УДК 517.983+517.444 DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123

ДВА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматриваются два двумерных интегральных преобразования со специальными функциями одного типа в ядрах. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что они являются частными случаями двумерного G*-преобразования. На основании теории* G*-преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций в области* $R^2_{++}=R^1_+\times R^1_+$. *Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов.*

Ключевые слова: *двумерное интегральное* G*-преобразование, G-функция Мейера, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматриваются двумерные интегральные преобразования

$$\left(\mathrm{G}_{1,0;0,1} f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^b\int\limits_0^\infty \mathrm{t}^b \exp\left(-(\mathrm{x\,t})\right) f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.1}$$

$$\left(\mathrm{G}_{1,0;1,1} f\right)(\mathrm{x})=\frac{1}{\Gamma(\omega+1)}\int\limits_0^\infty (\mathrm{x\,t})^\sigma(1-\mathrm{x\,t})^\omega f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\quad (\mathrm{x}>0) \tag{1.2}$$

и двумерное G-преобразование [1–4]

$$(\mathrm{G}\, f)(\mathrm{x})=\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.3}$$

где (см., например, [1–6; 7, §28.4]) $\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R^2$; $\mathrm{t}=(t_1,t_2)\in R^2$ – векторы, R^2 – Евклидово двумерное пространство; $\mathrm{x}>\mathrm{t}$ означает $x_1>t_1$, $x_2>t_2$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int\limits_0^\infty :=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty$; $N=\{1,2,...\}$ – пространство натуральных чисел, $N_0=N\cup\{0\}$, $N_0^2=N_0\times N_0$; $R^2_+=R^1_+\times R^1_+=\{\mathrm{x}\in R^2,\ \mathrm{x}>0\}$; C^2 – двумерное пространство комплексных чисел $\mathrm{z}=(z_1,z_2)$, $z_1,z_2\in C$; $b=(b_1,b_2)\in C^2$; $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in C^2$; $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in C^2$.

$\mathrm{m}=(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{m}_1=\mathrm{m}_2$; $\mathrm{n}=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{n}_1=\mathrm{n}_2$;

$\mathrm{p}=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{p}_1=\mathrm{p}_2$; $\mathrm{q}=(\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{q}_1=\mathrm{q}_2$; $(0\leq\mathrm{m}\leq\mathrm{q},\ 0\leq\mathrm{n}\leq\mathrm{p})$;

$\mathbf{a}_i=(\mathrm{a}_{i_1},\mathrm{a}_{i_2})$, $1\leq i\leq\mathrm{p}$, $\mathrm{a}_{i_1},\mathrm{a}_{i_2}\in C$ $(1\leq i_1\leq\mathrm{p}_1, 1\leq i_2\leq\mathrm{p}_2)$;

$\mathbf{b}_j=(\mathrm{b}_{j_1},\mathrm{b}_{j_2})$, $1\leq j\leq\mathrm{q}$, $\mathrm{b}_{j_1},\mathrm{b}_{j_2}\in C$ $(1\leq j_1\leq\mathrm{q}_1, 1\leq j_2\leq q_2)$;

$k=(k_1,k_2)\in N_0^2=N_0\times N_0$ $(k_1\in N_0, k_2\in N_0)$ – индекс с $k!=k_1!k_2!$ и $|k|=k_1+k_2$; для $l=(l_1,l_2)\in R^2_+$ $D^l=\dfrac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}(\partial x_2)^{l_2}}$; $d\,\mathrm{t}=d\,\mathrm{t}_1\cdot d\,t_2$; $f(\mathbf{t})=(\mathrm{t}_1,\,t_2)$; функции в ядрах преобразований (1.1) и (1.2) представляют собой следующие произведения соответственно:

$$\mathrm{x}^b\,\mathrm{t}^b\exp(-\mathrm{x\,t})=\prod_{i=1}^2(x_it_i)^{b_i}\exp(-x_it_i);\quad (\mathrm{x\,t})^\sigma(1-\mathrm{x\,t})^\omega=\prod_{i=1}^2(x_it_i)^{\sigma_i}(1-x_it_i)^{\sigma_i};$$

$\mathrm{G}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]$ – функция вида [1–4]

$$\mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]=\prod_{k=1}^{2}G_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[x_k t_k\left|\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right],$$

является произведением *G*-функций Мейера $G_{p,q}^{m,n}[z]$ [8, гл. 1].

G-функцией Мейера порядка (m, n, p, q), где $0\le m\le q, 0\le n\le p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds, z\ne 0, \tag{1.4}$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right|s\right]=\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right|s\right]=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}. \tag{1.5}$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s=-b_j-k,\quad j=1,2,...,m,$ $k=0,1,2,...,$ слева, а полюса $s=1-a_j+k, j=1,2,...,n, k=0,1,2,...$ – справа, пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией *G*-функции (1.4) можно ознакомиться, например, в [8, гл. 6].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1–6; 9]. Мы рассматриваем еще два класса интегральных преобразований вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, $\bar{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$, $\bar{2}=(2,2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2)$ на R_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}}<\infty$, где

$$\|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}}=\left\{\int_{R_+^1}x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left[\int_{R_+^1}x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1,x_2)|^2dx_1\right]dx_2\right\}^{1/2}<\infty .$$

Используя технику преобразования Меллина, показываем, что преобразования (1.1) и (1.2) являются частными случаями двумерного G-преобразования (1.3). На основании теории G-преобразования, построенной в [1], мы исследуем свойства рассматриваемых интегральных преобразований в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов в [8].

2. Предварительные сведения. Двумерное преобразование Меллина функции $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2)$, $x_1>0,\ x_2>0,$ определяется формулой (см., например, [1–6; 9; 10])

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})=f^*(\mathbf{s})=\int_{R_+^2}f(\mathrm{t})\mathrm{t}^{\mathrm{s}-1}d\,\mathrm{t}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{s}=(s_1,s_2), s_j\in C\ (j=1,2)$.

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R_+^2$ дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}\mathrm{g})(\mathrm{x})=\mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{s})](\mathrm{x})\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\,\mathrm{g}(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ \gamma_j=\mathrm{Re}(s_j)\ (\mathrm{j}=1,2).$$

В [1] получили формулу преобразования Меллина (2.1) от G -преобразования (1.3)

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{G}\,f)(\mathbf{s})=\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathbf{s}), \tag{2.2}$$

где функция $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$ является произведением функций вида (1.5)

$$\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})\equiv\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right]=\prod_{k=1}^{2}\mathcal{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right|s_k\right].$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$ [1–6; 9] назовем множество векторов $\bar{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$ таких, что $\alpha_1<1-\nu_1<\beta_1$, $\alpha_2<1-\nu_2<\beta_2$ и функции вида (1.5) $\mathcal{G}_{p_1,q_1}^{m_1,n_1}(s_1)$, $\mathcal{G}_{p_2,q_2}^{m_2,n_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1)=1-\nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2)=1-\nu_2$ соответственно.

Нам понадобятся: гамма-функция $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty x^{z-1}e^{-z}dx,\quad \mathrm{Re}(z)>0\,, \tag{2.3}$$

бета-функция

$$\mathrm{B}(z,\eta)=\int\limits_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\eta-1}dx,\quad \mathrm{Re}(z)>0,\quad \mathrm{Re}(\eta)>0\,, \tag{2.4}$$

которая выражается через гамма-функцию (2.3) по формуле

$$\mathrm{B}(z,\eta)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\eta)}{\Gamma(z+\eta)} \tag{2.5}$$

(см., например, [7, формулы (1.54), (1.68), (1.69)]).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$-теорию $\mathrm{G}_{1,0;0,1}$- и $\mathrm{G}_{1,0;1,1}$-преобразований, нам понадобятся следующие постоянные [1, формулы (3.3)–(3.7)]:

$$\alpha_1=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\mathrm{Re}(b_{j_1})\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0,\end{cases}\qquad \beta_1=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_1\le n_1}\left[\mathrm{Re}(a_{i_1})\right], & n_1>0,\\ \infty, & n_1=0;\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\mathrm{Re}(b_{j_2})\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0,\end{cases},\qquad \beta_2=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_2\le n_2}\left[\mathrm{Re}(a_{i_2})\right], & n_2>0,\\ \infty, & n_2=0;\end{cases} \tag{2.7}$$

$$a_1^*=2(m_1+n_1)-p_1-q_1,\ a_2^*=2(m_2-n_2)-p_2-q_2\,; \tag{2.8}$$

$$\Delta_1=q_1-p_1, \Delta_2=q_2-p_2; \tag{2.9}$$

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_1}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_1}+\frac{p_1-q_1}{2},\quad \mu_2=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_2}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_2}+\frac{p_2-q_2}{2}. \tag{2.10}$$

Через $[X,Y]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

3. $\mathbf{G_{1,0;0,1}}$- и $\mathbf{G_{1,0;1,1}}$-преобразования как G-преобразование. Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $\mathrm{G}_{1,0;0,1}$-преобразованию (1.1), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.3) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$(\mathfrak{M}\mathrm{G}_{1,0;01}f)(\mathrm{s})=\int\limits_0^\infty \mathrm{x}^{\mathrm{s}-1}d\,\mathrm{x}\int\limits_0^\infty(\mathrm{x}\,\mathrm{t})^b\exp\left(-\mathrm{x}\,\mathrm{t}\right)f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}=$$

$$=\int\limits_0^\infty \mathrm{t}^{(1-\mathrm{s})-1}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\int\limits_0^\infty(\mathrm{x}\,\mathrm{t})^{b+\mathrm{s}-1}\exp\left(-\mathrm{x}\,\mathrm{t}\right)d(\mathrm{x}\,\mathrm{t})=\Gamma(b+\mathrm{s})(\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s})=\bar{\mathcal{G}}_{0,1}^{1,0}\left[\left.\begin{matrix}\text{——}\\ b\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s})\,.$$

Таким образом, имеем

$$(\mathfrak{M}\mathrm{G}_{1,0;01}f)(\mathrm{s})=\bar{\mathcal{G}}_{0,1}^{1,0}\left[\left.\begin{matrix}\text{——}\\ b\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s})\,. \tag{3.1}$$

Из (2.2) и (3.1) следует представление преобразования (1.1) $G_{1,0;0,1} f$ в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,0;0,1} f)(x) = \int_0^\infty G_{0,1}^{1,0}\left[xt \middle| \begin{matrix} \overline{} \\ b \end{matrix} \right] f(t)dt \quad (x > 0). \tag{3.2}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.1):

$$m_1 = m_2 = 1;\, n_1 = n_2 = 0; \quad p_1 = p_2 = 0;\, q_1 = q_2 = 1;\, \alpha_1 = -\operatorname{Re}(b_1),\, \alpha_2 = -\operatorname{Re}(b_2),\ \beta_1 = \beta_2 = \infty;$$

$$a_1^* = a_2^* = 1;\ \Delta_1 = \Delta_2 = 1;\ \mu_1 = \operatorname{Re}(b_1) - \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \operatorname{Re}(b_2) - \frac{1}{2}.$$

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $G_{1,0;1,1}$-преобразованию (1.2), далее последовательно меняем порядок интегрирования, во внутреннем интеграле вводим новые переменные $x = \frac{\tau}{\tau - 1}$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ и используем формулы (2.4), (2.5), с учетом (1.5) окончательно получаем

$$(\mathfrak{M} G_{1,0;11} f)(s) = \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty (xt)^\sigma (1 - xt)^\omega f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^\infty t^{-s} f(t) dt \int_0^\infty (xt)^{\sigma+s-1} (1 - xt)^\omega d(xt) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^\infty t^{(1-s)-1} f(t) dt \int_0^1 \left(\frac{\tau t}{\tau - 1} \right)^{\sigma+s-1} \left(1 - \frac{\tau t}{\tau - 1} \right)^{(\omega+1)-1} d\left(\frac{\tau t}{\tau - 1} \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\sigma + s)}{\Gamma(\sigma + \omega + s + 1)} (\mathfrak{M} f)(1 - s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,1}^{1,0} \left[\begin{matrix} \sigma + \omega + 1 \\ \sigma \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(1 - s).$$

Таким образом, получили

$$(\mathfrak{M} G_{1,0;11} f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,1}^{1,0} \left[\begin{matrix} \sigma + \omega + 1 \\ \sigma \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(1 - s). \tag{3.3}$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает представление преобразования (1.2) $G_{1,0;1,1} f$ в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,0;1,1} f)(x) = \int_0^\infty G_{1,1}^{1,0}\left[xt \middle| \begin{matrix} \sigma + \omega + 1 \\ \sigma \end{matrix} \right] f(t)dt \quad (x > 0). \tag{3.4}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.2):

$$m_1 = m_2 = 1;\, n_1 = n_2 = 0; \quad p_1 = p_2 = 1;\, q_1 = q_2 = 1;\, \alpha_1 = -\operatorname{Re}(\sigma_1),\, \alpha_2 = -\operatorname{Re}(\sigma_2),\ \beta_1 = \beta_2 = \infty;$$

$$a_1^* = a_2^* = 0;\ \Delta_1 = \Delta_2 = 0;\ \mu_1 = -\operatorname{Re}(\omega_1) - 1, \quad \mu_2 = -\operatorname{Re}(\omega_2) - 1.$$

4. $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ -теория $G_{1,0;0,1}$-преобразования. В следующей теореме представлена $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ -теория преобразования $G_{1,0;0,1} f$ (1.1).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$-\infty < \nu_1 < 1 + \min[\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_2)],\ -\infty < \nu_2 < 1 + \min[\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_2)],\ \nu_1 = \nu_2, \tag{4.1}$$

$$a_1^* = 1,\ a_2^* = 1. \tag{4.2}$$

Верны следующие утверждения:

A. Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}_{1,0;0,1} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$ *такое, что равенство (3.1) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \bar{\nu}$.

B. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})\left(\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, g\right)(\mathrm{x})d\,\mathrm{x} = \int_0^\infty \left(\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f\right)(\mathrm{x})g(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}.$$

C. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\, \lambda_1) \in C^2$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{\nu}$, *преобразование* $\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f$ *(1.1) представимо в виде*

$$(\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{1,2}^{1,1}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}\overline{}\\ b, -\bar{\lambda}-1\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t},$$

а при $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{\nu}$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f)(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{1,2}^{2,0}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}\overline{}\\ -\bar{\lambda}-1, b\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}.$$

D. Преобразование $\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют (4.1) и выполняются условия (4.2), а также преобразования* $\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}_{1,0;0,1}\, f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}}$ *равенством (3.1), то* $\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f = \tilde{\mathrm{G}}_{1,0;0,1}\, f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}}$.

E. Если выполняются условия (4.2), то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* $\mathrm{G}_{1,0;0,1}\, f$ *дается формулами (1.1) и (3.2).*

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.1), из результатов в [1, теорема 1; 8, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

5. $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ **-теория $\mathbf{G_{1,0;1,1}}$-преобразования.** В следующей теореме представлена $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$-теория преобразования $\mathrm{G}_{1,0;1,1}\, f$ (1.2).

Теорема 5.1. *Пусть*

$$-\infty < \nu_1 < 1 + \min[\mathrm{Re}(\sigma_1), \mathrm{Re}(\sigma_2)],\; -\infty < \nu_2 < 1 + \min[\mathrm{Re}(\sigma_1), \mathrm{Re}(\sigma_2)],\; \nu_1 = \nu_2, \tag{5.1}$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \quad \mathrm{Re}(\omega_1) + 1 > 0, \quad \mathrm{Re}(\omega_2) + 1 > 0. \tag{5.2}$$

Верны следующие утверждения:

A. Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}_{1,0;1,1} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$ *такое, что равенство (3.3) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \bar{\nu}$.

B. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *,то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})\left(\mathrm{G}_{1,0;1,1}\, g\right)(\mathrm{x})d\,\mathrm{x} = \int_0^\infty \left(\mathrm{G}_{1,0;1,1}\, f\right)(\mathrm{x})g(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}.$$

C. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\, \lambda_1) \in C^2$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{\nu}$, *преобразование (1.2) представимо в виде*

$$(\mathrm{G}_{1,0;1,1}\, f)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,2}^{1,1}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}-\bar{\lambda}, \sigma+\omega+1\\ \sigma, -\bar{\lambda}-1\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t},$$

а при $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{\nu}$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}_{1,0;1,1}\, f)(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,2}^{2,0}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}\sigma+\omega+1, -\bar{\lambda}\\ -\bar{\lambda}-1, \sigma\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}.$$

D. Преобразование $\mathrm{G}_{1,0;1,1} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\bar{\nu}}$ *удовлетворяют (5.1) и выполняются условия (5.2), а также преобразования* $\mathrm{G}_{1,0;1,1} f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}_{1,0;0,1} f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\bar{\bar{\nu}},\bar{2}}$ *равенством (3.3), то* $\mathrm{G}_{1,0;1,1} f = \tilde{\mathrm{G}}_{1,0;1,1} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\bar{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

E. Если выполняются условия (5.2), то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* $\mathrm{G}_{1,0;1,1} f$ *дается формулами (1.2) и (3.4).*

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.3), из результатов в [1, теорема 1; 8, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

Заключение. В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1.1) и (1.2) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получены аналоги формулы интегрирования по частям. Для таких преобразований установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович, М. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4(32). – С. 131–136.
2. Папкович, М. В. Многомерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в весовых пространствах суммируемых функций / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // Уфимская осенняя математическая школа–2020 : сб. тез. междунар. мат. конф., Уфа, 11–14 нояб. 2020 г. / М-во науки и высш. образования Рос. Федер., Башкир. гос. ун-т, Ин-т математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа ; отв. ред. З. Ю. Фазуллин. – Уфа, 2020. – С. 142–144.
3. Скоромник, О. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций / О. В. Скоромник, М. В. Папкович // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
4. Ситник, С. М. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи / С. М. Ситник, О. В. Скоромник, М. В. Папкович // АМАДЕ-2021 : сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск : ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116.
5. Ситник, С. М. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре / С. М. Ситник, О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
6. Sitnik, S. M. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland : Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
7. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688с.
8. Kilbas, A. A. H-Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
9. Sitnik, S. M. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik, S. A. Shlapakov // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1170–1178.
10. Theory and applications of fractional differential equations / North–Holland Mathematics Studies ; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – Vol. 204. – 523 p.

REFERENCES

1. Papkovich, M. V., & Skoromnik, O. V. (2019). Dvumernoe integral'noe preobrazovanie s G-funktsiei Meiera v yadre v prostranstve summiruemykh funktsii [Two-Dimentional Integral Transform With the Meijer G-Function in the Kernel in the Space of Summable Functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, *4*(32), 131–136. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Papkovich, M. V., & Skoromnik O. V. (2020). Mnogomernoe integral'noe preobrazovanie s G-funktsiei Meiera v yadre v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional integral transformation with Meijer's G-function in the kernel in the weighted spaces of summable functions]. In Z. Yu. Fazullin (Eds.) *Ufimskaya osennyaya matematicheskaya shkola–2020*: sb. tezisov *[Ufa Autumn Mathematical School–2020]* (142–144). – Ufa: Bashkir State University. (In Russ.)
3. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaŷnaga universiteta [Bulletin of VSU]*, *1*(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Sitnik S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ikh chastnye sluchai [Multidimensional modified G- and H-transforms and their special cases]. In *AMADE-2021*: sb. trudov (104–116). Minsk: IVTs Minfina. (In Russ., abstr. in Engl.).

5. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2019). Mnogomernoe obshchee integral'noe preobrazovanie so spetsial'nymi funktsiyami v yadre [Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of VSU]*, *3*(104), 18–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. In *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer).
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika.
8. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications.* London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
9. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. *Lobachevskii J. of Mathematics*, *43*(6), 1170–1178.
10. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North–Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.

Поступила 14.11.2022

TWO SPECIAL CASES OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL G-TRANSFORMATION IN THE WEIGHTED SPACES OF SUMMABLE FUNCTIONS

S. SITNIK
(Belgorod State National Research University "BelGU");
O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two-dimensional integral transformations with special functions of the same type in kernels are considered. Using the Mellin transformation technique, it is shown that they are special cases of a two-dimensional G-transformation. Based on the theory of the G-transformation, the properties of the considered integral transformations in the weighted spaces of integrable functions in the domain $R^2_{++} = R^1_+ \times R^1_+$ *are investigated. The results obtained generalize the data obtained for the corresponding one-dimensional analogues.*

Keywords: *two-dimensional integral* G-*transform, Meijer G-function, two-dimensional Mellin transform, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*