МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 **DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116**

КРИТЕРИЙ ГЛАДКОСТИ ЧАСТНОГО КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Выведен критерий гладкости на правую часть f для классического решения F уравнения $u_{tt}(x,t)-a^2(x,t)u_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=]0,+\infty]\times]0,+\infty],$ с переменной скоростью $a(x,t)$ в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$. Критерий гладкости состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть этого модельного телеграфного уравнения. Необходимые требования гладкости на f обоснованы методом корректировки пробных решений, предложенным ранее автором настоящей статьи. Этот метод указал на дважды непрерывную дифференцируемость функции F без ее корректировки, поэтому производные вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения дают необходимую гладкость на f. Отсюда легко выводится их достаточность для дважды непрерывной дифференцируемости F. Когда f зависит только от x или t, тогда этот критерий гладкости равносилен непрерывности f соответственно по x или t. Для уравнения построен общий интеграл с критерием гладкости его правой части f.

Ключевые слова: *модельное телеграфное уравнение, переменная скорость, неявные характеристики, метод корректировки, классическое решение, критерий гладкости.*

Введение. В настоящей работе методом корректировки пробных решений выведен критерий (необходимые и достаточные условия) гладкости на правую часть неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(x,t)$ для его явного частного классического решения F в первой четверти плоскости. Для нашей функции F с модулем координат x точек струны под двойным интегралом оно может оказаться не дважды непрерывно дифференцируемым на G_+. Этот факт подтверждает метод корректировки пробных решений в [1] при постоянных коэффициентах $a_1\neq a_2$ общего волнового уравнения (замечание 1). Следовательно, для модельного телеграфного уравнения даже при одном постоянном коэффициенте $a_1=a_2=a>0$ эта принадлежность функции F множеству классических решений может быть строго обоснована обобщением метода корректировки из [1] путем непосредственного дифференцирования по новым переменным решения $\tilde{F}$, полученного заменой переменных из F.

Итак, в настоящей статье методом корректировки доказана дважды непрерывная дифференцируемость частного решения F неоднородного модельного телеграфного уравнения со скоростью $a(x,t)$ без его корректировки. Поэтому производные вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения представляют необходимые интегральные требования гладкости на правую часть f уравнения (1). Достаточность установленных необходимых требований гладкости для дважды непрерывной дифференцируемости указанного решения F вытекает из свойств решений линейной системы двух алгебраических уравнений относительно его первых частных производных с непрерывно дифференцируемыми правыми частями. С помощью этого обоснованного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(x,t)$ построен его общий интеграл в первой четверти плоскости для решения смешанных задач. Все доказательства существенно опираются на тождества обращения неявных функций характеристик уравнения и их неявных обратных функций. В статье [2] исследуемая формула его классического решения во всей первой четверти плоскости использовалась при решении первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения без продолжений исходных данных. В ней модельное телеграфное уравнение позаимствовано из кандидатской диссертации[1], где решалась первая смешанная задача методом продолжений исходных данных. В указанной диссертации первая смешанная задача в полуполосе плоскости за счет периодических продолжений коэффициентов со специальными свойствами и входных данных на верхнюю полуплоскость сведена к задаче Коши и формуле Даламбера, которые в [2] отсутствуют на G_+.

1. Модельное телеграфное уравнение. В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ ищется некоторое классическое решение $F = F(x,t)$ с минимальной гладкостью правой части $f = f(x,t)$ уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty, \tag{1}$$

где f – заданная вещественная функция переменных x и t, коэффициент $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t)\in G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Мы обозначаем числом нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных. Здесь $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty,+\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Общеизвестно, что уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt,\ i = 1,2, \tag{2}$$

которые имеют в G_∞ общие интегралы $g_i(x,t) = C_i, C_i \in R, i = 1,2.$ Если коэффициент a строго положителен, т. е. $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t)\in G_\infty$, то в плоскости Oxt переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1, C_1 \in R,$ строго убывает и на характеристиках $g_2(x,t) = C_2, C_2 \in R,$ строго возрастает вместе с ростом x. Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i, x \ge 0, t \ge 0,$ имеют строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i,t\}, t \ge 0,$ $t = h^{(i)}[x,y_i], x \ge 0,$ $i = 1,2.$ По определению обратных отображений они удовлетворяют в G_∞ следующим тождествам обращения [2]:

$$g_i\,(h_i\{y_i,t\},t) = y_i,\quad \forall\, y_i,\ \ h_i\{g_i(x,t),t\} = x,\quad x \ge 0,\quad i = 1,2, \tag{3}$$

$$g_i\,(x,h^{(i)}[x,y_i]) = y_i,\quad \forall\, y_i,\ \ h^{(i)}[x,g_i(x,t)] = t,\quad t \ge 0,\quad i = 1,2, \tag{4}$$

$$h_i\{y_i,h^{(i)}[x,y_i]\} = x,\quad x \ge 0,\ \ h^{(i)}[h_i\{y_i,t\},y_i] = t,\quad t \ge 0,\quad i = 1,2. \tag{5}$$

В правых частях тождеств (3)–(5) вместе с взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t)\in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, то функции g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ по x, t, y_i, $i = 1,2$ в G_∞ [2].

В случае $a(x,t) = a = const > 0$ ими являются функции: $g_1(x,t) = x + at$, $g_2(x,t) = x - at$, $h_1\{y_1,t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2,t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x,y_1] = (y_1 - x)/a$, $h^{(2)}[x,y_2] = (x - y_2)/a$.

Определение 1. Функция $u = u(x,t)$ называется классическим решением уравнения (1) на множестве $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, если она имеет гладкость $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле для каждого $(x,t)\in \Omega \cap \dot{G}_\infty$.

Во-первых, если существует хотя бы одно классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ неоднородного уравнения (1) в $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, то его правая часть очевидно необходима быть непрерывной $f \in C(\Omega)$. Во-вторых, согласно определению 1 функция F должна быть, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, т. е. $F \in C^2(\Omega)$, и удовлетворять поточечно уравнению (1) на Ω. В-третьих, если функция F окажется не дважды непрерывно дифференцируемой, то провести ее корректировку некоторой функцией (обобщенным частным решением F_0 однородного уравнения (1) так, чтобы новая функция $F_1(x,t) = F(x,t) - F_0(x,t)$ стала дважды непрерывно дифференцируемой в Ω [1]. Разность двух менее гладких функций (обобщенных решений уравнения) может быть более гладкой функцией (классическим решением уравнения). Ниже нам не понадобится проводить корректировку нашей пробной функции F, потому что она окажется дважды

[1] Барановская, С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / С. Н. Барановская. – Минск, 1991. – 59 с.

непрерывно дифференцируемой и будет удовлетворять уравнению (1) для каждого (x,t) из G_∞ (см. замечание 1). В статье [1] такая корректировка нужна для аналога функции F при коэффициентах $a_1 \neq a_2$.

Найдем классическое решение уравнения (1) в $\dot{G}_\infty$ и критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на f в G_∞ с помощью корректирующей задачи Гурса из [1].

2. Корректирующая задача Гурса. Гладкость решений уравнения (1) в первой четверти плоскости существенно зависит от критической характеристики $g_2(x,t) = g_2(0,0)$, которая делит первую четверть плоскости G_∞ на два множества [2]:

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty :\ g_2(x,t) > g_2(0,0)\},\quad G_+ = \{(x,t) \in G_\infty :\ g_2(x,t) \leq g_2(0,0)\}.$$

Выводим классическое решение уравнения (1) и критерий гладкости на f в G_+.

Теорема 1. *Пусть коэффициент* $a(x,t) \geq a_0 > 0,\ (x,t) \in G_\infty,\ a \in C^2(G_\infty),\ f \in C(G_\infty)$. *Функция*

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}\, ds\, d\tau \tag{6}$$

является классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_+ *тогда и только тогда, когда*

$$H_+^{(i)}(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\, d\tau \in C^1(G_+),\quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если F вида (6) – классическое решение уравнения (1) в G_+, то из определения 1 имеем, что $F \in C^2(G_+)$ и только $f \in C(G_+)$, чего явно недостаточно для существования и непрерывности интегралов (7), в которых ведется интегрирование и в G_-. Поэтому в теореме 1 предполагаем непрерывность $f \in C(G_\infty)$. Кроме того, из гладкости $f \in C(G_\infty)$ и (7), конечно, следует гладкость $F \in C^2(G_+)$, но, вообще говоря, совсем не очевидно то, что для $f \in C(G_\infty)$ функция $F \in C^2(G_+)$ вида (6) удовлетворяет уравнению (1), если его правая часть f зависит от x и t. Соответственно, сначала докажем, что F вида (6) – классическое решение уравнения (1) в G_+. Во-первых, из ложного утверждения теоремы 1 о том, что F вида (6) – классическое решение уравнения (1) в G_+, можно получить ложную необходимую гладкость (7), например, так же как в случае $a_1 \neq a_2$ из [1]. Во-вторых, потом не надо будет приводить это доказательство в достаточности, где оно обязательно.

Можно начать доказательство того, что функция F вида (6) является классическим решением уравнения (1) в G_+ с предположения существования некоторого классического решения $u_0 \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) на G_∞. Например, подстановкой в это уравнение можно убедиться в том, что функция (6) для любой $f \in C^1(G_\infty)$ является его классическим решением (см. равенства (48). В результате доказательства нами будет предъявлено классическое решение этого уравнения, что укажет на правомерность сделанного предположения. Минимальная гладкость f могла нарушаться у F на G_+ из-за модуля $|s|$, так как нижний предел интегрирования $h_2\{g_2(x,t),\tau\}$ меняет знак на характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ при $\tau = h^{(2)}[0, g_2(0,0)]$ по первому тождеству обращения из (5) при $i = 2$.

Сначала покажем, что в любой точке $(x^{(0)}, t^{(0)})$ из G_+ функция (6) действительно является классическим решением уравнения (1). Каждая точка $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$ содержится строго внутри различных ограниченных криволинейных четырехугольников G_0, находящихся в G_∞, сторонами которых служат отрезки характеристик

$$g_1(x,t) = C_1,\quad g_2(x,t) = C_2,\quad C_1, C_2 \in R. \tag{8}$$

Уравнение (1) в различных четырехугольниках G_0 невырожденной заменой

$$\xi = g_1(x,t),\quad \eta = g_2(x,t) \tag{9}$$

с невырожденным якобианом $J(x,t)=\xi_x\eta_t-\xi_t\eta_x\neq 0$ в G_∞, потому что $a(x,t)\geq a_0>0$ в G_∞, приводится к виду

$$[(\xi_t)^2-a^2(\xi_x)^2]\tilde{u}_{\xi\xi}+2aJ(x,t)\tilde{u}_{\xi\eta}+[(\eta_t)^2-a^2(\eta_x)^2]\tilde{u}_{\eta\eta}+$$

$$+[\xi_{tt}-a^2\xi_{xx}-a^{-1}a_t\xi_t-aa_x\xi_x]\tilde{u}_\xi+[\eta_{tt}-a^2\eta_{xx}-a^{-1}a_t\eta_t-aa_x\eta_x]\tilde{u}_\eta=\tilde{\tilde{f}}(\xi,\eta)=f(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta)) \qquad (10)$$

относительно функции $\tilde{u}(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))\in C^2(\tilde{G}_\infty)$. Здесь множество $\tilde{G}_\infty$ (указанное в формуле (31) ниже) – образ четверти плоскости G_∞ при замене (9). Согласно (2) полные дифференциалы равны нулю

$$dg_i=(g_i)_x\,dx+(g_i)_t\,dt=[(g_i)_t+(-1)^i a(x,t)(g_i)_x]dt\equiv 0,\quad (x,t)\in G_\infty,\ \ i=1,2,$$

и, следовательно, ввиду (8) имеем соотношения

$$(g_i)_t\equiv(-1)^{i+1}a(x,t)(g_i)_x,\quad (x,t)\in G_\infty,\quad i=1,2, \qquad (11)$$

$$\xi_t-a(x,t)\xi_x=0,\quad \eta_t+a(x,t)\eta_x=0,\quad (x,t)\in G_\infty. \qquad (12)$$

Каждое из уравнений (12) дифференцируем раз по t и x, результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент $a(x,t)$ результатов дифференцирования по x, в полученных суммах соответственно применяем эти же уравнения (12) и имеем

$$\xi_{tt}-a^2\xi_{xx}=a^{-1}a_t\xi_t+aa_x\xi_x,$$

$$\eta_{tt}-a^2\eta_{xx}=a^{-1}a_t\eta_t+aa_x\eta_x,\quad (x,t)\in G_\infty. \qquad (13)$$

На основании тождеств (12), (13) уравнение (10) становится уравнением

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta)/\left[2\tilde{a}(\xi,\eta)J(x,t)\right],\quad (\xi,\mu)\in\tilde{G}_0, \qquad (14)$$

где $\tilde{a}(\xi,\eta)=\tilde{\tilde{a}}(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))$, в различных прямоугольниках $\tilde{G}_0=\{(\xi,\eta):\xi_0\leq\xi\leq\xi_1,\ \eta_0\leq\eta\leq\eta_1\}$.

В силу дважды непрерывной дифференцируемости и не вырожденности якобиана $J(x,t)\neq 0$ замены (9) для непрерывной функции $f\in C(G_\infty)$ непрерывна функция $\tilde{f}\in C(\tilde{G}_\infty)$. Поскольку по нашему предположению существует классическое решение $u_0\in C^2(G_\infty)$ уравнения (1), то ввиду этих же свойств замены (9) уравнение (14) в $\tilde{G}_\infty$ имеет классическое решение

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta)=u_0(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))\in C^2(\tilde{G}_\infty). \qquad (15)$$

Для любой $\tilde{f}\in C(\tilde{G}_\infty)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{f}_n\in C^1(\tilde{G}_\infty)$, которая при $n\to\infty$ равномерно сходится к $\tilde{f}$ на каждом компакте $\bar{\tilde{G}}_0$, где $\bar{\tilde{G}}_0$ – замыкание образов $\tilde{G}_0$ четырехугольников G_0 в результате замены (9).

В различных прямоугольниках $\tilde{G}_0$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$(\tilde{u}_n^{(0)})_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\tilde{f}_n(\xi,\eta)/[2a(x,t)J(x,t)],\quad (\xi,\mu)\in\tilde{G}_0, \qquad (16)$$

с согласованными условиями Гурса

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi_0,\eta)=\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta),\quad \eta\in[\eta_0,\eta_1],\quad \tilde{u}_n^{(0)}(\xi,\eta_0)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0),\quad \xi\in[\xi_0,\xi_1],\quad n=1,2,\ldots \qquad (17)$$

Задача Гурса (16), (17) в $\tilde{G}_0$ решается методом характеристик. Общий интеграл уравнения (16) в $C^1(\tilde{G}_0)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta) + \tilde{F}_n(\xi,\eta), \tag{18}$$

где g, h – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов и функции $\tilde{F}_n$ получаются из функции F вида (6) с подынтегральными функциями $f_n(|s|,\tau)$ вместо $f(|s|,\tau)$ в результате замены (9). Для правых частей $\tilde{f}_n \in C^1(\tilde{G}_\infty)$ очевидно решения $\tilde{F}_n \in C^2(\tilde{G}_\infty)$. Функции (18) подставляются в условия Гурса (17) и ввиду $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ и не вырожденности замены (9) выводятся ее единственные классические решения из $C^2(\tilde{G}_0)$:

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0) - \tilde{F}_n(\xi,\eta_0) + \tilde{F}_n(\xi_0,\eta_0) + \tilde{F}_n(\xi,\eta) - \tilde{F}_n(\xi_0,\eta), \ n = 1, 2, ... \tag{19}$$

Как разность классических решений функции $\tilde{v}_n(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta) - \tilde{u}_n^{(0)}(\xi,\eta),$ конечно, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$(\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi,\eta) = [\tilde{f}(\xi,\eta) - \tilde{f}_n(\xi,\eta)] / 2a(x,t)J(x,t), \quad (\xi,\eta) \in \tilde{G}_0, \tag{20}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0,\eta) = 0, \quad \eta \in [\eta_0,\eta_1], \quad \tilde{v}_n(\xi,\eta_0) = 0, \quad \xi \in [\xi_0,\xi_1], \quad n = 1, 2, ... \tag{21}$$

Умножая уравнение (20) на сумму первых частных производных $(\tilde{v}_n)_\xi + (\tilde{v}_n)_\eta$, интегрируя результат умножения по области $]\xi_0,\tau_1[\times]\eta_0,\tau_2[$ с помощью однородных условий Гурса (21), применяя элементарные оценки и беря точную верхнюю грань по $(\tau_1,\tau_2) \in [\xi_0,\xi_1] \times [\eta_0,\eta_1]$ в полученном неравенстве, так же, как в [3, с. 1020], выводится априорная оценка

$$\sup_{\eta_0<\eta<\eta_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left(\left|(\tilde{v}_n)_\xi(\xi,\eta)\right|^2 + \left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2 \right) d\xi + \sup_{\xi_0<\xi<\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(\left|(\tilde{v}_n)_\eta(\xi,\eta)\right|^2 + \left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2 \right) d\eta \le$$

$$\le c_0 \iint_{G_0} \left| \tilde{f}_n(\xi,\eta) - \tilde{f}(\xi,\eta) \right|^2 d\xi d\eta, \quad n = 1, 2, ..., \tag{22}$$

где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от $\tilde{v}_n$, ξ, η и n.

Поскольку в априорной оценке (22) правая часть сходится к нулю при $n \to \infty$, то из сходимости его левой части к нулю при $n \to \infty$ заключаем равномерную сходимость на прямоугольниках $\tilde{G}_0$ последовательности $\tilde{v}_n$ к нулю при $n \to \infty$, потому что для пространств Соболева $W_2^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, справедливы непрерывные вложения пространств $W_2^1(\xi_0,\xi_1) \subset C[\xi_0,\xi_1]$, $W_2^1(\eta_0,\eta_1) \subset C[\eta_0,\eta_1]$ [4]. Это означает равномерную сходимость на прямоугольниках $\tilde{G}_0$ последовательности $\tilde{u}_n^{(0)}$ к $\tilde{u}^{(0)}$ при $n \to \infty$. Поэтому благодаря неравенствам (22) из решений (19) предельным переходом при $n \to \infty$ получаем тождество

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0) -$$

$$-\tilde{F}(\xi,\eta_0) + \tilde{F}(\xi_0,\eta_0) + \tilde{F}(\xi,\eta) - \tilde{F}(\xi_0,\eta), \ (\xi,\eta) \in \tilde{G}_0, \tag{23}$$

где функция $\tilde{F}(\xi,\eta) = F\left(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\right)$ получена из функции F вида (6) заменой (9).

Проанализируем гладкость слагаемых правой части этого тождества. Слагаемые $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0)$ и $\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta)$ очевидно дважды непрерывно дифференцируемы соответственно по ξ и η, так как в (15) решение $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(G_0)$ по совокупности переменных ξ и η.

Из уравнений характеристик $ds/d\tau = (-1)^i a(s,\tau)$, $i = 1, 2$, в (2) и чётности функции $a(|s|,\tau)$ по s заключаем, что в каждой фиксированной точке $(s,\tau) \in \dot{G}_\infty$ тангенсы углов наклона касательных к характеристикам $g_i(s,\tau) = C_i$, $i = 1, 2$, с осью Os отличаются противоположными знаками. Значит, для всех вершин $M(0,t)$, $t > 0$, на оси $O\tau$ треугольники ΔMPG являются криволинейными «равнобедренными».

Поэтому на рисунке 1, *а* характеристики $g_2(s,\tau)=C_2$ и $g_1(s,\tau)=C_1$, при $s<0$ симметричны соответственно характеристикам $g_1(s,\tau)=C_1$ и $g_2(s,\tau)=C_2$ при $s>0$ относительно оси $O\tau$.

Чтобы выяснить гладкость остальных слагаемых в (23), воспользуемся геометрическим представлением функции F вида (6) через двойной интеграл по характеристическому треугольнику $\Delta\, MPQ$ с вершиной $M(x,t)\in G_+$ и вершинами его основания $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$, $Q\big(h_1\{g_1(x,t),0\},0\big)$:

$$F(x,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta MPQ}\frac{f(|x|,t)}{a(|x|,t)}dxdt=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta OP'Q'}\frac{f(x,t)}{a(x,t)}dxdt+\frac{1}{2}\iint\limits_{OQMQ'}\frac{f(x,t)}{a(x,t)}dxdt, \tag{24}$$

где точка $P'\big(-h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ – симметрическая к точке $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ относительно оси Ot и точка $Q'\Big(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\Big)$.

Чтобы в функции (24) перейти к новым переменным типа (9)

$$\nu=g_1(s,\tau),\ \ \rho=g_2(s,\tau),$$

найдем образ $\Delta\,\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ треугольника $\Delta\, MPQ$ и его частей в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$.

Нетрудно убедиться в том, что для любой точки $M(x,t)\in G_+$ в (6) двойной интеграл равен двойному интегралу по криволинейному характеристическому треугольнику ΔMPQ (рисунок 1, *а*). В плоскости $Os\tau$ через его вершину $M(x,t)\in G_+$ очевидно проходят две характеристики: $g_2(s,\tau)=g_2(x,t)$ и $g_1(s,\tau)=g_1(x,t)$, которые пересекают ось Os при $\tau=0$ соответственно в точках основания $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ и $Q\big(h_1\{g_1(x,t),0\},0\big)$. На оси Os точка $P'\big(-h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ симметрична точке $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ относительно оси $O\tau$. Точка $Q'\Big(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\Big)$ является точкой пересечения характеристики $g_2(s,\tau)=g_2(x,t)$ с осью $O\tau$. Все это легко подтверждается подстановкой их координат в соответствующие уравнения характеристик, используя определения обратных отображений h_i, $h^{(i)}$, $i=1,2$, и тождества обращения (3)–(5).

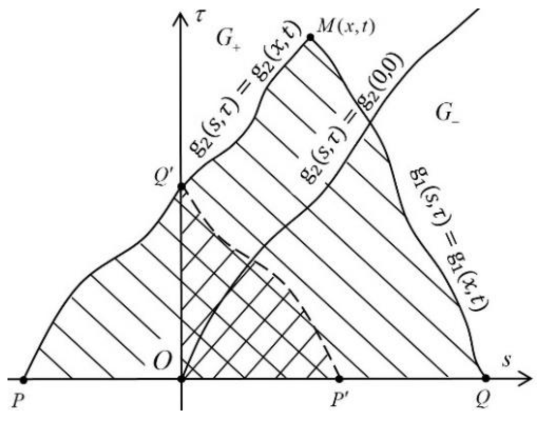
Отображение (9) переводит точку $M(x,t)$ плоскости $Os\tau$ в точку $\tilde{M}(\xi,\eta)$ плоскости $\tilde{O}\nu\rho$.

Тогда после замены переменных типа (9) уравнения характеристик $g_i(s,\tau)=g_i(x,t)$, $i=1,2$, боковых сторон MP и MQ треугольника ΔMPQ становятся соответственно уравнениями

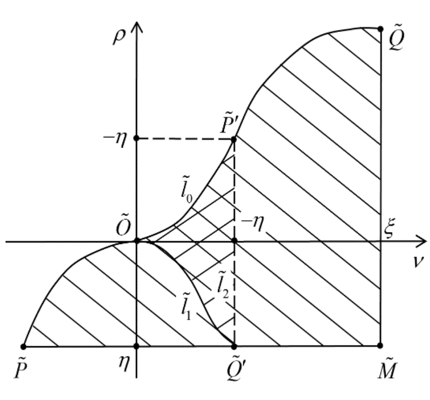
$$\nu\ =\ g_1(s,\tau)\ =\ g_1(x,t)\ =\ \xi, \tag{25}$$

$$\rho\ =\ g_2(s,\tau)=\ g_2(x,t)\ =\ \eta \tag{26}$$

боковых сторон $\tilde{M}\tilde{P}$ и $\tilde{M}\tilde{Q}$ треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$. Эти стороны $\tilde{M}\tilde{P}$ и $\tilde{M}\tilde{Q}$ лежат соответственно на прямых $\rho=\eta$ и $\nu=\xi$ (рисунок 1, *б*).



а



б

***а* – для функции F ; *б* – для функции $\tilde{F}$**

Рисунок 1. – Область интегрирования на множестве G_+

В замену типа (9) подставляем координаты вершин основания $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$, $Q\big(h_1\{g_1(x,t),0\},0\big)$ и в силу первых тождеств обращения из (3) вычисляем соответственно

$$\nu = g_1\big(h_2\{\eta,0\},0\big),\ \ \rho = g_2\big(h_2\{\eta,0\},0\big)=\eta;\ \ \nu = g_1\big(h_1\{\xi,0\},0\big)=\xi,\ \ \rho = g_2\big(h_1\{\xi,0\},0\big) \qquad (27)$$

координаты вершин $\tilde{P}\big(g_1\big(h_2\{\eta,0\},0\big),\eta\big)$, $\tilde{Q}\big(\xi, g_2\big(h_1\{\xi,0\},0\big)\big)$ треугольника $\Delta\,\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$, так как $g_1(x,t)=\xi,\ g_2(x,t)=\eta.$ Подставляя координаты точек $P'\big(-h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$, $Q'\big(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\big)$ в эту замену переменных, в силу первой формулы обращения из (4) при $i=2$ находим соответственно

$$\nu = g_1\big(-h_2\{\eta,0\},0\big),\ \ \rho = g_2\big(-h_2\{\eta,0\},0\big);\ \ \nu = g_1\big(0,h^{(2)}[0,\eta]\big),\ \ \rho = g_2\big(0,h^{(2)}[0,\eta]\big)=\eta \qquad (28)$$

координаты точек $\tilde{P}'\big(g_1(-h_2\{\eta,0\},0), g_2(-h_2\{\eta,0\},0)\big)$, $\tilde{Q}'\big(g_1(0,h^{(2)}[0,\eta]),\eta\big)$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$

Ищем образ отрезка OP' с уравнением $\tau=0,\ \ s\in[0,-h_2\{g_2(x,t),0\}]$ при отображении типа (9) из плоскости $Os\tau$ в плоскость $\tilde{O}\nu\rho.$ Из этого отображения при $\tau=0$ приходим к уравнениям $\nu=g_1(s,0),\ \rho=g_2(s,0).$ Из них ввиду единственности решений $s=h_1\{\nu,0\},\ \ s=h_2\{\rho,0\}$ системы типа (9) относительно (s,τ) и тождеств обращения из (3) имеем уравнение

$$\nu_0(\rho)\equiv\nu=g_1(h_2\{\rho,0\},0)\ :\quad h_2\{\rho,0\}-\ h_1\{\nu,0\}=0 \qquad (29)$$

кривой $\tilde{O}\tilde{P}'$ вида $\tilde{l}_0$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$ Подставив координаты точек $\tilde{P}'\big(g_1(-h_2\{\eta,0\},0),\ \ g_2(-h_2\{\eta,0\},0)\big)$ и $\tilde{O}(0,0)$ в уравнение (29), можно еще раз увидеть, что кривая $\tilde{l}_0$ проходит через них, потому что в силу вторых тождеств обращения из (3)

$$h_2\{\rho,0\}-\ h_1\{\nu,0\}\ =h_2\big\{g_2(-h_2\{\eta,0\},0),0\big\}-h_1\big\{g_1(-h_2\{\eta,0\},0),0\big\}=-h_2\{\eta,0\}+h_2\{\eta,0\}=0.$$

Уравнение (29) выполняется для координат точки $\tilde{O}(0,0),$ так как отрезок OP' действительно соединяет начало координат $O(0,0)$ и точку P' в плоскости $Os\tau$ и уравнение (29) найдено невырожденной заменой типа (9) из уравнения отрезка $OP'.$ Из формул производных обратных функций $(h_i)_t=1/(g_i)_x,$ $i=1,2,$ строгого возрастания функции g_2 и строго убывания функции g_1 с ростом x следует строгое возрастание значений ρ функции (29) вместе с ростом ν в плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$ Непосредственной подстановкой координат точек $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в уравнение (29) можно убедиться в том, что кривая уравнения (29) проходит и через эти точки $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, т. е. кривая $\tilde{l}_0$ уравнения (29) является криволинейным основанием треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ (см. рисунок 1, *б*). Верхняя полуплоскость $Os\tau,\ \tau\geq 0,$ взаимно однозначно отображается заменой типа (9) в часть $h_2\{\rho,0\}\leq h_1\{\nu,0\},\ \nu,\rho\in R,$ плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$

Чтобы найти образ отрезка OQ' из $Os\tau$ в $\tilde{O}\nu\rho$ из замены типа (9) при $s=0,$ выводим уравнения $\nu=g_1(0,\tau),\ \ \rho=g_2(0,\tau)$. Из их единственных решений $\tau=h^{(1)}[0,\nu],\ \ \tau=h^{(2)}[0,\rho]$ системы типа (9) относительно (s,τ) и вторых тождеств обращения из (4) находим уравнение

$$\nu_1(\rho)\equiv\nu=g_1(0,h^{(2)}[0,\rho])\ :\quad h^{(1)}[0,\nu]\ \ -\ \ h^{(2)}[0,\rho]\ =\ 0 \qquad (30)$$

кривой $\tilde{O}\tilde{Q}'$ вида $\tilde{l}_1$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ (см. рисунок 1, *б*). Так же, как и выше для $\tilde{l}_0,$ устанавливается строгое убывание значений ρ функции (30) для $\tilde{l}_1$ с ростом ν в плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$ Кроме того, замена типа (9) взаимно однозначно отображает первую четверть G_∞ плоскости $Os\tau$ на

$$\tilde{G}_\infty=\{(\nu,\rho):\ h_2\{\rho,0\}<\ h_1\{\nu,0\},\ \rho>0;\ h^{(2)}[\rho,0]\leq h^{(1)}[\nu,0],\ \rho\leq 0;\ \ \nu\geq 0\}, \qquad (31)$$

т. е. на эту криволинейную четверть из плоскости $\tilde{O}\nu\rho.$

Аналогично характеристике MQ, которая при замене типа (9) становится прямой уравнения $\nu=\xi$, характеристика $Q'P'$ уравнения $g_1(s,\tau)=g_1(-h_2\{g_2(x,t),0\},0)$, проходящая через точку P', будет тоже некоторой прямой уравнения $\nu=\nu^{(0)}$, также параллельной оси $\tilde{O}\rho$. Для вычисления значения $\nu^{(0)}$ воспользуемся равнобедренностью треугольника $\Delta Q'PP'$. Следовательно, в плоскости $Os\tau$ для точек Q' оси $O\tau$ штриховую характеристику $Q'P'$ из семейства $g_1(s,\tau)=C_1$ можно искать в форме $-g_2(-s,\tau)=C_2$, $C_2\in R$, и характеристики из семейства $g_2(s,\tau)=C_2$ – в форме $-g_1(-s,\tau)=C_1$, $C_1\in R$. Если воспользоваться этой взаимной заменяемостью характеристик $\nu=g_1(s,\tau)=-g_2(-s,\tau)=C_2$, $C_2\in R$, то можно найти уравнение образа $\tilde{Q}'\tilde{P}'$ кривой $Q'P'$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$. По координатам точки $Q'\left(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\right)$ вычисляем значение не зависящей от s и τ постоянной $C_2=-g_2\left(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\right)=-g_2(x,t)$ ввиду первого тождества обращения из (4) при $i=2$. В итоге, имеем равносильные уравнения

$$\nu=g_1(s,\tau)=-g_2(x,t)=-\eta,\quad g_2(-s,\tau)=g_2(x,t)$$

заштрихованной кривой $Q'P'$, проходящей также через точку $P'\left(-h_2\{g_2(x,t),0\},0\right)$, так как $g_2(h_2\{g_2(x,t),0\},0)=g_2(x,t)$ по первому тождеству обращения (3) при $i=2$. Таким образом, кривую $Q'P'$ указанного выше уравнения $g_1(s,\tau)=g_1(-h_2\{g_2(x,t),0\},0)$ первого семейства характеристик со своей постоянной C_1 действительно можно записать в виде уравнения $g_2(-s,\tau)=g_2(x,t)$ второго семейства характеристик из (8). Из первого уравнения после замены типа (9) в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ для образа $\tilde{Q}'\tilde{P}'$ имеем уравнение прямой $\tilde{l}_2$:

$$\nu_2(\rho)\equiv\nu^{(0)}=-\eta,\quad \eta\le\rho\le g_2\left(-h_2\{\eta,0\},0\right)=\rho^{(0)}. \tag{32}$$

На основе установленной выше взаимной заменяемости семейств характеристик $g_i(s,\tau)=C_i$, $i=1,2,$ на оси $O\tau$ отсюда вытекают реальные значения координат точек

$$\tilde{P}'\left(-\eta,g_2(-h_2\{\eta,0\},0)\right),\ \tilde{Q}'(-\eta,\eta). \tag{33}$$

Между прочим, после замены типа (9) критическая характеристика $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ из первой четверти плоскости G_∞ взаимно однозначно переходит в полуось $\rho=0,\nu\ge0$ плоскости $\tilde{O}\nu\rho$, так как эта характеристика проходит через начало координат $O(0,0)$ при $s=\tau=0$, которой в замене типа (9) соответствует начало координат $\tilde{O}(0,0)$ в $\tilde{O}\nu\rho$, и ось $\tilde{O}\nu$ перпендикулярна оси $\tilde{O}\rho$.

В равенствах (24) проводим замену типа (9) и имеем интегральное представление $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta OP'Q'}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta+\frac{1}{2}\iint\limits_{OQMQ'}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{34}$$

где $J(\xi,\eta)=1/J(x,t)\ne0$ – невырожденный якобиан обратного к преобразованию типа (9) и ввиду (25)–(28), (33) точки $\tilde{O}(0,0)$, $\tilde{M}(\xi,\eta)$, $\tilde{P}\left(g_1\left(h_2\{\eta,0\},0\right),\eta\right)$, $\tilde{Q}\left(\xi,g_2\left(h_1\{\xi,0\},0\right)\right)$, $\tilde{P}'\left(-\eta,g_2(-h_2\{\eta,0\},0)\right)$, $\tilde{Q}'(-\eta,\eta)$ из $\tilde{O}\nu\rho$ являются соответственно образами точек $O(0,0)$, $M(x,t)$, $P\left(h_2\{g_2(x,t),0\},0\right)$, $Q\left(h_1\{g_1(x,t),0\},0\right)$, $P'\left(-h_2\{g_2(x,t),0\},0\right)$, $Q'\left(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\right)$ из $Os\tau$.

В равенстве (34) используем уравнение (14), двойные интегралы выражаем через повторные интегралы и получаем сумму повторных интегралов

$$\tilde{F}(\xi,\eta)=\int\limits_{\eta}^{0}\int\limits_{\nu_1(\rho)}^{-\eta}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu d\rho+\int\limits_{0}^{g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}\int\limits_{\nu_0(\rho)}^{-\eta}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu d\rho+$$

$$+\int_{\eta}^{0}\int_{\nu_1(\rho)}^{\xi}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu d\rho+\int_{0}^{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}\int_{\nu_0(\rho)}^{\xi}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu d\rho. \qquad (35)$$

Применяя уравнения (29), (30), (32) линий $\tilde{l}_0,\ \tilde{l}_1,\ \tilde{l}_2,$ берем производные и исследуем гладкость

$$\frac{\partial\tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=\int_{\eta}^{0}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\xi}d\rho+\int_{\nu_0(\rho)|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}}^{\xi}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}\frac{\partial g_2(h_1\{\xi,0\},0)}{\partial\xi}+$$

$$+\int_{0}^{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\xi}d\rho=\tilde{u}^{(0)}_{\xi}(\xi,\rho)\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}-\tilde{u}^{(0)}_{\nu}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=\xi}\in C^1(\tilde{G}_0),$$

$$\frac{\partial\tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=-\int_{\nu_1(\rho)|_{\rho=\eta}}^{-\eta}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=\eta}-\int_{\eta}^{0}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=-\eta}d\rho+$$

$$+\int_{\nu_0(\rho)|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}}^{-\eta}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}\frac{\partial g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}{\partial\eta}-\int_{0}^{g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=-\eta}d\rho-$$

$$-\int_{\nu_1(\rho)|_{\rho=\eta}}^{\xi}\tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=\eta}=\tilde{u}^{(0)}_{\nu}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=-\eta}-\tilde{u}^{(0)}_{\nu}\left(\nu,g_2(-h_2\{\eta,0\},0)\right)\Big|_{\nu=-\eta}+$$

$$+\tilde{u}^{(0)}_{\eta}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=-\eta}-\tilde{u}^{(0)}_{\eta}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=\xi}\in C^1(\tilde{G}_0),$$

так как $\tilde{u}^{(0)}\in C^2(\tilde{G}_0)$ согласно (15) и

$$\nu_0(\rho)\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}=g_1(h_2\{\rho,0\},0)\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}=\xi,$$

$$\nu_0(\rho)\Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}=g_1(h_2\{\rho,0\},0)\Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta,0\},0)}=g_1(-h_2\{\eta,0\},0)=-\eta,$$

$$\nu_1(\eta)=g_1(0,h^{(2)}[0,\rho])\Big|_{\rho=\eta}=g_1(0,h^{(2)}[0,\eta])=-\eta$$

в силу (29), (30), (33), первого при $i=1$ и второго при $i=2$ тождеств обращения (3). Отметим, что непрерывная дифференцируемость первых производных $\partial\tilde{F}/\partial\xi$ и $\partial\tilde{F}/\partial\eta$ на $\tilde{G}_0$ сохраняется даже тогда, когда в них соответственно при множителях $\partial g_2(h_1\{\xi,0\},0)/\partial\xi$ и $\partial g_2(-h_2\{\eta,0\},0)/\partial\eta$ интегралы не обращались бы в ноль. Она сохраняется даже без применения реальных координат (33) точек $\tilde{P}'$ и $\tilde{Q}'$ благодаря тому, что в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ образом отрезка $Q'P'$ характеристики служит отрезок $\tilde{Q}'\tilde{P}'$ некоторой прямой, параллельный оси $\tilde{O}\rho$.

Таким образом, отсюда вытекает дважды непрерывная дифференцируемость функции $\tilde{F}$ вида (34) на $\tilde{G}_0$ и, следовательно, одновременно дважды непрерывная дифференцируемость функции F на G_0. Поэтому в любой внутренней точке $(x^{(0)},t^{(0)})\in G_+$, в которую взаимно и однозначно отображение типа (9) переводит точку $(\xi^{(0)},\eta^{(0)})\in\tilde{G}_0$, функция F вида (6) не нуждается в корректировке. Итак, мы уже доказали, что действительно $F\in C^2(G_+)$.

На основании вышеизложенного заключаем, что при каждом $n=1,2,...$ верны тождества

$$(F_n)_{tt}(x,t)-a^2(x,t)(F_n)_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)(F_n)_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)(F_n)_x(x,t)=f_n(x,t)$$

для всех $(x,t)\in G_0$. В них переходим к пределу $f_n\to f$ при $n\to\infty$ равномерно на каждом компакте $\bar{G}_0$, содержащем произвольную точку $(x^{(0)},t^{(0)})\in G_+$, и получаем тождество

$$F_{tt}(x,t)-a^2(x,t)F_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)F_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)F_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in G_+, \tag{36}$$

которое означает, что функция F вида (6) поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) в G_+. Здесь $\bar{G}_0$ – замыкание криволинейных четырехугольников G_0 в плоскости Oxt.

Обращаем внимание читателя на то, что после того как мы убедились в дважды непрерывной дифференцируемости функции $F\in C^2(G_+)$, мы могли не подставлять F в уравнение (1) на G_+. В силу $F\in C^2(G_+)$ вместо уравнения (1) можно было подставить $\tilde{F}$ в канонический вид (14), потому что для $F\in C^2(G_+)$ уравнение (1) на G_+ эквивалентно своему каноническому виду (14). Действительно, мы можем продифференцировать по η и ξ функцию $\tilde{F}$ из (34) в виде двойного повторного интеграла

$$\tilde{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{1}{2}\int\limits_{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}^{\eta}\ \int\limits_{g_1(h_2\{\rho,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{f}(\nu,\rho)}{\tilde{a}(\nu,\rho)}J(\nu,\rho)\,d\nu d\rho \tag{37}$$

и получить правую часть уравнения (14)

$$\frac{\partial^2\tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial\eta\partial\xi}=\frac{1}{2}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)J(x,t)},\ (\xi,\eta)\in\tilde{G}_+, \tag{38}$$

на образе $\tilde{G}_+=\{(\nu,\rho):h^{(2)}[\rho,0]\le h^{(1)}[\nu,0],\ \rho\le 0;\ \nu\ge 0\}$ множества G_+ при замене типа (9).

Теперь для выявления дополнительных необходимых требований гладкости (7) на правую часть f к непрерывности $f\in C(G_\infty)$ вычисляем производную от F из (6) вдоль характеристик $g_i(x,t)=C_i$ из (8), т. е. вдоль векторов $\vec{\sigma}_i=\{(g_i)_t,-(g_i)_x\}$, $i=1,2$. Ортогональные к ним $\left(\overrightarrow{grad}\,g_i(x,t),\vec{\sigma}_i\right)=(g_i)_x(g_i)_t-(g_i)_t(g_i)_x=0$, $(x,t)\in G_\infty$, градиенты $\overrightarrow{grad}\,g_i(x,t)=\{(g_i)_x,(g_i)_t\}$, $i=1,2$, направлены вдоль нормалей к этим характеристикам. В силу вторых тождеств обращения из (3) первые частные производные от функции F равны

$$F_t=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}-\frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right]d\tau,$$

$$F_x=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}-\frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right]d\tau.$$

Производными вдоль характеристик (8) от дважды непрерывно дифференцируемой функции $F\in C^2(G_+)$ являются непрерывно дифференцируемые функции

$$(g_1)_tF_x-(g_1)_xF_t=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\left[(g_1)_x\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}-(g_1)_t\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}J(x,t)\int_0^t\frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2}\,d\tau\in C^1(G_+), \tag{39}$$

$$(g_2)_tF_x-(g_2)_xF_t=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\left[(g_2)_t\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}-(g_2)_x\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}J(x,t)\int_0^t\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial g_1}\,d\tau\ \in C^1(G_+), \tag{40}$$

так как для частных производных от функций $h_i = h_i\{g_i(x,t), \tau\}$ справедливы соотношения

$$(g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial t} - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial x} =$$

$$= (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}(g_i)_t - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}(g_i)_x \equiv 0,\ i = 1, 2.$$

$$(g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} = [(g_1)_x(g_2)_t - (g_1)_t(g_2)_x\,]\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2} = J(x,t)\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2},$$

$$(g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} =$$

$$= [(g_1)_x(g_2)_t - (g_1)_t(g_2)_x\,]\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial g_1} = J(x,t)\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial g_1}.$$

Отсюда следует справедливость включений (7), так как якобиан $J(x,t) \neq 0$ в G_∞ и $J \in C^1(G_\infty)$. Необходимость интегральных требований гладкости (7) доказана.

Достаточность непрерывности $f \in C(G_\infty)$ и требований гладкости (7) для $F \in C^2(G_+)$ вытекает из непрерывной дифференцируемости в G_+ первых частных производных F_t и F_x от функции F как решений линейной системы алгебраических уравнений (39), (40) с непрерывно дифференцируемыми правыми частями этой системы благодаря (7) [2]. Выше методом корректировки пробных решений нами доказано, что функция $F \in C^2(G_+)$ вида (6) поточечно удовлетворяет уравнению (1) в G_+. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В статье [1] методом корректировки показано, что соответствующая функция F типа (6) при $a_1 \neq a_2$ не является классическим решением волнового уравнения $u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$ с постоянными коэффициентами $a_1, a_2 > 0$ в G_+, так как F не дважды непрерывно дифференцируема в G_+ при $a_1 \neq a_2$ для функций $f = f(x,t) \in C(G_\infty)$, зависящих от x и t. Эта функция F при $a_1 = a_2 = a = const > 0$ равна нашей функции (6). В учебнике [5, с. 83] для того, чтобы не брать значения правой части $f(x,t)$ для точек $x < 0$, в которых она не задана, в формуле (31) даже кусочно-гладкого решения первой смешанной задачи для интегрального уравнения (29) колебаний полуограниченной струны взят модуль нижнего предела интегрирования $|x - a(t-\tau)|$ в аналогичном интеграле F. В статье [1] для классических решений простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны и, в частности, этого же интегрального уравнения (29) из [5] вместо модуля этого нижнего предела интегрирования автором берется модуль от x подынтегральной функции $f(|x|,t)$ и доказывается дважды непрерывная дифференцируемость соответствующего интеграла F в первой четверти плоскости G_∞. Очень важно отметить, что хотя в [1] функция F при $a_1 \neq a_2$ не нуждается в корректировке на G_-, так как $F \in C^2(G_-)$, проводится корректировка этой функции F на G_- в теореме 3 из [1] с помощью предела интегрирования $t_0(x) = (k-1)(x - a_1 t)/(a_1 + a_2)$, $k \geq 1$, для построения различных общих интегралов из дважды непрерывно дифференцируемых решений указанного выше волнового уравнения при $a_1 \neq a_2$ в первой четверти плоскости G_∞.

Следствие 1. *Пусть коэффициент* $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. *Если правая часть* f *уравнения (1) не зависит от* x *или* t *в* G_∞, *то непрерывности* f *соответственно по* t *или* x *необходимо и достаточно для того, чтобы функция* F *из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в* G_+.

Доказательство. Необходимость непрерывности $f \in C[0,+\infty[$ по t или x этого следствия строго обоснована выше. Фактически остается показать **достаточность** этой непрерывности $f \in C[0,+\infty[$ по t или x тем, что в этом случае соответствующие интегральные требования гладкости (7) автоматически выполняются.

Если правая часть $f = f(t)$ не зависит от x, то функция F из (6) принимает вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\tau)}{a(|s|,\tau)}\, ds\, d\tau. \tag{41}$$

Согласно обоснованию включения $F \in C^2(G_+)$ в начале доказательства теоремы 1 функция (41) является решением уравнения (1) в G_+. Для всех $f \in C[0,+\infty[$ ее первые частные производные очевидно непрерывно дифференцируемы в G_+ :

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \right] d\tau \in C^1(G_+),$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \right] d\tau \in C^1(G_+),$$

где мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (3).

Если правая часть $f = f(x)$ не зависит от t, то функция F из (6) приобретает вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|)}{a(|s|,\tau)}\, ds\, d\tau. \tag{42}$$

Также, как в начале доказательства следствия 1, из теоремы 1 имеем, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема $F \in C^2(G_+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в G_+. Проверим ее дважды непрерывную дифференцируемость для $f \in C[0,+\infty[$. Первая частная производная по t от (42) равна функции

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

в которой мы также применили вторые тождества обращения из (3). Когда здесь мы перейдем к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z = h_2\{g_2(x,t),\tau\}$, тогда мы получим уже очевидное непрерывно дифференцируемое на G_+ представление этой производной

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_{h_1\{g_1(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau = h^{(1)}[y,g_1(x,t)]} dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|z|)}{a(|z|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau = h^{(2)}[z,g_2(x,t)]} dz \in C^1(G_+),$$

в котором мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (3) и тождествами $\tau = h^{(1)}[y, g_1(x,t)]$, $\tau = h^{(2)}[z, g_2(x,t)]$ благодаря вторым тождествам обращения из (5).

Для всех $f \in C[0,+\infty[$ первой частной производной по x от (42) является функция

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

в которой мы использовали вторые тождества обращения из (3). После перехода здесь к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z = h_2\{g_2(x,t),\tau\}$ эта частная производная приобретает очевидное для $f \in C[0,+\infty[$ непрерывно дифференцируемое на G_+ представление

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_{h_1\{g_1(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau = h^{(1)}[y,g_1(x,t)]} dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{x}\left[\frac{f(|z|)}{a(|z|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial \tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]}dz\in C^1(G_+),$$

где мы применили те же самые тождества, что и для частной производной от F по t.

Итак, достаточность $f\in C[0,+\infty[$ для $F\in C^2(G_+)$ проверена. Факт выполнения уравнения (1) в G_+ для функции F вида (6) с непрерывной и зависящей только от t или x правой частью $f\in C[0,+\infty[$ очевидно следует из теоремы 1. Следствие 1 доказано.

Теорема 2. *Пусть коэффициент* $a(x,t)\ge a_0>0,\ (x,t)\in G_-,\ a\in C^2(G_-)$. *Функция (6) является классическим решением неоднородного уравнения (1) в* G_- *тогда и только тогда, когда его правая часть* $f\in C(G_-)$ *и*

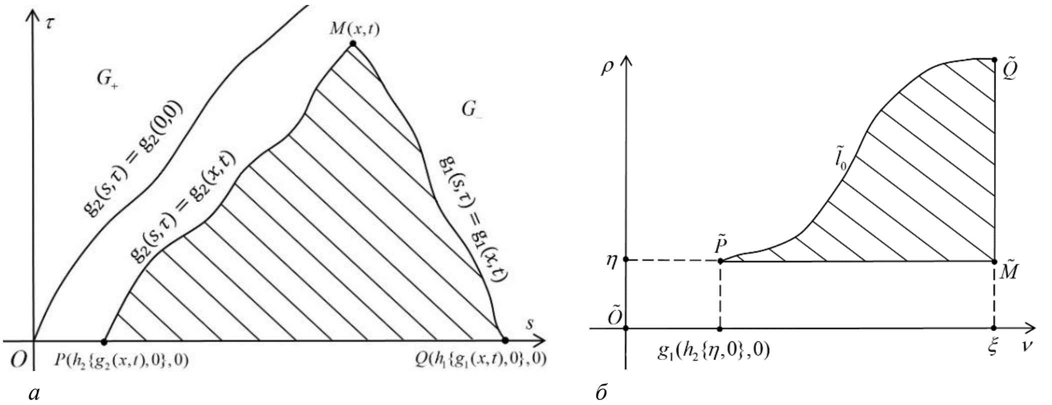
$$H_-^{(i)}(x,t)\equiv\int\limits_0^t\frac{f(h_i\{g_i(x,t),\tau\},\tau)}{a(h_i\{g_i(x,t),\tau\},\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\,d\tau\in C^1(G_-),\quad i=1,2. \tag{43}$$

Доказательство. Достаточность. Из гладкости $f\in C(G_-)$ и (43), конечно, следует гладкость $F\in C^2(G_-)$. Остается показать то, что функция F вида (6) поточечно удовлетворяет уравнению (1) на G_-. Поскольку в функции F вида (6) на G_- под интегралом у правой части f модуль $|x|=x,$ то замена переменных (9) дважды непрерывно дифференцируема на $G_-,$ и поэтому уравнение (1) эквивалентно каноническому виду (14) на G_-. Значит, можно не проверять дважды непрерывную дифференцируемость функции F на G_- и не подставлять ее в уравнение (1) на G_-, т. е. не проверять $F\in C^2(G_-)$ и вместо уравнения (1) на G_- подставить функцию $\tilde F$ из (37) в его канонический вид (14) на образе $\tilde G_-=\{(\nu,\rho):\ h_2\{\rho,0\}<h_1\{\nu,0\},\ \rho>0,\nu>0\}$ множества G_- после замены переменных типа (9) так же, как выше в (38) на G_+.

Но можно еще убедиться в дважды непрерывной дифференцируемости F на G_- так же, как в доказательстве теоремы 1. Точки $(x^{(0)},t^{(0)})\in G_-$ – внутренние точки ограниченных криволинейных четырехугольников $G_0\subset G_\infty$ со сторонами характеристиками (8). В плоскости $Os\tau$ функция (6) выражается через двойной интеграл по криволинейному характеристическому треугольнику $\Delta\,MPQ$ с вершиной $M(x,t)\in G_-$ и вершинами его основания $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big),\ Q\big(h_1\{g_1(x,t),0\},0\big)$ (рисунок 2, *а*), который в плоскости $\tilde O\nu\rho$ с помощью замены типа (9), где уже $\eta=g_2(x,t)>g_2(0,0),$ приводится к двойному интегралу

$$F(x,t)\ =\ \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta MPQ}\frac{f(x,t)}{a(x,t)}dxdt\ =\ \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta\tilde M\tilde P\tilde Q}\frac{\tilde f(\xi,\eta)}{\tilde a(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta=\tilde F(\xi,\eta) \tag{44}$$

по треугольнику $\Delta\,\tilde M\tilde P\tilde Q$ с вершиной $\tilde M(\xi,\eta)\in\tilde G_0$ и вершинами $\tilde P\big(g_1(h_2\{\eta,0\},0),\eta\big),\ \tilde Q\big(\xi,g_2(h_1\{\xi,0\},0)\big)$ его криволинейного основания $\tilde P\tilde Q$ на кривой $\tilde l_0$ из (29) (рисунок 2, *б*).



***а* – для функции F ; *б* – для функции $\tilde F$**

Рисунок 2. – Область интегрирования на множестве G_-

Двойной интеграл из равенства (44) выражаем через уравнение (14) и повторный интеграл

$$\tilde{F}(\xi,\eta) = \iint\limits_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\,d\nu d\rho = \int\limits_{\eta}^{g_2(h_1\{\xi,0\},0)} \int\limits_{\nu_0(\rho)}^{\xi} \tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\,d\nu d\rho,$$

дифференцируем один раз функцию $\tilde{F}$ по ξ и η и находим первые частные производные:

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \int\limits_{\nu_0(\rho)|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)}}^{\xi} \tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)} \frac{\partial g_2(h_1\{\xi,0\},0)}{\partial \xi} + \int\limits_{\eta}^{g_2(h_1\{\xi,0\},0)} \tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\xi} d\rho =$$

$$= \tilde{u}^{(0)}_{\nu}\big(\nu, g_2(h_1\{\xi,0\},0)\big)\Big|_{\nu=\xi} - \tilde{u}^{(0)}_{\xi}(\xi,\eta) \in C^1(\tilde{G}_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial \eta} = -\int\limits_{\nu_0(\rho)|_{\rho=\eta}}^{\xi} \tilde{u}^{(0)}_{\nu\rho}(\nu,\rho)d\nu\Big|_{\rho=\eta} = \tilde{u}^{(0)}_{\rho}\big(g_1(h_2\{\eta,0\},0),\rho\big)\Big|_{\rho=\eta} - \tilde{u}^{(0)}_{\eta}(\xi,\eta) \in C^1(\tilde{G}_0),$$

так как $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_0)$ согласно (15) и $\nu_0(\rho)\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)} = g_1(h_2\{\rho,0\},0)\Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi,0\},0)} = \xi$ согласно первому при $i=1$ и второму при $i=2$ тождествам обращения (3).

Отсюда следует дважды непрерывная дифференцируемость функции $\tilde{F}$ на $\tilde{G}_0$ и, значит, одновременно дважды непрерывная дифференцируемость функции F на G_0. Итак, для точек $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_-$ тем более не нужна корректировка функции F. Далее так же, как в доказательстве теоремы 1, можно еще вывести тождество (36) на G_-.

Необходимость. Непрерывность $f \in C(G_-)$ вытекает из уравнения (1), которому удовлетворяет F в G_-. Гладкости (43) можно вывести так же, как при доказательстве теоремы 1, из дважды непрерывной дифференцируемости функции $F \in C^2(G_-)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть коэффициент* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_-$, $a \in C^2(G_-)$. *Если правая часть* f *уравнения (1) не зависит от* x *или* t *в* G_-, *то непрерывности* f *соответственно по* t *или* x *необходимо и достаточно для того, чтобы функция* F *из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в* G_-.

Доказательство этого следствия аналогично доказательству следствия 1.

Замечание 2. Для вывода критериев корректности смешанных (начально-краевых) задач для неоднородных телеграфных уравнений в первой четверти плоскости G_∞ утверждения теорем 1 и 2 и их следствий 1 и 2 было целесообразно записать одной теоремой (без предположения непрерывности $f \in C(G_\infty)$) и одним следствием (см. следствие 5). Они продублированы нами ради прозрачности и подробности изложения доказательств с помощью разных рисунков 1 и 2.

Теоремы 1 и 2 объединяет одна общая

Теорема 3. *Пусть коэффициент* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. *Функция (6) является классическим решением неоднородного уравнения (1) в* G_∞ *тогда и только тогда, когда его правая часть*

$$f \in C(G_\infty),\;\; H_i(x,t) \equiv \int\limits_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\, d\tau \in C^1(G_\infty),\quad i=1,2. \tag{45}$$

Доказательство. Достаточность. Требования (45) обеспечивают то, что функция F вида (6) представляет собой классическое решение уравнения (1) в G_+ и G_-, ввиду теорем 1 и 2, а также и на критической характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$, так как требования (45) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость F в окрестности этой характеристики.

Необходимость. Если функция F вида (6) является классическим решением уравнения (1) в G_∞, то $F \in C^2(G_\infty)$ и, следовательно, справедливы требования гладкости (45).

Для явного решения смешанных (начально-краевых) задач для модельного телеграфного уравнения (1) методом характеристик [5] важно знать его общий интеграл.

Следствие 3. *Пусть выполняются* $a(x,t)\geq a_0>0,\ (x,t)\in G_\infty,\ a\in C^2(G_\infty)$ *и (45) для* f. *Тогда общим интегралом уравнения (1) в первой четверти плоскости* G_∞ *во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых в* G_∞*) решений являются функции*

$$u(x,t)=\tilde{f}_1(g_1(x,t))+\tilde{f}_2(g_2(x,t))+F(x,t),\quad (x,t)\in G_\infty, \tag{46}$$

где $\tilde{f}_1$ *и* $\tilde{f}_2$ *– любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных* ξ,η *вида*

$$\tilde{f}_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(g_2(0,0)),\ \tilde{f}_2(\eta)=f_2(\eta)-f_2(g_2(0,0)). \tag{47}$$

Доказательство. Для непрерывной правой части $f\in C(G_\infty)$ интегральные требования гладкости (45) из следствия 3 очевидно равносильны одновременно интегральным требованиям гладкости (7) из теоремы 1, (43) из теоремы 2 и требованию непрерывности первых частных производных от функций $H_+^{(i)},\ H_-^{(i)}, i=1,2,$ в некоторой окрестности характеристики $g_2(x,t)=g_2(0,0)$. Ясно, что для $f\in C(G_\infty)$ в (6) непрерывно дифференцируема функция $F\in C^1(G_\infty)$ и, значит, функции $H_+^{(i)},\ H_-^{(i)}, i=1,2,$ непрерывны на характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ так же, как на характеристике $x=at$ в кандидатской диссертации[2].

Поэтому согласно теоремам 1 и 2 предположения следствия 3 гарантируют то, что действительно функция $F\in C^2(G_\infty)$ и поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) в G_∞. Тогда формулы (46), (47) представляют собой множество всех классических решений уравнения (1) на G_∞, в которых классические решения (47) однородного уравнения (1) получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [6] для упрощения процедуры решений систем дифференциальных уравнений. Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Пусть коэффициент* $a(x,t)\geq a_0>0,\ (x,t)\in G_\infty,\ a\in C^2(G_\infty)$. *Если функция* f *зависит от* x *и* t, *то для* $f\in C(G_\infty)$ *требование принадлежности интегралов из (45) пространству* $C^1(G_\infty)$ *эквивалентно требованию их принадлежности пространству* $C^{(1,0)}(G_\infty)$ *или* $C^{(0,1)}(G_\infty)$. *Здесь* $C^{(1,0)}(G_\infty)$, $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *– соответственно пространства непрерывно дифференцируемых по* x *и* t *и непрерывных по* t *и* x *функций на* G_∞.

Доказательство. Непрерывно дифференцируемые правые части $f\in C^1(G_\infty)$ очевидно удовлетворяют интегральным требованиям из (45). Заменами $s_i=h_i\{g_i(x,t),\tau\}$ переменной интегрирования τ, например, интегралы из (45) приводятся к интегралам

$$H_i(x,t)=\int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\,d\tau=$$

$$=\int_{h_i\{g_i(x,t),0\}}^{x}\left[\frac{f(|s_i|,\tau)}{a(|s_i|,\tau)}\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\left(\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial \tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(i)}[s_i,\,g_i(x,t)]} ds_i\in C^1(G_\infty), i=1,2, \tag{48}$$

которые для $f\in C^1(G_\infty)$ действительно непрерывно дифференцируемы по x и t в G_∞, потому что в последних интегралах (48) под модулем $|s_i|$ отсутствуют переменные x и t. В противном случае модуль дал бы разрыв производных. Здесь мы применили вторые тождества обращения из (3) и равенства $\tau=h^{(i)}[s_i,g_i(x,t)],\ i=1,2,$ ввиду вторых тождеств из (5).

Сначала для более гладких $f\in C^1(G_\infty)$ берем производную от (45)

$$\frac{\partial H_i(x,t)}{\partial t}=\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),t\}|,t)}{a(|h_i\{g_i(x,t),t\}|,t)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),t\}}{\partial g_i}+\int_0^t\left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\right]_t' d\tau=$$

[2] Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,t)}\,\frac{1}{(g_i)_x} + (-1)^{i+1}a(x,t)\int\limits_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\right]'_x d\tau =$$

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,t)}\,\frac{1}{(g_i(x,t))_x} + (-1)^{i+1}a(x,t)\frac{\partial H_i(x,t)}{\partial x},\ i=1,2, \tag{49}$$

в силу вторых тождеств обращения из (3), формулы производной обратной функции, (11) и

$$\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial h_i}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}(g_i)_t =$$

$$= (-1)^{i+1}a(x,t)\,\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial h_i}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}(g_i)_x = (-1)^{i+1}a(x,t)\,\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial t\partial g_i} = \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i^2}(g_i(x,t))_t =$$

$$= (-1)^{i+1}a(x,t)\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i^2}(g_i(x,t))_x = (-1)^{i+1}a(x,t)\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial x\partial g_i},\ i=1,2.$$

Затем два равенства первых и самых последних частей из (49), не содержащих явных производных от функции f по x и t в G_∞, распространяются предельным переходом по f с более гладких $f\in C^1(G_\infty)$ на непрерывные функции $f\in C(G_\infty)$, удовлетворяющие (45) в G_∞. Эти полученные после предельного перехода два равенства (49) подтверждают справедливость утверждения следствия 4 на G_∞.

Отметим, что в равенствах (49) наши значения индекса $i=1$ и $i=2$ соответствуют значениям индекса $i=2$ и $i=1$ в замечании 2.1 диссертации Е. Н. Новикова при $a(x,t)=a=const>0$ [3] из-за взаимно обратного соответствия характеристик. Следствие 4 доказано.

Следствие 5. *Пусть коэффициент* $a(x,t)\ge a_0>0,\ (x,t)\in G_\infty,\ a\in C^2(G_\infty)$. *Если правая часть* f *уравнения (1) не зависит от* x *или* t *в* G_∞, *то непрерывности* f *соответственно по* t *или* x *необходимо и достаточно для того, чтобы функция* F *из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в* G_∞.

Доказательство сводится к применению следствий 1 и 2.

Под интегралом в виде множителей функции f гладкий невырожденный коэффициент $a\in C^2(G_\infty)$ и функции $g_i,h_i\in C^2(G_\infty),\ i=1,2,$ не препятствуют требованию (45) на $f\in C(G_\infty)$.

Замечание 3 [2]. Для коэффициента $a(x,t)\ge a_0>0,\ (x,t)\in G_\infty,\ a\in C^2(G_\infty)$ интегральные требования гладкости из (45) на непрерывную $f\in C(G_\infty)$ равносильны требованиям

$$\int\limits_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\ d\tau\in C^1(G_\infty),\quad i=1,2.$$

Заключение. Найден критерий дважды непрерывной дифференцируемости решения F вида (6) неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости G_∞. Он состоит из требования непрерывности правой части $f\in C(G_\infty)$ уравнения (1) и двух интегральных требований гладкости (45) в G_∞. Установлено, что если правая часть f не зависит от x или t в G_∞, то непрерывности f соответственно по t или x необходимо и достаточно для того, чтобы функция F из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_∞. Построен общий интеграл (46), (47) из дважды непрерывно

[3] Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

дифференцируемых функций для явного решения различных смешанных (начально-граничных) задач для модельного телеграфного уравнения (1) в G_∞.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф22КИ-001 от 05 ноября 2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
2. Ломовцев, Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38. – DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-18-38.
3. Бриш Н. И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. / Н. И. Бриш, Н. И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 1017–1030.
4. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 333 с.
5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
6. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korrektirovki probnogo resheniya obshchego volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoi chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami na polupryamoy [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. *Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics]*, (1), 18–38. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-18-38. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Brish, N. I., & Yurchuk, N. I. (1971). Zadacha Gursa dlya abstraktnykh lineinykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka [The Goursat problem for abstract second-order linear differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*, *7*(6), 1017–1030. (In Russ.).
4. Sobolev, S. L. (1988). *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of functional analysis in mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
5. Tikhonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (2004). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [The equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka.
6. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhaunaga University], 3*(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 27.06.2022

SMOOTHNESS CRITERION FOR A PARTICULAR CLASSICAL SOLUTION OF AN INHOMOGENEOUS MODEL TELEGRAPH EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE

F. LOMOVTSEV
(Belarusian State University, Minsk)

The smoothness criterion is derived on the right-hand side f *for classical solution* F *of the equation* $u_{tt}(x,t)-a^2(x,t)u_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=]0,+\infty]\times]0,+\infty],$ *at variable rate* $a(x,t)$ *in the first quarter of the plane* $\dot{G}_\infty$*. The smoothness criterion consists of the necessary and sufficient smoothness requirements for the right-hand side of this model telegraph equation. The necessary smoothness requirements on* f *are justified by the correction method of test solutions proposed earlier by the author of this article. This method indicated a doubly continuous differentiability of the function* F *without correcting it.*

Therefore, the derivatives along two families of implicit characteristics of this equation give the necessary smoothness on f. *From here it is easy to deduce their sufficiency for the doubly continuous differentiability of* F. *When* f *depends only on* x *or* t, *then this smoothness criterion is equivalent to continuity* f, *respectively, over* x *or* t. *For the equation, a general integral is constructed with a smoothness criterion of its right-hand side* f.

Keywords: *model telegraph equation, variable rate, implicit characteristics, correction method, classical solution, smoothness criterion.*