УДК 511.8 **DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-103-111**

МНОЖЕСТВО ПОЛУОКТАВ. II

канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. КОЗЛОВ
(Полоцкий государственный университет)

Сегодня теория гиперкомплексных чисел представляет собой бурно развивающуюся область математических знаний в связи с ее многочисленными приложениями в различных разделах физики. Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространство–время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности [1–6].

В статье [7], по аналогии с работой [8] иранских математиков Х. Мортазашла и М. Джафари, давших понятие полукватерниона, введено определение полуоктав и операций над ними, а также установлены некоторые свойства этих операций.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [7]. Здесь введены определения нормы полуоктавы и линейных уравнений над полуоктавами, найдены формулы для решения таких уравнений. Также для полуоктав установлены аналоги формул Эйлера и Муавра, изначально имевших место для комплексных чисел.

Ключевые слова: *полуоктавы, гиперкомплексные числа.*

Введение. Сегодня теория гиперкомплексных чисел представляет собой бурно развивающуюся отрасль математических знаний в связи с ее многочисленными приложениями в различных разделах физики (см., например, работы [1–6]). Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространство–время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности [1–6].

В статье [7] были указаны основные этапы развития классической теории гиперкомплексных чисел, а также определена, аналогично введенному в 2013 г. иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари множеству полукватернионов [8], совокупность полуоктав и изучены отдельные ее свойства.

Основная часть. Данная статья продолжает исследования по полуоктавам, начатые в работе [7].

Напомним следующие дефиниции, введенные в статье [7].

Определение 1 [7]. *Действительной полуоктавой* (или просто *полуоктавой*) назовем формальное выражение вида

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ – действительные числа;

$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ – базисные (мнимые) единицы, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$i_k^2 = -1 \text{ при } k = \overline{1,3} \text{ и } i_k^2 = 0 \text{ при } k = \overline{4,7},$$

$$i_k \cdot i_l = i_{k+l} = -i_l \cdot i_k \text{ при } k < l \text{ и } k + l \le 4,$$

$$i_k \cdot i_l = 0 \text{ при } k + l > 4.$$

Всюду далее множество полуоктав будем обозначать через W.

Определение 2 [7]. *Суммой полуоктав*

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \in W \text{ и } w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7 \in W$$

назовем полуоктаву $w_1 + w_2 \in W$, определяемую равенством

$$w_1 + w_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3 + (a_4 + b_4) i_4 + (a_5 + b_5) i_5 + (a_6 + b_6) i_6 + (a_7 + b_7) i_7.$$

Определение 3 [1]. Пусть $c \in R$ и $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \in W$. *Произведением действительного числа* $c \in R$ *на полуоктаву* $w \in W$ назовем полуоктаву

$$cw = (ca_0) + (ca_1) i_1 + (ca_2) i_2 + (ca_3) i_3 + (ca_4) i_4 + (ca_5) i_5 + (ca_6) i_6 + (ca_7) i_7 \in W.$$

Определение 4. *Произведением полуоктавы* $w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$ *на полуоктаву* $w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$ назовем полуоктаву $w_1 w_2 \in W,$ определяемую равенством

$$w_1 w_2 = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 +$$
$$+(a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 +$$
$$+(a_0 b_4 + a_4 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1) i_4 + (a_5 b_0 + a_0 b_5) i_5 + (a_6 b_0 + a_0 b_6) i_6 + (a_7 b_0 + a_0 b_7) i_7.$$

Основным результатом работы [7] была следующая

Теорема 1 [7]. *Множество полуоктав W является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй.*

В настоящей статье введено понятие линейного уравнения в полуоктавах и получено решение такого уравнения. Кроме того, для множества полуоктав установлен аналог формул Эйлера и Муавра, справедливых для комплексных чисел.

Прежде чем переходить к понятиям линейного уравнения над полуоктавами и его решения, введем следующие, необходимые в дальнейшем, определения операции сопряжения полуоктав и нормы полуоктавы.

Определение 5. *Сопряженной полуоктавой* для полуоктавы $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$ назовем полуоктаву

$$\overline{w} = a_0 - (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7).$$

Пример 1. Пусть дана полуоктава $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7.$ Тогда сопряженной для данной будет полуоктава $\overline{w} = -1 - 2i_1 - 3i_2 + 7i_3 - i_4 + 4i_6 - 8i_7.$

Определение 6. *Норму полуоктавы* $w \in W$ определим следующим образом: $N_w = w \cdot \overline{w}.$

В силу определения 4 операции произведения полуоктав имеем равенства

$$w \cdot \overline{w} = (a_0 a_0 - a_1(-a_1) - a_2(-a_2) - a_3(-a_3)) + (a_1 a_0 + a_0(-a_1)) i_1 + (a_2 a_0 + a_0(-a_2)) i_2 + (a_0(-a_3) + a_3 a_0) + a_1(-a_2) - a_2(-a_1)) i_3 +$$
$$+(a_0(-a_4) + a_4 a_0 + a_1(-a_3) - a_3(-a_1)) i_4 + (a_5 a_0 + a_0(-a_5)) i_5 + (a_6 a_0 + a_0(-a_6)) i_6 + (a_7 a_0 + a_0(-a_7)) i_7 =$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$\overline{w} \cdot w = (a_0 a_0 - (-a_1) a_1 - (-a_2) a_2 - (-a_3) a_3) + (-a_1 a_0 + a_0 a_1) i_1 + (-a_2 a_0 + a_0 a_2) i_2 + (a_0 a_3 + (-a_3) a_0 + (-a_1) a_2 - (-a_2) a_1) i_3 +$$
$$+(a_0 a_4 + (-a_4) a_0 + (-a_1 a_3 - (-a_3) a_1) i_4 + ((-a_5) a_0 + a_0 a_5) i_5 + ((-a_6) a_0 + a_0(-a)_6) i_6 + ((-a_7) a_0 + a_0 a_7) i_7$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Поэтому норма полуоктавы $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$ – это неотрицательное действительное число, которое вычисляется по формуле

$$N_w = w \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot w = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \qquad (1)$$

Пример 2. Пусть дана полуоктава $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7.$ Тогда нормой этой полуоктавы является число $N_w = (-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-7)^2 = 63.$

Установим некоторые свойства операции сопряжения полуоктав.

Теорема 2. *При всяких $w, w_1, w_2 \in W$ и $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ для операции сопряжения полуоктав имеют место следующие свойства:*

1) $\overline{\overline{w}} = w;$

2) $\overline{c_1 w_1 + c_2 w_2} = c_1 \overline{w_1} + c_2 \overline{w_2};$

3) $N_{cw} = c^2 N_w;$

4) $N_{w_1 \cdot w_2} \neq N_{w_1} \cdot N_{w_2};$

5) $N_{\overline{w}} = N_w.$

Доказательство.

1. Пусть дана полуоктава $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \in W$. Тогда на основании определения операции сопряжения имеем равенства

$$\overline{\overline{w}} = \overline{\overline{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7}} = \overline{a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3 - a_4 i_4 - a_5 i_5 - a_6 i_6 - a_7 i_7} =$$

$$= a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 = w.$$

2. В силу определения и свойств операций суммы полуоктав и произведения действительного числа на полуоктаву, а также определения операции сопряжения полуоктав для любых действительных чисел c_1, c_2 и полуоктав $w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$, $w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$, имеют место соотношения

$$\overline{c_1 w_1 + c_2 w_2} = \overline{(c_1 a_0 + c_2 b_0) + (c_1 a_1 + c_2 b_1) i_1 + (c_1 a_2 + c_2 b_2) i_2 + (c_1 a_3 + c_2 b_3) i_3 +}$$

$$\overline{+ (c_1 a_4 + c_2 b_4) i_4 + (c_1 a_5 + c_2 b_5) i_5 + (c_1 a_6 + c_2 b_6) i_6 + (c_1 a_7 + c_2 b_7) i_7} =$$

$$= (c_1 a_0 + c_2 b_0) - (c_1 a_1 + c_2 b_1) i_1 - (c_1 a_2 + c_2 b_2) i_2 - (c_1 a_3 + c_2 b_3) i_3 -$$

$$- (c_1 a_4 + c_2 b_4) i_4 - (c_1 a_5 + c_2 b_5) i_5 - (c_1 a_6 + c_2 b_6) i_6 - (c_1 a_7 + c_2 b_7) i_7 =$$

$$= ((c_1 a_0) - (c_1 a_1) i_1 - (c_1 a_2) i_2 - (c_1 a_3) i_3 - (c_1 a_4) i_4 - (c_1 a_5) i_5 - (c_1 a_6) i_6 - (c_1 a_7) i_7) +$$

$$= (c_2 b_0) - (c_2 b_1) i_1 - (c_2 b_2) i_2 - (c_2 b_3) i_3 - (c_2 b_4) i_4 - (c_2 b_5) i_5 - (c_2 b_6) i_6 - (c_2 b_7) i_7 = c_1 \overline{w_1} + c_2 \overline{w_2}.$$

3. Возьмём произвольное число $c \in \mathbb{R}$ и полуоктаву $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$. Тогда по определению 3 операции умножения действительного числа на полуоктаву справедливо равенство

$$cw = (ca_0) + (ca_1) i_1 + (ca_2) i_2 + (ca_3) i_3 + (ca_4) i_4 + (ca_5) i_5 + (ca_6) i_6 + (ca_7) i_7.$$

На основании формулы (1) для вычисления нормы полуоктавы, а также элементарных свойств действительных чисел имеем требуемые соотношения

$$N_{cw} = (ca_0)^2 + (ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2 = c^2 (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = c^2 N_w. \tag{2}$$

4. Из формулы (1) и определения 4 произведения полуоктав следуют соотношения

$$N_{w_1 \cdot w_2} - N_{w_1} \cdot N_{w_1} = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)^2 + (a_2 b_0 + a_0 b_2)^2 +$$

$$+ (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) =$$

$$= 2 a_1 b_1 a_3 b_3 + 2 a_2 b_2 a_3 b_3 + 2 a_0 b_3 a_1 b_2 - 2 a_0 b_3 a_2 b_1 + 2 a_3 b_0 a_1 b_2 - 2 a_3 b_0 a_2 b_1 - a_1^2 b_3^2 - a_2^2 b_3^2 - a_3^2 b_1^2 - a_3^2 b_2^2 \neq 0.$$

5. В силу равенства $\overline{w} = a_0 - (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7)$ и формулы (1) выполняются соотношения $N_{\overline{w}} = a_0^2 + (-a_1)^2 + (-a_2)^2 + (-a_3)^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = N_w$.

Теорема 2 доказана.

Определение 7. *Обратной для полуоктавы* $w \in W$, где $N_w \neq 0$, назовем полуоктаву $w^{-1} \in W$, вычисляемую по формуле

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{N_w}.$$

Замечание 1. Определение 8 корректно, поскольку в силу определения операций умножения действительного числа на полуоктаву, умножения полуоктав и сопряжения полуоктав справедливы следующие соотношения:

$$w \cdot w^{-1} = w \cdot \frac{\overline{w}}{N_w} = (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7) \times$$

$$\times(\frac{a_0}{N_w}-\frac{a_1}{N_w}i_1-\frac{a_2}{N_w}i_2-\frac{a_3}{N_w}i_3-\frac{a_4}{N_w}i_4-\frac{a_5}{N_w}i_5-\frac{a_6}{N_w}i_6-\frac{a_7}{N_w}i_7)=\frac{a_0^2}{N_w}+\frac{a_1^2}{N_w}+\frac{a_2^2}{N_w}+\frac{a_3^2}{N_w}=\frac{N_w}{N_w}=1,$$

$$w^{-1}\cdot w=\frac{\overline{w}}{N_w}\cdot w=\frac{1}{N_w}.(\overline{w}\cdot w)=\frac{1}{N_w}\cdot N_w=1.$$

Теорема 3. *Пусть даны* $c\in\mathbb{R}, w\in W,$ *причем* $N_w\neq 0.$ *Тогда для полуоктавы* w^{-1}, *обратной к* w, *выполняются следующие свойства:*

$$1)\ (cw)^{-1}=\frac{1}{c}\cdot w^{-1};\qquad 2)\ N_{w^{-1}}=\frac{1}{N_w}.$$

Доказательство.

1. Пусть дана полуоктава $w=a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7.$ Из определений для обратной полуоктавы, операций умножения числа на полуоктаву, сопряжения полуоктав, а также формулы (2) вытекают равенства

$$(cw)^{-1}=\frac{\overline{cw}}{N_{cw}}=\frac{\overline{(ca_0)+(ca_1)i_1+(ca_2)i_2+(ca_3)i_3+(ca_4)i_4+(ca_5)i_5+(ca_6)i_6+(ca_7)i_7}}{c^2N_w}=$$

$$=\frac{(ca_0)-(ca_1)i_1-(ca_2)i_2-(ca_3)i_3-(ca_4)i_4-(ca_5)i_5-(ca_6)i_6-(ca_7)i_7}{c^2N_w}=$$

$$=\frac{c(a_0-a_1i_1-a_2i_2-a_3i_3-a_4i_4-a_5i_5-a_6i_6-a_7i_7)}{c^2N_w}=\frac{c\overline{w}}{c^2N_w}=\frac{1}{c}\cdot w^{-1}.$$

2. Поскольку выполняются равенства

$$w^{-1}=\frac{\overline{w}}{N_w}=\frac{a_0-a_1i_1-a_2i_2-a_3i_3-a_4i_4-a_5i_5-a_6i_6-a_7i_7}{N_w}=$$

$$=\frac{a_0}{N_w}-\frac{a_1}{N_w}i_1-\frac{a_2}{N_w}i_2-\frac{a_3}{N_w}i_3-\frac{a_4}{N_w}i_4-\frac{a_5}{N_w}i_5-\frac{a_6}{N_w}i_6-\frac{a_7}{N_w}i_7,$$

то в силу формулы для нормы полуоктавы имеют место соотношения

$$N_{w^{-1}}=\left(\frac{a_0}{N_w}\right)^2+\left(\frac{a_1}{N_w}\right)^2+\left(\frac{a_2}{N_w}\right)^2+\left(\frac{a_3}{N_w}\right)^2=\frac{1}{N_w^2}(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)=\frac{N_w}{N_w^2}=\frac{1}{N_w}.$$

Теорема 3 доказана.

Определение 8. *Линейным уравнением во множестве полуоктав* назовем уравнения вида

$$w_1\cdot x=w_2\ \text{ и }\ y\cdot w_1=w_2,$$

где $w_1, w_2\in W$ – заданные полуоктавы;
$x, y\in W$ – неизвестные.

Рассмотрим эти уравнения при $N_{w_1}\neq 0.$ В таком случае существует обратная полуоктава $w^{-1}\in W$, умножая обе части уравнений на которую (первое уравнение – слева, а вторее – справа), получим решение этих уравнений

$$x=w_1^{-1}\cdot w_2=\frac{\overline{w_1}}{N_{w_1}}\cdot w_2\ \text{ и, соответственно, }\ y=w_2\cdot w_1^{-1}=w_2\cdot\frac{\overline{w_1}}{N_{w_1}}. \quad (3)$$

Пример 3. Пусть дано уравнение в полуоктавах

$$(-1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i_7)\cdot x=3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6.$$

Обозначим $w_1=-1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i,\ \ w_2=3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6.$ Из примера 2 следует $N_{w_1}=63\neq 0.$ Тогда в силу формул (3) решением рассматриваемого уравнения будет полуоктава

$$x=\frac{\overline{-1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i_7}}{63}\cdot(3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6)=$$

$$=\frac{1}{63}\cdot(-1-2i_1-3i_2+7i_3-i_4+4i_6-8i_7)\cdot(3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6)=$$

$$=\frac{1}{63}(((-1)\cdot 3-(-2)\cdot 1-(-3)\cdot 4-7\cdot(-1))+((-2)\cdot 3+(-1)\cdot 1)i_1+((-3)\cdot 3+(-1)\cdot 4)i_2+$$

$$+((-1)\cdot(-1)+7\cdot 3+(-2)\cdot 4-(-3)\cdot 1)i_3+((-1)\cdot 5+(-1)\cdot 3+(-2)\cdot(-1)-7\cdot 1)i_4+$$

$$+(0\cdot 3+(-1)\cdot(-2))i_5+(4\cdot 3+(-1)\cdot 4)i_6+((-8)\cdot 3+(-1)\cdot 0)i_7=$$

$$=\frac{18}{63}-\frac{7}{63}i_1-\frac{13}{63}i_2+\frac{17}{63}i_3-\frac{13}{63}i_4+\frac{2}{63}i_5+\frac{8}{63}i_6-\frac{24}{63}i_7.$$

Установим теперь формулы Эйлера и Муавра для полуоктав. Для этого введем вначале

Определение 9. Любая ненулевая полуоктава $w=a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7$ может быть представлена *в полярном виде*

$$w=r(\cos\phi+\vec{v}\cdot\sin\phi),$$

где

$$r=\sqrt{N_w}=\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ 0\leq\phi\leq 2\pi,$$

причем

$$\cos\phi=\frac{a_0}{r},\ \ \sin\phi=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}{r}.$$

Определение 10. *Единичный вектор* $\vec{v}$ *полуоктавы* $w=a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7\in W,$ где $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0,$ определим следующим образом:

$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\cdot(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7).$$

Тогда, пользуясь определением произведения полуоктав, получим равенства

$$\vec{v}^2=\frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7)\cdot(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7)=$$

$$=\frac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot((0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2)+(a_1\cdot 0+0\cdot a_1)i_1+(a_2\cdot 0+0\cdot a_2)i_2+(0\cdot a_3+a_3\cdot 0+a_1\cdot a_2-a_2\cdot a_1)i_3+$$

$$+(0\cdot a_4+a_4\cdot 0+a_1\cdot a_3-a_3\cdot a_1)i_4+(a_5\cdot 0+0\cdot a_5)i_5+(a_6\cdot 0+0\cdot a_6)i_6+(a_7\cdot 0+0\cdot b_7)i_7)=-1,$$

Таким образом,

$$\vec{v}^2=-1.$$

Отсюда с учетом формулы 5) теоремы 2 получим соотношения $\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})=\vec{v}\cdot(-1)=(-1)\cdot\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}$, т.е.

$$(\vec{v}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}).$$

Последнее равенство говорит о том, что можно корректно определить любую натуральную степень n единичного вектора $\vec{v}$, т.е.

$$\vec{v}^n = \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot....\cdot\vec{v}}_{n \text{ раз}}.$$

Определяя в этом случае для произвольного действительного числа ϕ и единичного вектора $\vec{v}\in W$ экспоненциальную функцию $e^{\vec{v}\phi}$ как формальный ряд

$$e^{\vec{v}\phi} = 1 + (\vec{v}\phi) + \frac{(\vec{v}\phi)^2}{2!} + \frac{(\vec{v}\phi)^3}{3!} + ...,$$

который существует в силу определенных ранее операций сложения полуоктав [7], произведения полуоктавы на число [7], степеней действительного числа ϕ и единичного вектора $\vec{v}$, а также очевидного включения $\vec{v}\in W$, с учетом соотношения $\vec{v}^2 = -1$, получим обобщение формулы Эйлера для единичных векторов $\vec{v}\in W$

$$e^{\vec{v}\phi} = 1 + (\vec{v}\phi) + \frac{(\vec{v}\phi)^2}{2!} + \frac{(\vec{v}\phi)^3}{3!} + ... = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - ... + \vec{v}(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - ...) = \cos\phi + \vec{v}\sin\phi,$$

верное при любом действительном ϕ. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть* $\vec{v}$ *– единичный вектор полуоктавы* $w\in W$, *тогда для него справедливо равенство (формула Эйлера)*

$$e^{\vec{v}\phi} = \cos\phi + \vec{v}\sin\phi.$$

Лемма 1. *Пусть* $\vec{v}$ *– единичный вектор полуоктавы* $w\in W$, *тогда имеет место равенство*

$$(\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)(\cos\psi + \vec{v}\sin\psi) = \cos(\phi+\psi) + \vec{v}\sin(\phi+\psi).$$

Доказательство. Возьмем произвольную полуоктаву $w\in W$, для которой выполняется неравенство $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, и рассмотрим единичный вектор $\vec{v}$ этой полуоктавы. Тогда на основании свойств операций суммы и произведения полуоктав [7], а также равенства $\vec{v}^2 = -1$ и формулы косинуса и синуса суммы действительных аргументов имеем соотношения

$$(\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)(\cos\psi + \vec{v}\sin\psi) = \cos\phi\cos\psi + (\vec{v}\sin\phi)\cos\psi + \cos\phi(\vec{v}\sin\psi) + (\vec{v}\sin\phi)\cdot(\vec{v}\sin\psi) =$$

$$= \cos\phi\cos\psi + \vec{v}(\sin\phi\cos\psi) + \vec{v}(\cos\phi\sin\psi) + (\vec{v}\cdot\vec{v})\cdot(\sin\phi\sin\psi) =$$

$$= \cos\phi\cos\psi + \vec{v}(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi) + (-1)(\sin\phi\sin\psi) = \cos(\phi+\psi) + \vec{v}\sin(\phi+\psi).$$

Лемма 1 доказана.

Определение 11. *Единичной полуоктавой* $w\in W$ назовем полуоктаву вида

$$w_e = e^{\vec{v}\phi} = \cos\phi + \vec{v}\sin\phi,$$

где $\vec{v}$ – единичный вектор полуоктавы $w\in W$.

Тогда в силу определения 9 любая ненулевая полуоктава ($a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$)

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$$

представляется через соответствующую единичную полуоктаву в виде

$$w = r\cdot w_e,$$

где, как и ранее,

$$r = \sqrt{N_w} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Теорема 5. *Пусть* $w_e \in W$ *– единичная полуоктава. Тогда для любого натурального числа* n *справедлива формула (формула Муавра)*

$$w_e^n = \cos n\phi + \vec{v}\sin n\phi.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Для $n = 2$ формула непосредственным образом следует из леммы 1. Предположим, что формула Муавра верна для $n = k$ и докажем ее для случая $n = k+1$. На основании леммы 1 имеем равенства

$$w_e^{k+1} = (\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)(\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)^k = (\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)(\cos k\phi + \vec{v}\sin k\phi) =$$

$$= \cos(\phi + k\phi) + \vec{v}\sin(\phi + k\phi) = \cos(k+1)\phi + \vec{v}\sin(k+1)\phi.$$

По принципу математической индукции **теорема 6** доказана.

Из леммы 1 следует равенство $(\cos\phi + \vec{v}\sin\phi)(\cos(-\phi) + \vec{v}\sin(-\phi)) = \cos(\phi + (-\phi)) + \vec{v}\sin(\phi + (-\phi)) = = \cos 0 + \vec{v}\sin 0 = 1.$ Отсюда получаем, что

$$w_e^{-1} = \cos(-\phi) + \vec{v}\sin(-\phi).$$

Тогда в силу теоремы 3 имеет место равенство

$$w_e^{-n} = \cos(-n\phi) + \vec{v}\sin(-n\phi),$$

которое означает, что для любой единичной полуоктавы $w_e \in W$ корректно определена любая целая степень $w_e^l \in W$, $l \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Пусть дана полуоктава $w = -1 + \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7$. Для нахождения степени этой полуоктавы (например, десятой степени) воспользуемся теоремой 5. Тогда имеем равенства

$$r = \sqrt{N_w} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\cos\phi = \frac{a_0}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из последних двух формул вытекает равенство $\phi = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому имеет место соотношение

$$w = r \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + \vec{v}\sin\frac{3\pi}{4}),$$

где

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}(\frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7) = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7.$$

На основании формулы Муавра (теорема 5) имеем равенства

$$w^{10} = (r \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + \vec{v}\sin\frac{3\pi}{4}))^{10} = r^{10} \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + \vec{v}\sin\frac{3\pi}{4})^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos(10\cdot\frac{3\pi}{4}) + \vec{v}\sin(10\cdot\frac{3\pi}{4})) = 2^5(0-\vec{v}) = -2^5\vec{v} =$$

$$= -2^4 i_1 + 2^4 i_2 - (2^4 \cdot \sqrt{2})i_3 + (2\cdot 2^5)i_4 - (6\cdot 2^5)i_5 + (3\cdot 2^5)i_6 - 2^5 i_7 = -16i_1 + 16i_2 - 16\sqrt{2}i_3 + 32i_4 - 192i_5 + 96i_6 - 32i_7.$$

Заключение. Данная работа продолжает исследования, начатые в статье [7]. Здесь введено определение нормы полуоктавы, на основании которого были получены формулы для решения линейных уравнений над полуоктавами. Кроме того, пользуясь введенным в настоящей статье разбиением полуоктавы на сумму ее скалярной и векторной частей, автор доказал для полуоктав справедливость формул Эйлера и Муавра, изначально имевших место для комплексных чисел.

Приемы и методы, используемые в настоящей работе, позволяют в дальнейшем исследовать уравнения над полуоктавами более высоких порядков (например, второго, третьего и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Физматлит, 1963. – 192 с.
2. Павлов, Д. Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – № 2(14), т. 7. – С. 11–37.
3. Петров, А. М. Кватернионное представление вихревых движений / А. М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
4. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство–время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – М. : Мир, 1987–1988. – 2 т.
5. Кубышкин, Е. И. Нелинейная алгебра пространства-времени / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 304 с.
6. Кубышкин, Е. И. Октавы и наш восьмимерный мир / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 256 с.
7. Козлов, А. А. Множество полуоктав. I / А. А. Козлов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
8. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences And Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1, № 2. – P. 20–27.

REFERENCES

1. Yaglom, I. M. (1963). *Kompleksnye chisla i ikh primenenie v geometrii.* Moscow: Fizmatlit. (In Russ.).
2. Pavlov, D. G., & Kokarev, S. S. (2010). Algebraicheskaya edinaya teoriya prostranstva-vremeni i materii na ploskosti dvoinoi peremennoi. *Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike, 2*(14), vol. 7, 11–37. (In Russ.).
3. Petrov, A. M. (2006). *Kvaternionnoe predstavlenie vikhrevykh dvizhenii.* Moscow: Kompaniya «SPUTNIK». (In Russ.).
4. Penrouz, R., & Rindler, V. (1987–1988). *Spinory i prostranstvo–vremya [Spinors and space-time]* (in 2 vol). Moscow: Mir. (In Russ.).
5. Kubyshkin, E. I. (2009). *Nelineinaya algebra prostranstva-vremeni.* Moscow: Knizhnyi dom «LIBROKOM». (In Russ.).
6. Kubyshkin, E. I. (2013). *Oktavy i nash vos'mimernyi mir.* Moscow: Knizhnyi dom «LIBROKOM». (In Russ.).
7. Kozlov, A. A. (2016). Mnozhestvo poluoktav. I [The set of semi octave. I]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 75–85. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Mortazaasl, H., & Jafari, M. (2013). A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes, 1*(2), 20–27.

Поступила 13.04.2022

THE SET OF SEMI OCTAVE. II

A. KOZLOV

Today, the theory of hypercomplex numbers is a rapidly developing field of mathematical knowledge due to its numerous applications in various branches of physics. For example, dual numbers allow us to model the physical space-time quite accurately mathematically, quaternions are used in electrodynamics, in the study of vortex motions, octaves also represent a mathematical model of a possible description of our reality [1-6].

In the article [7], by analogy with the work [8] of the Iranian mathematicians X. Mortazashl and M. Jafari, who gave the concept of a semi-quaternion, the definition of semi-octaves and operations on them is introduced, as well as some properties of these operations are established.

This work continues the research started in [7]. Definitions of the norm of semi-octaves and linear equations over semi-octaves are introduced here, formulas for solving such equations are found. Analogs of the Euler and Moivre formulas, which originally took place for complex numbers, are also established for semi-octaves.

Keywords: *semi-octave, hypercomplex numbers.*