УДК 517.983

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СИНУСА В ЯДРАХ

М. В. ПАПКОВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ШЛАПАКОВ
(Витебский государственный университет им. П. М. Машерова)

Рассматривается один класс многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией гиперболического синуса в ядрах по ограниченной пирамидальной области специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, выводятся явные формулы решений рассматриваемых многомерных интегральных уравнений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространствах суммируемых функций.

Ключевые слова: *многомерные интегральные уравнения первого рода, функция гиперболического синуса, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Одномерные интегральные уравнения первого рода, которые обобщают классическое интегральное уравнение Абеля и содержат в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), функцию Бесселя, другие специальные функции, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 35.1, 35.2, 37.1, 39.1, 39.2; 2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [3]. Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [4] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченной пирамидальной области евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [5, с. 48; 6] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [7] (см. также [1, § 24.1, 28.4]).

Используя методику Я. Тамаркина, в работах [8; 9] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальным областям специального вида. В [10–15] приводятся решения в замкнутой форме отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с такими специальными функциями, как гипергеометрическая функция Гаусса, функция Лежандра, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, функция Бесселя–Клиффорда в ядрах по пирамидальным областям, и изучается вопрос разрешимости указанных уравнений в пространствах интегрируемых функций.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного класса многомерных интегральных уравнений с функцией гипергеометрического синуса в ядрах по пирамидальной области специального вида и устанавливаем необходимые и достаточные условия их разрешимости в пространствах интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решения рассматриваемых уравнений в квадратурах, а также необходимые и достаточные условия их разрешимости.

1. Предварительные сведения. Будем использовать обозначения (см., например, [1, §28.4; 10–16]). Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, R^n – *n*-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$ через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k t_k$ обозначим их скалярное произведение. Заметим, что $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,1,...,1)$; под выражением $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ понимаем $x_1>t_1,\ x_2>t_2,\ ...,\ x_n>t_n$ и аналогично для знака $\geq$; $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$; $\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}^n_0=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, где $(k_i\in\mathrm{N}_0,\ i=1,2,...,n)$ –

мультииндекс, $\mathbf{k}! = k_1! k_2! \cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Для $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{k} \in \mathrm{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{R}_+^n$ и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathrm{R}_+^n$ полагаем $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_{\mathrm{k}} = (x_1)_{k_1} (x_2)_{k_2} \cdots (x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \ldots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma = \left(x_1^{\sigma_1} - t_1^{\sigma_1}\right)\left(x_1^{\sigma_1} - t_1^{\sigma_1}\right) \cdots \left(x_n^{\sigma_n} - t_n^{\sigma_n}\right)$, где $(z)_n$ – символ Похгаммера:

$$(z)_0 \equiv 1,\ (z)_k = z(z+1)\ldots(z+k-1) = \Gamma(z+n)/\Gamma(z) \quad (z \in C; n \in \mathrm{N}),\ \lambda = (\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathrm{R}_+^n.$$

Пусть $A = \|a_{jk}\|$ $(a_{jk} \in \mathrm{R}^1)$ – матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через a_{jk}. Без ограничения общности будем считать $|A| = 1$. Пусть [1, §28.4; 10–16]

$$A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x}),\ (A \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_2} \cdots (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathrm{R}^n$ и $r \in \mathrm{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathrm{R}^n : A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0,\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\} \tag{1}$$

n-мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. В частном случае, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = (1, \ldots, 1)$ и $r = 0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{t} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{t} \geq 0\}. \tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнения условия $A^{-1}\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} > 0$ (соответственно для модельной пирамиды $A^{-1}\mathbf{c} > 0$).

В [16] была введена функция

$$\mathrm{sh}[\mathbf{x}] = \prod_{j=1}^{n} sh[x_j], \tag{3}$$

представляющая собой произведение функций гиперболического синуса $sh(z)$, определяемых по формуле

$$sh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in C, z \neq \infty, \tag{4}$$

связанных с показательной функцией

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{5}$$

Рассматриваемые нами интегральные уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(2\mathrm{sh} \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{2}\right)^{\alpha - 1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{6}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\ (\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^n, r \in \mathrm{R}^1)$ – пирамида (1);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha \in \mathrm{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda, \sigma \in \mathrm{R}_+^n$, $\mathrm{sh}\left[\dfrac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{2}\right]$ – функция вида (3).

Уравнение (6) при $\sigma = 1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение, изученное в [1, § 37.1].

Нам понадобятся формулы для бета-функции, которая определяется с помощью интеграла [17, 1.5 (1)]

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0\ , \tag{7}$$

и ее выражение через гамма-функцию [17, 1.5 (5)]

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ , \tag{8}$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. *Если функция* $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})$, *определенная на* $A_c(\mathbf{b})\times A_c(\mathbf{b})$, *измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int_{A_c(\mathbf{b})}d\mathbf{t}\int_{A_c(\mathbf{t})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\int_{A_c(\mathbf{b})}d\boldsymbol{\tau}\int_{\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\mathbf{t}\ , \tag{9}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n : A\cdot\boldsymbol{\tau}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\right\}, \tag{10}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (9) сходится абсолютно.

3. Решение в замкнутой форме. Выведем формулу решения уравнения (6). Заменяем в (6) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножаем обе части полученного равенства на $\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}$, где $\sigma^{\mathbf{1}}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1}=t_1^{\sigma_1-1}t_2^{\sigma_2-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, далее интегрируем по пирамиде $A_{c,r}(\mathbf{x})$, получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\int_{A_{c,r}(\mathbf{t})}\left(2\,\mathrm{sh}\frac{A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}{2}\right)^{\alpha-1}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\quad \mathbf{x}\in A_{c,r}(\mathbf{b}). \tag{11}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (11), используя формулу (9):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(2\,\mathrm{sh}\frac{A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}{2}\right)^{\alpha-1}\sigma^1\,\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}, \tag{12}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n : A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Вводим новые переменные для вычисления внутреннего интеграла в левой части (12):

$$s_j=\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})},\ \mathbf{a}_j=\left(a_{j1},\dots,a_{jn}\right)\ (j=1,\dots,n).$$

Далее по формуле (5) выражаем функцию гиперболического синуса $\mathrm{sh}[z]$ через показательную функцию e^z, используем формулы (7) и (8), для внутреннего интеграла в левой части (12) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(2\,\mathrm{sh}\frac{A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}{2}\right)^{\alpha-1}\sigma^1\,\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\left[\int_0^1\left(2sh\frac{(1-s_j)\,a_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}{2}\right)^{\alpha_j-1}a_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})ds_j\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\left[\int_0^1\left(e^{-(1-s_j)a_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}\right)^{(-\alpha_j+1)/2-1}\left(1-e^{-(1-s_j)a_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}\right)^{\alpha_j-1}d\left(e^{-(1-s_j)a_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{B}\left(\frac{-\alpha_j+1}{2},\alpha_j\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left((-\alpha_j+1)/2\right)\Gamma\left(\alpha_j\right)}{\Gamma\left((\alpha_j+1)/2\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

На основании этого равенство (12) принимает вид

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \sigma^1 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t}$$

или

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = f^{\sigma,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

где $f^{\sigma,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \displaystyle\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t}$.

Совершаем замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \quad (14)$$

где $\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\dfrac{y_1}{d_1}, ..., \dfrac{y_n}{d_n}\right) \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (13) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \quad (15)$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2);

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right);$$

$$\varphi(\mathbf{y}) = f^{\sigma,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right) \prod_{j=1}^{n} d_j .$$

Чтобы выполнить обращение уравнения (15), перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} ... \int_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau})d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \quad (16)$$

Далее, произведя последовательное дифференцирование по переменным $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$, получаем $\psi(\mathbf{y}) = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \equiv \dfrac{\partial}{\partial y_1}\dfrac{\partial}{\partial y_2}...\dfrac{\partial}{\partial y_n}\varphi(\mathbf{y})$. Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \dfrac{r}{n\mathbf{c}}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k = 1, ..., n), \quad (16)$$

где a_{jk} $(j, k = 1, ..., n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1}, получаем формулу решения уравнения (6):

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^1 \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\Gamma((1-\alpha)/2)} \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left\{ \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \right\}. \quad (17)$$

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости. Приведем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (6) в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$:

$$L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\}. \qquad (18)$$

Введем пространство (см., например, [1, §28.4], [8; 10–16])

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi\ :\varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)\right\}. \qquad (19)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)$ играет ту же роль для уравнения (6), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2]. Известно, что если $\varphi\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x})=h(\mathbf{x}).$$

Если матрица $A=E$ – единичной матрице, $\mathbf{c}=\mathbf{1}=(1,...,1)$ и $r=0$, то пространства (18)–(19) принимают соответственно вид

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi:\ \varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},h(\mathbf{t})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},$$

где $$h(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\equiv\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}...\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\mathbf{x}).$$

Справедливы следующие два утверждения, которые являются аналогами классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$.

Теорема 1. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения (6) с $\alpha\in\mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ и $\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})=\sigma^1\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\ \in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right);$$

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\left[\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=...\ ...=\left[\prod_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=0.$$

При выполнении этих условий уравнение (6) разрешимо в $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ и его единственное решение выражается формулой (17).

Доказательство.

Если выполняется $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$, то утверждение теоремы следует из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно выводится из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (16).

Следствие 1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}\left(2\,\mathrm{sh}\frac{\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}}{2}\right)^{\alpha-1}f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E_1(\mathbf{b}) \tag{20}$$

с $\alpha\in \mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\sigma\in \mathrm{R}_+^n$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f_{E_1}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})=\sigma^1\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{E_1}\left(L_1\right)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\ldots=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\sigma,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=0\,.$$

При выполнении этих условий уравнение (20) разрешимо в $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение выражается формулой*

$$f(\mathbf{x})=\sigma^1\frac{\Gamma\left((\alpha+1)/2\right)}{\Gamma\left((1-\alpha)/2\right)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left\{\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}.$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.2.01 ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Скоромник, О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода / О. В. Скоромник. – Новополоцк : ПГУ, 2019. – 180 с.
3. Репин, О. А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. – Саратов : изд-во Саратов. ун-та, 1992. – 183 с.
4. Kilbas, A. A. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A. A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
5. Михлин, С. Г. Лекции по интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.
6. Преображенский, Н. Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н. Г. Преображенский. – Новосибирск : Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
7. Федосов, В. П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В. П. Федосов. – Новосибирск : Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
8. Килбас, А. А. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго, Г. М. Сривастава // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
9. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina [et al.] // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
10. Килбас, А. А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Доклады академии наук (Рос. Акад. наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Килбас, А. А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.
12. Скоромник, О. В. Решение многомерных гипергеометрических интегральных уравнений типа Абеля / О. В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2011. – № 4. – С. 64–70.
13. Скоромник, О. В. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / О. В. Скоромник, А. П. Мателенок // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 2 (62). – С. 22–27.
14. Скоромник, О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1 (79). – С. 12–17.

15. Скоромник, О. В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя-Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 2 (99). – С. 5–13.
16. Папкович, М. В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией гиперболического синуса в ядре по пирамидальной области / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // Актуальные проблемы математики и информационных технологий : материалы II Всерос. конф., приуроч. к 90-лет. Дагестан. гос. ун-та, Махачкала, 5–7 февр. 2021 г. / Дагестан. гос. ун-т ; редкол.: А.М. Магомедов (гл.ред.) [и др.]. – Махачкала : ДГУ, 2021. – С. 124–127.
17. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с.

Поступила 16.11.2021

SOLUTION OF ONE CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH HYPERBOLIC SINE FUNCTION IN KERNELS

M. PAPKOVICH, O. SKOROMNIK, S. SHLAPAKOV

One class of multidimensional integral equations of the first kind with a hyperbolic sine function in kernels over a bounded pyramidal domain of a special form is considered. Following the technique of Ya. Tamarkin, explicit formulas for the solution of the considered multidimensional integral equations are derived. Necessary and sufficient conditions for the solvability of such equations in spaces of summable functions are established.

Keywords: *multidimensional integral equations of the first kind, hyperbolic sine function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*