УДК 514

ТЕНЗОР ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);
С.В. ЧЕРНОВ
(ОАО Конструкторское бюро «Дисплей», Витебск)

Приведено доказательство инвариантности энергии системы ранга n, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей, то есть доказано, что при невырожденном преобразовании системы координат обобщенная энергия, заданная в виде линейной комбинации функции Лагранжа (от координат и их производных до n-го порядка) и суммы произведений обобщенных импульсов различных порядков (от первого до n-го включительно) на производные соответствующего порядка от координат, остается неизменной.

Ключевые слова: *уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение. Фундаментальные законы сохранения справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения используются в механике и теоретической физике. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Между основными уравнениями динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти уравнение движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены, то есть чего в природе произойти не может.

В начале XX века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (или, как говорят, инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии.

Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–8, 12–15]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат-времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13].

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Лемма 1. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$, здесь $S:(x) \to (\bar{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}), \quad k \ge 1,$$

где $f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})$ — некоторая гладкая функция

$$\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}, \quad \overset{(s)}{\bar{x}} = (\overset{(s)1}{\bar{x}}, ..., \overset{(s)m}{\bar{x}}), \quad \overset{(s)j}{\bar{x}} = D_t^s \bar{x}^j, \quad s = \overline{0, k-1}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = 1$, тогда

$$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^j$$ – справедливо. В случае $k = 2$ получим

$$D_t^2 x^i(\bar{x}) = x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1 \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}}\Big) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1 \Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) \dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \dot{\bar{x}}^j = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^l \dot{\bar{x}}^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\bar{x}}^j + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}), \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^l \dot{\bar{x}}^j,$$ проверено для $k = 2$.

Индуктивный переход. Пусть $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})$, тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^l\Big) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}), \quad 0 + 1 \le s + 1 \le k - 1 + 1 = k$$

$$f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^l\Big) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}}.$$ Лемма доказана.

Теорема 1 [11, с. 193, 13, с. 121, лемма 3]. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$, $S:(\bar{x}) \to (x)$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p} \left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), \ C_k^p = \dfrac{k!}{p! \cdot (k-p)!}, \ k! = \prod_{j=1}^{k} j, \ k \ge p; \\ 0, \ k < p. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение теоремы в более общем виде приведено в [11].

Ввиду важности этого утверждения приведем независимое от ссылки доказательство **теоремы 1** для двух параметров k и p.

При $p > k \geq 0$ **по лемме 1** имеем $x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x}),\ k \geq 1,$

поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})\Big) = 0 .$$

При $k \geq p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$. Используя **лемму 1,** имеем

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{x} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \overset{(k)l}{x}}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big) + \frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-1)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j},\ \delta_j^l = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases} - \text{символ Кронекера.}$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \geq p.$ Введем функции

$$F_k^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x}) = x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x}), \qquad \overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}$$

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{x}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}\Big) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}\,\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}} \frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{x}}\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}\,\partial \overset{(s)l}{x}} \overset{(s+1)l}{x}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}}\delta_p^{s+1}\delta_j^l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}\,\partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(s+1)l}{x}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} .$$

По предположению индукции $\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} = \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{x}} = C_k^p D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)$. Значит,

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}\,\partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(s+1)l}{x}\Big) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} = C_k^p\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big) D_t \overset{(s)l}{x}\Big) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) =$$

$$C_k^p\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}}\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(k-p)}{x})\Big) D_t \overset{(s)l}{x}\Big) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) =$$

$$= C_k^p D_t\Big(D_t^{k-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) = (C_k^p + C_k^{p-1}) D_t^{k+1-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) .$$

В последней строке было использовано свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_k^p + C_k^{p-1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!}(1+\frac{p}{k-p+1}) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p .$$

Теорема доказана.

Определение 1. Система функций $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$, где

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}), \ k = \overline{0,n}, \ i = \overline{1,m},$$

называется обобщенным импульсом ранга *n* для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (*x*) базы X_m расслоения $T^p X_m$, здесь $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называется *k*-й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по *i*-й координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по *i*-й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Теорема 2 [10, с. 127, теорема 1; 13, С. 119, теорема 2] (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$). При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$ в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ обобщенные импульсы *k*-порядка $\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ в системе координат ($\bar{x}$) преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Импульс порядка k в системе координат (x) в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ имеет вид

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}), \ k = 0,n \ \ i, j = \overline{1,m}.$$

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x,..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция

$$H = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_t^k x^i =$$

$$= -L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D_t^k x^i \quad \overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i,$$

где D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по времени *t*, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования для функции Лагранжа $L: T^p X_m \to \Re$, а также энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

В дальнейшем будет доказано, что при $p \le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$, а при

$p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Замечание 1. Максимальный порядок производной по *t* порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l+l+k = 2\cdot l + k$.

Если $l+k > p$, то $\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l+k \le p$ (в частности, $k \le p$).

Кроме того,

$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l+k \le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$

$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p)-k$, $p^i_{k,n}$ зависит от производных порядка

$\max(2\min(p,n)-k, p) = b(n,p,k)$, $b(n,n=n,k) = b(n,p=n,k) = \max(2\min(n,n)-k,p)$.

Для каждого слагаемого вида $p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x} = p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по *i*-й координате – справедливо $\max(\max(2\min(p,n)-k,p),k) = \max(2\min(p,n)-k,p,k)$. Энергия системы

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$$

будет зависеть от максимального порядка производной

$$\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p,k) = a(n,p) = \max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k).$$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}\dots,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x}\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})D_t^k x^i == -L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)D_t^k x^i.$$

Рассмотрим следующую постановку задачи.

Пусть $L: T^n X_m \to \Re$. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ – локальная запись функции L и импульсов *k*-го порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

Проведем исследование закона преобразования энергии

$$H = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}D_t^k x^i,$$

где $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$ – производная порядка *k* при замене локальной системы координат $x = x(\bar{x})$ в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$;

$x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$, $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$, $\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}\dots, \overset{(n)}{\bar{x}}) = L(x(\bar{x}), D_t x(\bar{x}), \dots, D_t^n x(\bar{x}))$;

$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)$ – импульс *k*-го порядка.

Основные теоремы.

Теорема 3 [9, с. 127, теорема 2; 13, с. 120, лемма 2] (дифференциальная связь импульсов k и (k – 1)-го порядков). Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция Лагранжа, здесь $L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^i_{k,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x})$ и $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x})$ – локальная запись функции L и импульсов k и (k – 1)-го порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^P X_m$. Тогда выполняется следующее соотношение:

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}),$$

где $$p^i_{k,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$$ – импульс k-го порядка;

$$p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$$ - импульс (k – 1)-го порядка.

Теорема 4. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2,..., \bar{x}_m)$, $S: (\bar{x}) \to (x)$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^P X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D^k_t x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C^{s-1}_{k-1} D^{k-s}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(s)j}{\bar{x}}, \; C^s_l = \frac{l!}{s! \cdot (l-s)!}, \; l! = \prod_{k=1}^{l} k, \; l \ge s. \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство проведем математической индукцией по порядку производной k. Пусть база индукции k = 1, тогда

$$x = (x^1, x^2,..., x^m), \; \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2,..., \bar{x}^m).$$

По определению считаем $C^0_0 = 1$, в этом случае формула (1) принимает вид

$$D^1_t x^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} C^{1-1}_{1-1} D^{1-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j. \tag{2}$$

Рассмотрим при k = 2, имеем

$$D^2_t x^i = D^1_t \dot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D^1_t \dot{\bar{x}}^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} C^{1-1}_{2-1} D^{2-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(1)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} C^{2-1}_{2-1} D^{2-2}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(2)j}{\bar{x}}. \tag{3}$$

Затем при k = 3

$$D^3_t x^i = D^1_t \ddot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^{m} D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \ddot{\bar{x}}^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^{m} D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \dot{\bar{x}}^j + 2\sum_{j=1}^{m} D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dddot{\bar{x}}^j =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-1} D_t^{3-1} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-2} D_t^{3-2} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(2)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} C_{3-1}^{3-3} D_t^{3-3} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(3)j}{\bar{x}} =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \left(C_{3-1}^{3-1} D_t^{3-1} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + C_{3-1}^{3-2} D_t^{3-2} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(2)j}{\bar{x}} + C_{3-1}^{3-3} D_t^{3-3} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(3)j}{\bar{x}}\right). \qquad (4)$$

Наконец, при $k = 4$

$$D_t^4 x^i = D_t^1 \dddot{x}^i = D_t^1 \left(\sum_{j=1}^{m} D_t^2 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dot{\bar{x}}^j + 2\sum_{j=1}^{m} D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \dddot{\bar{x}}^j\right) =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \left(D_t^3 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dot{\bar{x}}^j + D_t^2 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \ddot{\bar{x}}^j + 2\left(D_t^2 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \ddot{\bar{x}}^j + D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dddot{\bar{x}}^j\right) + D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dddot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddddot{\bar{x}}^j\right) =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \left(D_t^3 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dot{\bar{x}}^j + 3D_t^2 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \ddot{\bar{x}}^j + 3D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \dddot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddddot{\bar{x}}^j\right) =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \left(C_{4-1}^{4-1} D_t^{4-1} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + C_{4-1}^{4-2} D_t^{4-2} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(2)j}{\bar{x}} + C_{4-1}^{4-3} D_t^{4-3} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(3)j}{\bar{x}} + C_{4-1}^{4-4} D_t^{4-4} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(4)j}{\bar{x}}\right). \qquad (5)$$

Формулы (2)–(5) являются частными случаями формулы (1) при $k = 1, 2, 3, 4$ соответственно.
По предположению математической индукции имеем

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}}.$$

Докажем, что $D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k+1} C_{k}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}}$.

Доказательство:

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = D_t \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t \left(D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} +$$
$$+\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}. \qquad (6)$$

В правой части формулы (6) сделаем замену переменных:

$$s = g-1, g = s+1, s-1 = g-2, k-s = k+1-g,$$

тогда получим

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(g)j}{\bar{x}}. \qquad (7)$$

В формуле (7) меняем индекс суммирования g на s:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(g)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k+1} C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k} C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{1-1} D_t^{k} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{k+1-2} D_t^{k+1-(k+1)} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(k+1)j}{\bar{x}} = \qquad (8)$$

$$= \sum_{s=2}^{k} (C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2}) D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{0} D_t^{k} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{k-1} D_t^{0} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(k+1)j}{\bar{x}} .$$

Поскольку

$$C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2} = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-1-(s-1))!} + \frac{(k-1)!}{(s-2)!(k-1-(s-2))!} = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} + \frac{(k-1)!}{(s-2)!(k+1-s)!} =$$

$$= \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} + \frac{(k-1)!}{\frac{(s-1)!}{(s-1)}(k-s)!(k+1-s)} = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\left(1 + \frac{s-1}{k+1-s}\right) =$$

$$= \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\left(\frac{k+1-s+s-1}{k+1-s}\right) = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\frac{k}{k+1-s} = \frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}, \text{ то}$$

$$C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2} = C_k^{s-1} = \frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!} . \qquad (9)$$

Учтём преобразование (9) в правой части выражения (8):

$$\sum_{s=2}^{k} (C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2}) D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{0} D_t^{k} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + C_{k-1}^{k-1} D_t^{0} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(k+1)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{s=2}^{k} C_k^{s-1} D_t^{k+1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} + D_t^{k} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(1)j}{\bar{x}} + D_t^{0} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(k+1)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} .$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Используя замену переменных $s_1 = s-1,\ s = s_1 + 1,\ k-s = k-1-s_1,\ k-1 \geq s_1 \geq 0$, в последнем результате, получим как следствие формулу (1)

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}},\ C_l^s = \frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l! = \prod_{k=1}^{l} k,\ l \geq s ,$$

которая может быть представлена в виде

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} D_t^{k-1-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}} .$$

По теореме о сложной функции выполняется равенство

$$\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}} \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}(x)}{x^{(l+k)i}} ,$$

тогда имеем в разных системах координат

$$\bar H_n(\bar L,\bar x)=\bar H(\bar L,\bar x,n)=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar p^{\,i}_{k,n}\overset{(k)i}{\bar x}=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar p^{\,i}_{k,n}\overset{(k)i}{\bar x}=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^1 D_t^l\Big(\frac{\partial\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(l+k)i}{\bar x}}\Big)\overset{(k)i}{\bar x}\,. \tag{10}$$

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x(\bar x),\dot x(\bar x)\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar x))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x(\bar x),\dot x(\bar x)\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar x))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{k,n}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x(\bar x),D_t x(\bar x),\ldots,D_t^n x(\bar x))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^1 D_t^l\Big(\frac{\partial L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}\frac{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\overset{(k)i}{x}\,. \tag{11}$$

По **теореме 1** выполнено равенство

$$\frac{\partial\overset{(p)j}{\bar x}(x,\dot x\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}=\begin{cases}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\dfrac{\partial\overset{j}{\bar x}(x)}{\partial x^i}\Big),\ C_p^{l+k}=\dfrac{p!}{(l+k)!\cdot(p-(l+k))!},\ g!=\prod\limits_{k=1}^{g}k,\ p\ge l+k;\\[2ex] 0,\ p<l+k.\end{cases} \tag{12}$$

По **теореме 4** справедливо

$$\overset{(k)i}{x}(\bar x)=\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial\bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x},\ C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l!=\prod_{k=1}^{l}k,\ l\ge s\,. \tag{13}$$

Учитывая равенства (12) и (13) и подставляя их в формулу (11), получим

$$-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}\frac{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\frac{\partial\overset{j}{\bar x}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)\Big(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial\bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x}\Big)\,. \tag{14}$$

Применяя к произведению $f\cdot g$ формулу Лейбница, имеем

$$D_t^a(fg)=\sum_{b=0}^{a}C_a^b D_t^b(f)D_t^{a-b}(g)\ ,\ C_a^b=\frac{a!}{b!(a-b)!},\ b!=\prod_{c=1}^{b}c\,,\ a\ge b\,.$$

$$-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\ldots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(p)j}{\bar x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\frac{\partial\overset{j}{\bar x}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)\cdot\Big(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial\bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=0}^{l}(-1)^{l}C_{p}^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_{l}^{a}D_{t}^{a}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big)D_{t}^{p-(l+k)+l-a}\Big(\Big(\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}}\Big)(\bar{x})\Big)D_{t}^{k-s}\Big(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}}\Big)\overset{(s)g}{\bar{x}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=0}^{l}(-1)^{l}C_{p}^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_{l}^{a}D_{t}^{a}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big)D_{t}^{p-k-a}\Big(\Big(\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}}\Big)(\bar{x})\Big)D_{t}^{k-s}\Big(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}}\Big)\overset{(s)g}{\bar{x}}\qquad(15)$$

Одной из основных задач данной работы является нахождение связи между соотношениями (10) и (14), причем выражение (14) эквивалентно выражению (15).

Теорема 5 (о дифференциальной связи энергии ранга n с импульсами 0-го порядка ранга n). Пусть $L:T^{n}X_{m}\to\Re$ $L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$ – локальная запись функции L и импульсов k-го порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^{n}X_{m}$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ и

$$H_{n}(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})D_{t}^{k}x^{i}-$$

энергия системы, состояние которой описывается функцией $L:T^{n}X_{m}\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^{n}X_{m}$. Тогда справедливо

$$D_{t}(H(L,x,n)+L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x}))=D_{t}(-L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}+L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x}))=$$

$$=D_{t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}\Big)=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p_{0,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i},\qquad(16)$$

где $p_{0,n}^{i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D_{t}^{l}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+k)i}}\Big)$ – импульс 0-го порядка $\dot{x}^{i}=\overset{(1)i}{x}=D_{t}x^{i}$.

Доказательство:

$$D_{t}(H(L,x,n)+L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x}))=D_{t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})D_{t}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})D_{t}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}.\qquad(17)$$

Во второй части формулы (15) сделаем замену $l=k+1$, $k=l-1$, $n+1\geq l\geq 2$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{l=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p_{l-1,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-(l-1))}{x})\overset{(l)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_{t}(p_{k,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p_{k-1,n}^{i}(x,\ldots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{k,n}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x} + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k-1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n,n}(x,\ldots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x} +$$

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{k,n}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k-1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,..,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n,n}(x,..,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x})) + p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x}\,. \quad (18)$$

Используем **теорему 3** $D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x})) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x})$ и поэтому

$$D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x})) + p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\,. \quad (19)$$

При $k=1$

$$D_t(p^i_{1,n}(x,..,\overset{(2n-1)}{x})) + p^i_{1-1,n}(x,..,\overset{(2n-(1-1))}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}}\,, \quad D_t(p^i_{1,n}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,n}\,, \quad (20)$$

$$p^i_{n,n}(x,..,\overset{(2n-n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+n)i}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\,. \quad (21)$$

Преобразуем выражение (18), учитывая формулы (19)–(21):

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m} p^i_{n,n}(x,\ldots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n}(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})) + p^i_{k-1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\overset{(n+1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t(p^i_{1,n}(x,\ldots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,n}(x,\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\Big)\overset{(1)i}{x} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\overset{(1)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}\overset{(1)i}{x} + \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\overset{(1)i}{x} = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\dot{x}^i\,.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Первая сумма в правой части выражения (16) с использованием замены переменных $k_1 = k-1,\ k = k_1+1,\ n \ge k_1 \ge 0$ может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x},$$

Теорема 6. Обозначим векторы $x=(x^1,x^2,\ldots,x^m)$ и $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^m)$. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$,

$S:(\bar{x})\to(x)$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m $i,k=\overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$ – обратное отображение, тогда верно утверждение

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}=\delta^i_k,\ \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k,\ \delta^k_i=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases} \text{– символ Кронекера.} \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим композицию преобразований $x^i = x^i(\bar{x}^1(x),\bar{x}^2(x),\ldots,\bar{x}^m(x))$. Согласно теореме о сложной функции имеем

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta^i_k=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}.$$

Аналогично доказывается равенство $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$.

Теорема доказана.

Докажем, что каждая из сумм в формуле (16) является геометрическим инвариантом, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (х) в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7 (об инвариантах G_1, G_2). Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ $L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,0}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$ – локальная запись функции L и импульсов 0-го порядка при выборе локальных координат (х) в базе X_m расслоения T^nX_m, $i=\overline{1,m}$. Тогда функции

$$G_1(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}\quad\text{и}\quad G_2(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^i, \tag{23}$$

где $\quad p^i_{0,n}=\sum\limits_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t\Big(\dfrac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\Big)$ – импульс 0-го порядка $\dot{x}^i=\overset{(1)i}{x}=D_tx^i$.

При замене локальных координат (х) в базе X_m расслоения T^nX_m преобразуются как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами, следовательно, имеет место сохранение энергии при замене локальных координат).

Доказательство. По теореме о сложной функции имеем $\dot{x}^i=\overset{(1)i}{x}=D_tx^i(\bar{x})=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k$. По **теореме 2** импульсы 0-го порядка ранга n преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$p^i_0(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}.$$

Подставим это равенство в функционал $G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} p^i_{0,n}\,\dot{x}^i$, получим

$$G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\,\dot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial\bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\Big)\dot{x}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial\bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^k\Big)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^k\Big)\delta^j_k = \sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^j = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}), \qquad (24)$$

где $\delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера.

Для $n = 1$ формула (24) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\dot{\bar{x}}^k}{\partial x^i}\Big)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\dot{\bar{x}}^k}{\partial\dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}D_t\Big(\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\Big)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\Big(D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\Big)\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}D_t(\dot{\bar{x}}^l)\Big) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\ddot{\bar{x}}^l\Big) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l\Big(D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\Big)\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i} + D_t\Big(\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\Big) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\delta^k_l\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\delta^k_l\ddot{\bar{x}}^l\Big) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l\Big(D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x}\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l\,D_t(\delta^k_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}), \qquad (25)$$

где $D_t(\delta^k_l) = 0$, $\delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера.

Теорема доказана.

Отметим, что промежуточные преобразования в формуле (25) являются самостоятельными важными результатами. При выводе последней формулы (25) были применены **теорема 1** и **теорема 6**.

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i} = \delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases} \text{– символ Кронекера;}$$

$$\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i};$$

$$\frac{\partial \dot{x}^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(0)i}{\bar{x}}} = C_1^0 \cdot D_t^{1-0} \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = D_t \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i};$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = \delta_1^0 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 0 .$$

Рассмотрим общий случай

$$G_1(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x}\,\overset{(n+1)}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} \overset{(k)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} .$$

По **теореме 4** получим

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} D_t^{k-1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}},$$

заменяя индекс k на k+1 в последнем операторе, получим аналогичную формулу

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k+1-1} C_{k+1-1}^{s} D_t^{k+1-1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_{k}^{s} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}} .$$

В результате имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right). \quad (26)$$

По **теореме 1** выполнено равенство

$$\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} \frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}{\partial \overset{(k)i}{x}}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \begin{cases} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\dfrac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right),\ C_p^k = \dfrac{p!}{k!\cdot(p-k)!},\ k! = \prod\limits_{g=1}^{k} g,\ p \geq k; \\ 0,\ p < k. \end{cases} \quad (28)$$

Подставим равенство (28) в формулу (27):

$$\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) \quad (29)$$

и полученном результате используем выражение (26):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) \overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{(s+1)j}{x}\Big). \qquad (30)$$

Поскольку $\overset{(s+1)j}{x} = D_t^s(\overset{(1)j}{x}) = D_t^s(\overset{.j}{x})$, $C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x} = C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^s(\overset{(1)j}{x})$, с помощью формулы Лейбница получим

$$D_t^a(fg) = \sum_{b=0}^{a} C_a^b D_t^b(f) D_t^{a-b}(g)\ ,\ C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!},\ b! = \prod_{c=1}^{b} c,\ a \ge b, \text{ следовательно}$$

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{(s+1)j}{x} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) D_t^s(\overset{(1)j}{x}) = D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1(\bar{x}^j)\Big) = D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big) =$$

$$= D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{.j}{x}\Big). \qquad (31)$$

Подставляем полученную формулу (31) в выражение (30):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\overset{(s+1)j}{x}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big). \qquad (32)$$

Так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{kp} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_{kp}$ – дискретный аналог для двойного интеграла при $n \ge p \ge k \ge 0$, то сумму в формуле (32) запишем в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{p}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big) D_t^k\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big). \qquad (33)$$

По формуле Лейбница $\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) = D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})$, поэтому

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}). \quad (34)$$

Преобразуем последнюю сумму в выражении (34):

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}). \quad (35)$$

Снова используем **теорему 6** $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=\delta_j^d$, $\delta_j^d=\begin{cases}1, d=j\\ 0, d\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера. Тогда получим $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}=\overset{(1)j}{\bar{x}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=\overset{(1)j}{\bar{x}}\delta_j^d$, значит

$$D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=D_t^p(\overset{(1)j}{\bar{x}}\delta_j^d). \quad (36)$$

Подставляем полученное выражение (36) в сумму (34):

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p(\overset{(1)j}{\bar{x}}\delta_j^d)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p(\overset{(1)j}{\bar{x}}\delta_j^d)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p(\overset{(1)j}{\bar{x}})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^{p+1}(\bar{x}^j)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\overset{(p+1)j}{\bar{x}}=\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}).$$

Этот результат может быть получен и другим способом:

$$C_p^kC_k^s=\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{s!(k-s)!}=\frac{p!}{k!(p-k)!s!(k-s)!}=\frac{p!}{s!(p-s)!}\frac{(p-s)!}{(k-s)!(p-s-(k-s))!}=C_p^sC_{p-s}^{p-k}, \quad (37)$$

где $C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!}$, $p!=\prod_{c=1}^{p}c$, $p\geq k$.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{\bar{x}})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^s\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{\bar{x}})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\Big(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big). \tag{38}$$

При замене пределов суммирования в выражении (38) было использовано ограничение на порядки $n \ge p \ge k \ge s \ge 0$.

Преобразуем тройную сумму

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\sum_{s=0}^{k} a_{kps} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}\sum_{p=k}^{n} a_{kps} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=0}^{k} a_{kps} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{s=0}^{p}\sum_{k=s}^{p} a_{kps} = \sum_{s=0}^{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{kps} = \sum_{s=0}^{n}\sum_{p=s}^{n}\sum_{k=s}^{p} a_{kps}$$

и в последней сумме с учетом выражения (38) сделаем замену переменных $u = k - s,\ 0 \le u \le k - s$, $p - k = p - s - (k - s) = p - s - u$, затем применим формулу Лейбница:

$$D_t^{p-s}(fg) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^{u} D_t^{u}(f) D_t^{p-s-u}(g)\ ,\ C_{p-s}^{u} = \frac{(p-s)!}{u!(p-s-u)!},\ u! = \prod_{c=1}^{u} c,\ p - s \ge u\ ,$$

а также **теорему 6** $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i} = \delta_j^d$, $\quad \delta_j^d = \begin{cases}1, d = j\\ 0, d \ne j\end{cases}$ – символ Кронекера, получим

$$\sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^{u} D_t^{u}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) D_t^{p-s-u}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big) = D_t^{p-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big) =$$

$$= D_t^{p-s}(\delta_j^d) = \begin{cases}1, d = j\ \ и\ \ p = s\\ 0, d \ne j\ \ или\ \ p \ne s\end{cases} = \delta_j^d \delta_p^s\ ,\quad \delta_p^s = \begin{cases}1, p = s\\ 0, p \ne s\end{cases} - \text{символ Кронекера}\,. \tag{39}$$

Равенство (39) получено на основании того, что

$$\delta_j^d = \begin{cases}1, d = j\\ 0, d \ne j\end{cases} = \mathrm{const}\ \text{и}\ D_t^{p-s}(\mathrm{const}) = \begin{cases}0, p - s > 0,\\ \mathrm{const}, p - s = 0,\end{cases} \tag{40}$$

то есть производная от постоянной равна 0, если ее порядок больше 0, и равна постоянной, если порядок равен 0.

На основании формул (38) и (39) имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\Big(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\Big(\sum_{s=0}^{n} C_p^s \overset{(s+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d \delta_p^s\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^p \overset{(p+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d \delta_p^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} \delta_j^d = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} \delta_j^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} == \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}})\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 8 (инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ – гладкая функция; $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})$, $H_n(L,x)$ – локальная запись функции L, импульсов k-го порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. Следовательно

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot x\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x},$$

где $\bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})$, $\overline{p^j_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x})$, $\bar H_n(\bar L,\bar x)$ – локальная запись функции L, импульсов k-го порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar x)$ в базе X_m расслоения T^nX_m,

$$\bar H_n(\bar L,\bar x)=\bar H(\bar L,\bar x,n)=\bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x})\overset{(k)i}{\bar x}.$$

Тогда $H(L,x,n)=\bar H(\bar L,\bar x,n)$ – энергия системы – тензор 0-го ранга, который не зависит от выбора локальных координат, то есть является инвариантным геометрическим объектом.

Доказательство.

$L(x(\bar x),\dot x(\bar x)\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))=\bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})$ $\quad x=x(\bar x)=S(\bar x)$ – невырожденная замена координат в базе X_m расслоения T^nX_m. Значит

$$D_t(H(L,x,n)-\bar H(\bar L,\bar x,n))=D_t(-L(x,\dot x\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}+\bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x})\overset{(k)i}{\bar x})=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}-\sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x})\overset{(k)i}{\bar x})=$$

$$=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})-D_t(\sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar x})\overset{(k)i}{\bar x}). \tag{41}$$

С учетом **теоремы 5** имеем

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot x,..,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,..,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dot x,..,\overset{(2n)}{x})\overset{.i}{x}=$$

$$=G_1(x,\dot x,..,\overset{(n+1)}{x})-G_2(x,\dot x,..,\overset{(2n)}{x})\cdot D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar x})\overset{(k)i}{\bar x})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial\overset{(k-1)i}{\bar x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}\overline{p^i_{0,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar x})\dot{\bar x}^{l}=$$

$$=\bar G_1(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n)}{\bar x})-\bar G_2(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n)}{\bar x}).$$

$$D_t(H(L,x,n)-\bar H(\bar L,\bar x,n))=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})-D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar x})\overset{(k)i}{x})=$$

$$= G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n+1)}{x}) - G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - (\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})) =$$

$$= G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 - 0 = 0,$$

так как по **теореме 7** (об инвариантах G_1, G_2)

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}), \quad G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}).$$

$$D_t(H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(H(L(x(\bar{x}),\ \dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),\ S(\bar{x}),n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = 0.$$

Равенство выполняется для любой невырожденной замены координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Значит, $H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) \equiv C = \text{const}$ для всех невырожденных замен координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

Рассмотрим тождественное преобразование $x(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \bar{x}$

$$H(L(x(\bar{x}),\ \dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),\ S(\bar{x}),n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = C = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n).$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение **теоремы 8** справедливо и для функций $L: T^p X_m \to \Re,\ \ p \le n$, так как при $p < n$ можно определить функцию $L_1: T^n X_m \to \Re$, которая в любой локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ $L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) \equiv L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})$ для любых $x^{(p+1)},...,\overset{(n)}{x}$. Для функции $L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})$ утверждение **теоремы 8** справедливо. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 9 (инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$ – гладкая функция; $L(x,...,\overset{(p)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ – локальная запись функции L, импульсов *k*-го порядка и энергии ранга *n* соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n}\overset{(k)i}{x},$$

где $\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ – локальная запись функции L, импульсов *k*-го порядка и энергии ранга *n* соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Поскольку $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}\overset{(k)i}{x}}$, тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$.

Замечание 5. Для $n=1$ $\quad p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$,

$$p_1^i(1) = p_{1,1}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2\cdot1-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i},$$

$$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}),$$

где $\quad x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ – невырожденная замена координат.

Для функции энергии произвольного ранга n можно написать

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

Тогда, в частности, для $n = 1$, получим

$$H_1(L,x) = H(L,x,1) = -L(x,\dot{x}) + \sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} p_{1,1}^i \overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k(x)}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k(x)}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^k =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\overline{p_{1,1}^k}\dot{\bar{x}}^k = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},1) = \bar{H}_1(\bar{L},\bar{x}), \qquad (42)$$

где $\quad \delta_k^l = \begin{cases}1, k=l\\ 0, k\neq l\end{cases}$ – символ Кронекера,

то есть энергия порядка $n = 1$ является инвариантом относительно невырожденной замены координат.

В выражении (42) была использована **теорема 1**:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{-(1)i}{x}} = 0 \text{ (так как } 0<1), \quad \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Таким образом, основная **теорема 9** проверена для $n=1$.

Для $n=2$ с невырожденной заменой координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ имеем $L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})$,

$$p_1^i(2) = p_{1,2}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}\right),$$

$$p_2^i(2) = p_{2,2}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+2)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}.$$

$$H_2(L,x)+L(x,\dot x,\ddot x)=H(L,x,2)+L(x,\dot x,\ddot x)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,2}(x,\ldots,\overset{(2\cdot 2-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}((\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-D_t(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}))\dot x^i+$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}\ddot x^i)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}C_2^1D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}))\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-$$

$$-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^j)\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j(D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}+\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(((\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^j+$$

$$+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^j)\delta^k_j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^k+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^k=$$

$$=\bar H(\bar L,\bar x,2)+\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x}),$$

где $D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})=D_t(\delta^k_j)=0$, $\delta^k_j=\begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера.

Таким образом, утверждение **теоремы 9** проверено для случая $n=2$.

Замечание 6. При $p>n$ энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется.

Рассмотрим случай $p=2,\ n=1$ (старший порядок производной выше ранга энергии).

$L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\ddot x(\bar x))=\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})$ с невырожденной заменой $x=x(\bar x)=S(\bar x)$.

$$H_1(L,x)=H(L,x,1)=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\dot x^i=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \dot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \ddot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}))\dot x^i=$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\delta_{l}^{k}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= \bar{H}(\bar{L},\bar{x},1) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}2D_{t}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}. \qquad (43)$$

Таким образом, второе слагаемое в формуле (43), вообще говоря, не равно 0, препятствует сохранению энергии при невырожденной замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. То есть при $p > n$ энергия системы при замене локальных координат не сохраняется.

Рассмотренные связи фундаментальных в физике и природе величин импульса и энергии подтверждают законы сохранения импульса и энергии в зависимости от порядка старшей производной по времени от аргументов функции Лагранжа. Работа имеет непосредственное отношение к дифференциальной геометрии в векторных полях и их расслоениях, а также к таким приложениям, как теоретическая механика, теоретическая физика, квантовая механика, физика элементарных частиц. Доказана инвариантность энергии системы ранга *n*, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии» ; ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

12. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Пастухов, Ю. Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, О. В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / О. В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.
15. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 19.09.2017

THE GENERALIZED ENERGY TENSOR

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV, S. CHERNOV

We prove the invariance of the energy of a n-rank system whose state is described by a smooth function defined in a bundle velocity space, that is, it is proved that for a nondegenerate transformation of the coordinate system the generalized energy given in the form of a linear combination of the Lagrange function (from the coordinates and their derivatives to the nth order) and the sum of the products of different orders generalized impulses (from the first to the nth order) by the derivatives of the corresponding order of coordinates, remains unchanged.

Keywords: *Euler – Lagrange equations, smooth manifolds, bundle velocity space, system momentum, energy tensor, generalized-momentum tensor, nondegenerate function.*