+1}^{-1}\mathrm{Re}(a_{n+1}),\ \dots,\alpha_p^{-1}\mathrm{Re}(a_p)\right], & p>n,\\ \infty, & p=n.\end{cases}$$

Пусть также $\varsigma\in\mathrm{C}$, $h>0$.

A. Если $\Delta(1-\theta)+\mathrm{Re}(\vartheta)=0$ и $f\in\mathcal{L}_{\nu,2}$, то при $\mathrm{Re}(\varsigma)>\theta h-1$ верно равенство

$$f(x)=-\gamma h\lambda x^{\delta-\mu+\delta(\varsigma+1)/h}\frac{d}{dx}x^{-\delta(\varsigma+1)/h}\times$$

$$\times\int_0^\infty H^{q-m,p-n+1}_{p+1,q+1}\left[\frac{\lambda t^\gamma}{x^\delta}\middle|\begin{matrix}(-\varsigma,h),(1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{n+1,p},(1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,n}\\(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{m+1,q},(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{1,m},(-\varsigma-1,h)\end{matrix}\right]\times \tag{3.10}$$

$$\times t^{\gamma-\eta-1}(\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f)(t)dt.$$

Если $\mathrm{Re}(\varsigma) < \theta h - 1$, то

$$f(x) = \gamma h \lambda x^{\delta-\mu+\delta(\varsigma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{-\delta(\varsigma+1)/h} \times$$

$$\int_0^\infty H_{p+1,q+1}^{q-m+1,p-n} \left[\frac{\lambda t^\gamma}{x^\delta} \left| \begin{matrix} (1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{n+1,p},(1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,n},(-\varsigma,h) \\ (-\varsigma-1,h),(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{m+1,q},(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{1,m} \end{matrix} \right. \right] \times \tag{3.11}$$

$$\times t^{\gamma-\eta-1} (\mathrm{H}^1_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f)(t) dt.$$

B. Если $\Delta = \mathrm{Re}(\vartheta) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ $(1 < r < \infty)$, то формула обращения (3.10) имеет место при $\mathrm{Re}(\varsigma) > \theta h - 1$, а формула (3.11) – при $\mathrm{Re}(\varsigma) < \theta h - 1$.

Теорема 6. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1-\theta < \beta$, $1 < r < \infty$ и $\Delta(1-\theta) + \mathrm{Re}(\vartheta) \le 1/2 - \psi(r)$ и пусть $\varsigma \in \mathrm{C}$, $h > 0$.

A. Если $\Delta > 0$, $m > 0$, $\alpha_0 < \theta < \min\left[\beta_0, \{\mathrm{Re}(\vartheta + 1/2)/\Delta\} + 1\right]$ и если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, то формулы обращения (3.10) и (3.11) выполнены при $\mathrm{Re}(\varsigma) > \theta h - 1$ и $\mathrm{Re}(\varsigma) < \theta h - 1$ соответственно.

B. Если $\Delta < 0$, $n > 0$, $\max\left[\alpha_0, \{\mathrm{Re}(\vartheta + 1/2)/\Delta\} + 1\right] < \theta < \beta_0$ и если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, то формулы обращения (3.10) и (3.11) выполнены при $\mathrm{Re}(\varsigma) > \theta h - 1$ и $\mathrm{Re}(\varsigma) < \theta h - 1$ соответственно.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.2.01 ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas, A. A. H-Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
2. Килбас, А. А. Обобщенное H-преобразование в весовых пространствах суммируемых функций / А. А. Килбас, Е. К. Щетникович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 14–19.
3. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

Поступила 02.11.2021

ONE GENERALIZED H-TRANSFORMATION IN WEIGHT SPACES OF INTEGRATED FUNCTIONS ON A SEMI-AXIS

S. SITNIK, O. SKOROMNIK, Y. ARKHIPAVETS

The properties of one class of generalized H-transformations in weighted spaces of integrable functions on the semi-axis are studied. Conditions for the boundedness and one-to-oneness of the operators of such transformations from one space $L_{\nu,r}$ to another are obtained, analogues of the integration formula by parts are proved, various integral representations for the transformations under study are obtained, descriptions of images are given, and formulas for their inversion are derived.

Keywords: *H-transform, H-function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*