УДК 512.643.4

О ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $X^n = A$ ДЛЯ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НАТУРАЛЬНЫХ n

К.Л. ЯКУТО
(Витебский государственный университет имени П.М. Машерова)

Исследованы возможности использования аналитических методов для нахождения целых положительных решений нелинейных матричных уравнений. В леммах приведены условия на коэффициенты матрицы X, выражаемые через коэффициенты матрицы A. Условия даны в виде системы нелинейных уравнений от нескольких неизвестных. Предложен наиболее простой метод решения матричного уравнения вида $X^n = A$ для матриц второго порядка в случае целых положительных n. Представленные результаты можно использовать для нахождения целых положительных корней матриц второго порядка при любом n.

Ключевые слова: *нелинейное матричное уравнение, аналитические методы, система нелинейных алгебраических уравнений, метод математической индукции, натуральные корни уравнения.*

Введение. Извлечение корней n-й степени – важная задача теории матриц, имеющая как теоретические, так и практические приложения. Одно из применений – это вычисление логарифма матрицы. Корни матриц требуется находить в некоторых финансовых приложениях, использующих модели Маркова. Кроме того, необходимость решать подобные вопросы возникает в таких областях, как теория управления, динамическое программирование, методика решения некоторых дифференциальных уравнений [1]. В связи с этим представляет интерес вопрос о наличии положительных и целых положительных решений нелинейного матричного уравнения вида $X^n = A$ для матриц различных порядков в случае целых положительных n. Задача по отысканию положительного решения нелинейного матричного уравнения $X^2 = A$ была решена. Результаты решения этой задачи в представлены в [2].

Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения $X^n = A$ для матриц второго порядка в случае целых положительных n.

Материал и методы. В данной работе изучаются нелинейные матричные уравнения вида

$$X^n = A,$$

где A, X – матрицы второго порядка, n – натуральное число.

Элементы исходной матрицы A являются целыми и положительными числами. Методика проводимого исследования была подобна методике, предложенной в [3]: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из четырех нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовались пакет символьной математики Maple 15, Microsoft Excel – программа для работы с электронными таблицами, входящая в стандартный пакет Microsoft Office. Для нахождения решений уравнений, правая часть которых представляет собой полином степени, равной степени X исследуемого матричного уравнения, использовался on-line калькулятор, размещенный на сайте [3].

Результаты и их обсуждение. Пусть в общем случае $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$.

Рассмотрим случай, когда один из диагональных элементов матрицы X равен нулю, оставшиеся элементы не равны друг другу, т. е. имеет место следующее нелинейное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

При n = 2 имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + bc = K, \\ ab = L, \\ ac = M, \\ bc = N. \end{cases} \tag{2}$$

Решение такой системы уравнений трудности не представляет.

Лемма 1. Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения $X^3 = A,$ то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы: $b = \sqrt[3]{\frac{N}{p}},$ $c = b\frac{M}{L},$ $a = pb,$ где $p = \frac{K-N}{L}.$

Доказательство. При n = 3 имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + 2abc = K, \\ a^2b + b^2c = L, \\ a^2c + bc^2 = M, \\ abc = N. \end{cases} \tag{3}$$

В данном случае также выполняется соотношение $a = pb,$ где $p = \frac{K-N}{L}.$

Домножим обе части второго уравнения системы (3) на $a/b,$ а затем вычтем из первого уравнения четвертое. Заметим, что полученные уравнения имеют одинаковые левые части, следовательно, равны и их правые части, т. е. $L\frac{a}{b} = K - N.$ Зависимость между a и b будет иметь вид $a = pb,$ где $p = \frac{K-N}{L}.$ Если в левых частях второго и третьего уравнений системы (3) вынести за скобки b и c соответственно, то множители в скобках окажутся одинаковыми. Следовательно, можно установить связь между переменными b и c, которая будет иметь следующий вид: $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}.$ Подставив формулы, выражающие зависимости между переменными a и b, c и b, в четвертое уравнение системы (3), получим уравнение относительно лишь переменной b. Решая полученное уравнение, найдем элемент b:

$$b = \sqrt[3]{\frac{LN}{Mp}}.$$

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 148 & 273 \\ 195 & 70 \end{pmatrix}.$ В этом случае p = 0,2857, b = 7, $a = pb = 2,$ c = 5. Матрица X, являющаяся корнем матрицы A, имеет вид $X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$

Лемма 2. Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения $X^4 = A,$ то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы: $b = \sqrt[4]{\frac{NL^2}{p^2ML + M^2}},$ $c = b\frac{M}{L},$ $a = pb,$ где $p = \frac{K-N}{L}.$

Доказательство. При $n = 4$ имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + b^2c^2 = K, \\ a^3b + 2ab^2c = L, \\ a^3c + 2abc^2 = M, \\ a^2bc + b^2c^2 = N. \end{cases} \tag{4}$$

В рассматриваемом случае, как и в предыдущем, имеет место такая же зависимость между переменными a и b, b и c. Подставив в четвертое уравнение системы (4) вместо a и c соответствующие выражения, найдем b:

$$b = \sqrt[4]{\frac{NL^2}{p^2ML + M^2}}.$$

Пример 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 9881 & 7480 \\ 4760 & 7161 \end{pmatrix}$. В этом случае $p = 0,(36)$, $b = 11$, $a = pb = 4$, $c = 7$. Матрица X, являющаяся корнем матрицы A имеет вид $X = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения $X^n = A$, то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы:

$$b = \sqrt[n]{f(K, L, M, N)}, \ \ c = b\frac{M}{L}, \ \ a = pb,$$

где $f(K, L, M, N)$ – функция, зависящая от переменных K, L, M, N; $p = \dfrac{K - N}{L}$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы.

Доказательством того, что утверждение **теоремы 1** имеет место при $n = 3$, служит **лемма 1**.

Предположим, что для матрицы $X^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ имеет место формула линейной зависимости между переменными a и b. Тогда необходимо доказать, что для матрицы $X^{n+1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ также выполняется подобная зависимость.

Зная, что $X^{n+1} = X^n X$, можно записать соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ka + Lb = P, \\ Kb = Q, \\ Ma + Nb = R, \\ Mb = S. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку $X^{n+1} = X^n X = XX^n$, то вместо первого уравнения системы (5), можно записать уравнение $Ka + Mb = P$.

Домножим обе части второго уравнения системы (5) на a/b, а затем вычтем из первого уравнения четвертое. Заметим, что полученные уравнения имеют одинаковые левые части, следовательно, равны и их правые части, т. е. $Q\dfrac{a}{b} = P - S$. Зависимость между a и b будет иметь вид $a = pb$, где $p = \dfrac{P - S}{Q}$.

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Доказательством того, что утверждение **теоремы 1** имеет место при $n = 3$, служит **лемма 1**.

Зная, что $X^{n+1} = XX^n$, можно записать соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ka + Mb = P, \\ La + Nb = Q, \\ Kc = R, \\ Lc = S. \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку $X^n X = XX^n$, то вместо третьего уравнения системы (5) можно записать третье уравнение системы (6). Тогда, разделив второе уравнение системы (5) на третье уравнение, получим требуемый результат:

$$\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}.$$

Приведем системы уравнений для случаев $n = 5, \ldots, 10$ и выражения для нахождения b.

Для случая $n = 5$

$$\begin{cases} a^5 + 4a^3bc + 3ab^2c^2 = K, \\ a^4b + 3a^2b^2c + b^3c^2 = L, \\ a^4c + 3a^2bc^2 + b^2c^3 = M, \\ a^3bc + 2ab^2c^2 = N. \end{cases} \qquad b = \sqrt[5]{\frac{NL^2}{p^3ML + 2pM^2}} \tag{7}$$

Для случая $n = 6$

$$\begin{cases} a^6 + 5a^4bc + 6a^2b^2c^2 + b^3c^3 = K, \\ a^5b + 4a^3b^2c + 3ab^3c^2 = L, \\ a^5c + 4a^3bc^2 + 3ab^2c^3 = M, \\ a^4bc + 3a^2b^2c^2 + b^3c^3 = N. \end{cases} \qquad b = \sqrt[6]{\frac{NL^3}{p^4ML^2 + 3p^2M^2L + M^3}}\,. \tag{8}$$

Для случая $n = 7$

$$\begin{cases} a^7 + 6a^5bc + 10a^3b^2c^2 + 4ab^3c^3 = K, \\ a^6b + 5a^4b^2c + 6a^2b^3c^2 + b^4c^3 = L, \\ a^6c + 5a^4bc^2 + 6a^2b^2c^3 + b^3c^4 = M, \\ a^5bc + 4a^3b^2c^2 + 3ab^3c^3 = N. \end{cases} \qquad b = \sqrt[7]{\frac{NL^3}{p^5ML^2 + 4p^3M^2L + 3pM^3}}\,. \tag{9}$$

Для случая $n = 8$

$$\begin{cases} a^8 + 7a^6bc + 14a^4b^2c^2 + 10a^2b^3c^3 + b^4c^4 = K, \\ a^7b + 6a^5b^2c + 10a^3b^3c^2 + 4ab^4c^3 = L, \\ a^7c + 6a^5bc^2 + 10a^3b^2c^3 + 4ab^3c^4 = M, \\ a^6bc + 5a^4b^2c^2 + 6a^2b^3c^3 + b^4c^4 = N. \end{cases} \qquad b = \sqrt[8]{\frac{NL^4}{p^6ML^3 + 5p^4M^2L^2 + 6p^2M^3L + M^4}}\,. \tag{10}$$

Для случая $n = 9$

$$\begin{cases} a^9 + 8a^7bc + 21a^5b^2c^2 + 20a^3b^3c^3 + 5ab^4c^4 = K, \\ a^8b + 7a^6b^2c + 15a^4b^3c^2 + 10a^2b^4c^3 + b^5c^4 = L, \\ a^8c + 7a^6bc^2 + 15a^4b^2c^3 + 10a^2b^3c^4 + b^4c^5 = M, \\ a^7bc + 6a^5b^2c^2 + 10a^3b^3c^3 + 4ab^4c^4 = N. \end{cases} \quad (11)$$

$$b = \sqrt[9]{\frac{NL^4}{p^7ML^3 + 6p^5M^2L^2 + 10p^3M^3L + 4pM^4}}.$$

Для случая $n = 10$

$$\begin{cases} a^{10} + 9a^8bc + 28a^6b^2c^2 + 35a^4b^3c^3 + 15a^2b^4c^4 + b^5c^5 = K, \\ a^9b + 8a^7b^2c + 21a^5b^3c^2 + 20a^3b^4c^3 + 5ab^5c^4 = L, \\ a^9c + 8a^7bc^2 + 21a^5b^2c^3 + 20a^3b^3c^4 + 5ab^4c^5 = M, \\ a^8bc + 7a^6b^2c^2 + 15a^4b^3c^3 + 10a^2b^4c^4 + b^5c^5 = N. \end{cases} \quad (12)$$

$$b = \sqrt[10]{\frac{NL^5}{p^8ML^4 + 7p^6M^2L^3 + 15p^4M^3L^2 + 10p^2M^4L + M^5}}.$$

Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то можно сделать вывод, что матрица A имеет целый положительный корень.

Рассмотрим случай, когда оба диагональных элемента не равны нулю, а внедиагональные элементы не равны между собой, т. е. имеет место следующее нелинейное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \quad (13)$$

Лемма 3. Необходимым условием того, что матрица A будет иметь в качестве своего квадратного корня матрицу X, является выполнение для некоторого натурального a и некоторого натурального d равенства $K - a^2 = N - d^2$.

Доказательство. При $n = 2$ имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + bc = K, \\ b(a+d) = L, \\ c(a+d) = M, \\ bc + d^2 = N. \end{cases} \quad (14)$$

Одним из слагаемых в левых частях первого и четвертого уравнений системы (14) является произведение bc. Перенеся в первом уравнении в правую часть слагаемое a^2, а в четвертом уравнении слагаемое d^2 и приравняв правые части уравнений, заметим, что выполняется соотношение $K - a^2 = N - d^2$.

Поскольку a и d являются натуральными числами, то значения выражений $K - a^2$ и $N - d^2$ можно найти, перебирая возможные значения для a и d. Подставив найденные таким образом значения переменных a и d во второе и третье уравнения системы (14) и решив их, найдем соответственно значения переменных b и c. Если переменные b и c окажутся целыми положительными числами, то матрица $A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ будет иметь матрицу-корень $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Лемма 4. Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения $X^3 = A$, то для нахождения его элементов необходимо для каждого возможного значения переменной d решать уравнение третьего порядка для переменной c и воспользоваться формулами $a = \frac{c}{p} + d$ и $b = c\frac{L}{M}$, где $p = \frac{M}{K-N}$. Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то матрица A имеет целый положительный корень.

Доказательство. При $n = 3$ имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd = K, \\ a^2b + b^2c + abd + bd^2 = L, \\ a^2c + bc^2 + acd + cd^2 = M, \\ d^3 + 2bcd + abc = N. \end{cases} \tag{15}$$

Прежде всего необходимо оценить d и решить полученную систему уравнений (15) для каждого из возможных значений. Исходя из того, что d может быть только натуральным числом, для $n = 3$ имеем, как и в предыдущем случае, следующую оценку: $1 \le d \le \sqrt[3]{N-3}$.

Чтобы решить систему уравнений (15), вычтем из первого уравнения четвертое, домножим второе уравнение на a/b, третье уравнение на d/c и вычтем из второго уравнения третье. В итоге получим следующую систему:

$$\begin{cases} a^3 - d^3 + abc - bcd = K - N, \\ a^3 - d^3 + abc - bcd = L\frac{a}{b} - M\frac{d}{c}. \end{cases} \tag{16}$$

Левые части уравнений системы (16) равны, значит равны и правые части, т. е. $K - N = L\frac{a}{b} - M\frac{d}{c}$.

Из последнего уравнения получаем выражение, связывающее переменные a и c: $a = \frac{c}{p} + d$, где $p = \frac{M}{K-N}$, при этом учтена связь между переменными b и c, которая имеет следующий вид: $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$.

Подставив выражение, связывающее переменные a и b, в четвертое уравнение системы (15), получим соответствующее уравнение:

$$\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma = 0, \tag{17}$$

где $\alpha = \frac{L}{pM}$, $\beta = \frac{3Ld}{M}$, $\gamma = d^3 - N$.

Пример 3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$. Для d имеем следующую оценку: $1 \le d \le 4$. Если $d = 1$, то коэффициенты, входящие в уравнение (17) принимают следующие значения: $\alpha = -0{,}67$, $\beta = 2$, $\gamma = -117$. Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если $d = 2$, то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения: $\alpha = -0{,}67$, $\beta = 4$, $\gamma = -110$. Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если $d = 3$, то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения: $\alpha = -0{,}67$, $\beta = 6$, $\gamma = -91$. Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если $d = 4$, то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения: $\alpha = -0{,}67$, $\beta = 8$, $\gamma = -54$. Уравнение с такими коэффициентами имеет три действительных корня, два из которых нецелые, а третий равен трем. Следовательно, искомая матрица имеет вид $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Лемма 5. Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения $X^4 = A$, то для нахождения его элементов необходимо для каждого возможного значения переменной d решать уравнение четвертого порядка для переменной c и воспользоваться формулами $a = \frac{c}{p} + d$ и $b = c\frac{L}{M}$, где $p = \frac{K-N}{L}$. Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то матрица *A* имеет целый положительный корень.

Доказательство. При *n* = 4 имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + 2abcd + bcd^2 + b^2c^2 = K, \\ a^3b + 2ab^2c + 2b^2cd + a^2bd + abd^2 + bd^3 = L, \\ a^3c + 2abc^2 + 2bc^2d + a^2cd + acd^2 + cd^3 = M, \\ d^4 + a^2bc + 2abcd + 3bcd^2 + b^2c^2 = N. \end{cases} \tag{18}$$

Для переменной *d* имеем следующую оценку: $1 \le d \le \sqrt[4]{N-7}$. Решая систему (18) аналогично системе (15), приходим к выводу, что в рассматриваемом случае также имеет место выражение, связывающее переменные *a* и *c*:

$$a = \frac{c}{p} + d,$$

где $p = \frac{M}{K-N}$.

Подставив выражение, связывающее переменные *a* и *c*, в четвертое уравнение системы (18), получим следующее уравнение:

$$\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta = 0\,, \tag{19}$$

где $\alpha = \frac{p^2L^2 + LM}{p^2M^2}$, $\beta = \frac{4dL}{pM}$, $\gamma = \frac{6d^2L}{M}$, $\delta = d^4 - N$.

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2781 & 2700 \\ 3780 & 3861 \end{pmatrix}$. Для *d* имеем следующую оценку: $1 \le d \le 7$. Если *d* = 1, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -0,816$, $\gamma = 4,286$, $\delta = -3860$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два действительных нецелых и два комплексных корня. Если *d* = 2, то коэффициенты, входящие в уравнение (19) принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -1,633$, $\gamma = 17,143$, $\delta = -3845$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если *d* = 3, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -2,449$, $\gamma = 38,571$, $\delta = -3780$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если *d* = 4, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -3,265$, $\gamma = 68,571$, $\delta = -3605$. Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый корень, два комплексных корня и действительный корень, равный семи. Тогда *d* = 4, *c* = 7, *b* = 5, *a* = 2. Если *d* = 5, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -4,082$, $\gamma = 107,143$, $\delta = -3236$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если *d* = 6, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -4,898$, $\gamma = 154,286$, $\delta = -2565$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если *d* = 7, то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения: $\alpha = 0,569$, $\beta = -5,714$, $\gamma = 210$, $\delta = -1460$. Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Следовательно, искомая матрица принимает вид $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. В общем случае для любого натурального n между переменными b и c матрицы X имеет место следующая зависимость: $b = \frac{L}{M}c$; для любого натурального n между переменными c, d и a матрицы X имеет место следующая зависимость: $c = \frac{M(a-d)}{K-N}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы.

Для доказательства теоремы воспользуемся методом математической индукции.

Покажем, что зависимость имеет место при $n = 3$, для этого вынесем во втором и третьем уравнениях системы (15) за скобки b и c соответственно. Выражения, оставшиеся в скобках, будут равны между собой. Разделив второе уравнение системы (15) на третье и выразив из полученной пропорции b, получим требуемый результат.

Необходимо доказать, что если имеет место соотношение $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$, то выполняется соотношение $\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}$.

Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$. Переписав последнее соотношение в виде системы четырех нелинейных уравнений, получим

$$\begin{cases} P = Ka + Lc, \\ Q = Kb + Ld, \\ R = Ma + Nc, \\ S = Mb + Nd. \end{cases} \tag{20}$$

Разделив второе уравнение системы (20) на третье, получим $\frac{Q}{R} = \frac{Kb + Ld}{Ma + Nc}$. Выразив из соотношения $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$ переменную b и подставив в предыдущее выражение, имеем

$$\frac{Q}{R} = \frac{L(Kc + Md)}{M(Ma + Nc)}. \tag{21}$$

Поскольку порядок перемножения одинаковых матриц не влияет на конечный результат, то имеет место следующее равенство: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$. Переписав его в виде системы нелинейных уравнений, получим

$$\begin{cases} P = aK + bM, \\ Q = aL + bN, \\ R = cK + dM, \\ S = cL + dN. \end{cases} \tag{22}$$

Поскольку выражения, стоящие в левых частях третьих уравнений систем (20) и (22) совпадают, то совпадают и выражения, стоящие в правых частях этих уравнений: $cK + dM = Ma + Nc$. Следовательно, заменив выражение, стоящие в скобках в числителе (21), на $Ma + Nc$, приходим к выводу, что выполняется соотношение $\frac{Q}{R} = \frac{L}{M}$, а поскольку $\frac{L}{M} = \frac{b}{c}$, то $\frac{Q}{R} = \frac{b}{c}$.

Докажем второе утверждение теоремы.

Необходимо доказать, что если имеет место соотношение $c=\dfrac{M\left(a-d\right)}{K-N}$, то выполняется соотношение $c=\dfrac{R\left(a-d\right)}{P-S}$.

Заменив P и R соответствующими выражениями из системы (20), S соответствующим выражением из системы (22), получим $\dfrac{\left(Ma+Nc\right)\left(a-d\right)}{Ka-Nd}$.

Найдем выражение ($a-d$) из соотношения $c=\dfrac{M\left(a-d\right)}{K-N}$, подставим в $\dfrac{\left(Ma+Nc\right)\left(a-d\right)}{Ka-Nd}$. и в результате получим $\dfrac{\left(Ma+Nc\right)c\left(K-N\right)}{M\left(Ka-Nd\right)}$. Предположим, что доказываемое соотношение действительно имеет место, тогда выполняется следующее равенство:

$$\frac{\left(Ma+Nc\right)c\left(K-N\right)}{M\left(Ka-Nd\right)}=c\,. \tag{23}$$

Разделив обе части уравнения (23) на c, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим уравнение $c=\dfrac{M\left(a-d\right)}{K-N}$, которое полагалось верным по условию. Следовательно, сделанное предложение также является верным.

Далее приведем уравнения относительно переменной c, получаемые в результате решения соответствующих систем, для случаев n = 5, …, 10 и выражения, которые могут быть использованы для нахождения коэффициентов этих уравнений. Для каждого из этих уравнений имеет место выражение, связывающее переменные a и c, b и c.

Для случая n = 5

$$\alpha c^5+\beta c^4+\gamma c^3+\delta c^2+\varepsilon=0\,, \tag{24}$$

где $\alpha=\dfrac{L\left(M+2Lp^2\right)}{p^3M^2}$, $\beta=\dfrac{5dL\left(M+Lp^2\right)}{p^2M^2}$, $\gamma=\dfrac{10d^2L}{pM}$, $\delta=\dfrac{10d^3L}{M}$, $\varepsilon=d^5-N$.

Для случая n = 6

$$\alpha c^6+\beta c^5+\gamma c^4+\delta c^3+\varepsilon c^2+\varphi=0\,, \tag{25}$$

где $\alpha=\dfrac{L\left(M^2+3LMp^2+L^2p^4\right)}{p^4M^3}$, $\beta=\dfrac{6dL\left(M+2Lp^2\right)}{p^3M^2}$, $\gamma=\dfrac{15d^2L\left(M+Lp^2\right)}{p^2M^2}$, $\delta=\dfrac{20d^3L}{pM}$, $\varepsilon=\dfrac{15d^4L}{M}$, $\varphi=d^6-N$.

Для случая n = 7

$$\alpha c^7+\beta c^6+\gamma c^5+\delta c^4+\varepsilon c^3+\varphi c^2+\psi=0\,, \tag{26}$$

где $\alpha=\dfrac{L\left(M^2+4LMp^2+3L^2p^4\right)}{p^5M^3}$, $\beta=\dfrac{7dL\left(L^2p^4+M^2+3LMp^2\right)}{p^4M^3}$, $\gamma=\dfrac{21d^2L\left(M+2Lp^2\right)}{p^3M^2}$, $\delta=\dfrac{35d^3L\left(Lp^2+M\right)}{p^2M^2}$, $\varepsilon=\dfrac{35d^4L}{pM}$, $\varphi=\dfrac{21d^5L}{M}$, $\psi=d^7-N$.

Для случая $n = 8$

$$\alpha c^8 + \beta c^7 + \gamma c^6 + \delta c^5 + \varepsilon c^4 + \varphi c^3 + \psi c^2 + \rho = 0, \qquad (27)$$

где $\alpha = \dfrac{L\left(L^3 p^6 + M^3 + 5LM^2 p^2 + 6L^2 M p^4\right)}{p^6 M^4}$, $\beta = \dfrac{8dL\left(3L^2 p^4 + M^2 + 4LMp^2\right)}{p^5 M^3}$, $\delta = \dfrac{56d^3 L\left(2Lp^2 + M\right)}{p^3 M^2}$,

$\gamma = \dfrac{28d^2 L\left(L^2 p^4 + M^2 + 3LMp^2\right)}{p^4 M^3}$, $\varepsilon = \dfrac{70d^4 L\left(Lp^2 + M\right)}{p^2 M^2}$, $\varphi = \dfrac{56d^5 L}{pM}$, $\psi = \dfrac{28d^6 L}{M}$, $\rho = d^8 - N$.

Для случая $n = 9$

$$\alpha c^9 + \beta c^8 + \gamma c^7 + \delta c^6 + \varepsilon c^5 + \varphi c^4 + \psi c^3 + \rho c^2 + \tau = 0, \qquad (28)$$

где $\alpha = \dfrac{L\left(4L^3 p^6 + M^3 + 6LM^2 p^2 + 10L^2 M p^4\right)}{p^7 M^4}$, $\beta = \dfrac{9dL\left(L^3 p^6 + 5LM^2 p^2 + M^3 + 6L^2 M p^4\right)}{p^6 M^4}$,

$\gamma = \dfrac{36d^2 L\left(3L^2 p^4 + M^2 + 4LMp^2\right)}{p^5 M^3}$, $\delta = \dfrac{84d^3 L\left(L^2 p^4 + 3LMp^2 + M^2\right)}{p^4 M^3}$, $\varepsilon = \dfrac{126d^4 L\left(2Lp^2 + M\right)}{p^3 M^2}$,

$\varphi = \dfrac{126d^5 L\left(Lp^2 + M\right)}{p^2 M^2}$, $\psi = \dfrac{84d^6 L}{pM}$, $\rho = \dfrac{36d^7 L}{M}$, $\tau = d^9 - N$.

Для случая $n = 10$

$$\alpha c^{10} + \beta c^9 + \gamma c^8 + \delta c^7 + \varepsilon c^6 + \varphi c^5 + \psi c^4 + \rho c^3 + \tau c^2 + \mu = 0, \qquad (29)$$

где $\alpha = \dfrac{L\left(L^4 p^8 + 15L^2 M^2 p^4 + M^4 + 7LM^3 p^2 + 10L^3 M p^6\right)}{p^8 M^5}$,

$\beta = \dfrac{10dL\left(4L^3 p^6 + 6LM^2 p^2 + M^3 + 10L^2 M p^4\right)}{p^7 M^4}$, $\gamma = \dfrac{45d^2 L\left(L^3 p^6 + 6L^2 M p^4 + M^3 + 5LM^2 p^2\right)}{p^6 M^4}$, $\rho = \dfrac{120d^7 L}{pM}$,

$\delta = \dfrac{120d^3 L\left(3L^2 p^4 + 4LMp^2 + M^2\right)}{p^5 M^3}$, $\varepsilon = \dfrac{210d^4 L\left(L^2 p^4 + 3LMp^2 + M^2\right)}{p^4 M^3}$, $\varphi = \dfrac{252d^5 L\left(2Lp^2 + M\right)}{p^3 M^2}$,

$\psi = \dfrac{210d^6 L\left(Lp^2 + M\right)}{p^2 M^2}$, $\tau = \dfrac{45d^8 L}{M}$, $\mu = d^{10} - N$.

Таким образом, для решения задачи по нахождению матрицы-корня n-й степени, элементы которой представляют собой целые положительные числа, для матрицы также с целыми положительными элементами можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Провести оценку возможных значений переменной d.
2. Для каждого из значений переменной d найти переменную c, составив и решив уравнение полиномиального вида степени n. Если хотя бы одно из решений уравнения будет представлять собой целое положительное число, то перейти к шагу 3.
3. Используя приведенные выше формулы связи, найти значения переменных a и b. Если значения этих переменных тоже будут представлять собой целые положительные числа, то исходная матрица A имеет целую положительную матрицу-корень, элементами которой являются переменные a, b, c, d.

Заключение. В результате проведенного исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения для матриц второго порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы. Представлены формулы, позволяющие находить целые положительные корни матриц при $n = 2, \ldots, 10$. Полученные результаты можно использовать и для нахождения натуральных корней матриц второго порядка и при любом n. Приведенные примеры подтверждают правильность сформулированных выводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zarea, S. A. On positive defined solutions of the nonlinear matrix equation $X - A^{*}X^{n}A = I$ / S. A. Zarea, S. M. El-Sayed // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, № 3. – P. 107–120.
2. Якуто, К. Л. О положительном решении матричного уравнения $X^{2} = A$ для матриц второго порядка / К. Л. Якуто // Молодость. Интеллект. Инициатива : материалы IV Междунар. науч-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 29 апр. 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 24–25.
3. Решение задач по математике онлайн [Электронный ресурс] // MathForYou.net. – 2011. – Режим доступа: http://www.mathforyou.net. – Дата доступа: 25.08.2016.

Поступила 04.09.2017

ON THE WHOLE POSITIVE SOLUTION OF MATRIX EQUATION $X^{n} = A$ FOR MATRICES OF THE SECOND ORDER IN THE CASE OF NATURAL *n*

K. YAKUTO

Possibilities of using analytical methods for finding positive integer solutions of nonlinear matrix equations are studied. Lemmas contain the conditions on the coefficients of the X matrix, expressed through the coefficients of the matrix A. These conditions are given in the form of a system of nonlinear equations of several unknowns. The simplest method of the solution of the matrix equation form $X^{n} = A$ for matrices of different orders in the case of positive integer n is proposed. Presented results are possible to use to find positive integer roots of second-order matrices for any n.

Keywords: *nonlinear matrix equation, analytical methods, the system of nonlinear algebraic equations, the method of mathematical induction, the natural roots of the equation.*