МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА В ЯДРЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается двумерное интегральное преобразование с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре в пространстве интегрируемых функций в области $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset R\times R$ *плоскости. В работе даются условия ограниченности, описание образа изучаемого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают известные результаты для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода.*

Ключевые слова: *интегральное преобразование, интегральное уравнение, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

1. Введение. Рассмотрим интегральное преобразование в левой части (1.1)

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda} f\right)(\mathbf{x}) \equiv \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F\left(\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right) f(\mathbf{t})d\,\mathbf{t} = g(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}>\mathbf{a}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}=(x_1,\,x_2)\in R^2$; $\mathbf{t}=(t_1,\,t_2)\in R^2$ – векторы;

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{k=1}^{2} x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathbf{x}\cdot 1=\sum\limits_{k=1}^{2} x_k$ для $1=(1,1)$;

$\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1, x_2>t_2$ и аналогично для знака нестрогого неравенства «$\geq$»;

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^2$, $\lambda_i>0\ (i=1,2)$; $\beta=(\beta_1,\beta_2)\in R^2$; $\mathbf{a}=(a_1,a_2)\in R^2$; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in R^2$, $0<\alpha_i<1\ (i=1,2)$;

$k=(k_1,k_2)\in N=N\times N$ $(k_1\in N, k_2\in N)$ – индекс с $k!=k_1!k_2!$ и $|k|=k_1+k_2$;

$D^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1}(\partial x_2)^{k_2}}$; $d\,\mathbf{t}=d\,t_1\cdot d\,t_2$; $(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}=(x_1-t_1)^{\alpha_1-1}(x_2-t_2)^{\alpha_2-1}$; $f(\mathbf{t})=(t_1,\,t_2)$;

$F\left(\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)$ – функция вида

$$F\left(\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)=\prod_{j=1}^{2} {}_1F_1\left(\beta_j;\alpha_j;\lambda_j(x_j-t_j)\right)={}_1F_1\left(\beta_1;\alpha_1;\lambda_1(x_1-t_1)\right)\cdot{}_1F_1\left(\beta_2;\alpha_2;\lambda_2(x_2-t_2)\right),$$

представляющая собой произведение вырожденных гипергеометрических функций Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$.

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера определяется по формуле [1, § 1], [2, § 1.6]

$${}_1F_1(a;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}=\lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right),\ \ |z|<\infty\,, \tag{1.2}$$

здесь $(a)_k$ – символ Похгаммера: $(a)_0\equiv 1$, $(a)_k=a(a+1)\dots(a+k-1)$ $(a\in C; k\in \mathrm{N})$;

${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a,b,c\in C$ и $|z|<1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$$

для $z\in C,\ 0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c,\ (|\arg(1-z)|<\pi,\ z\neq 1)$ [3, формулы (2.1(2)) и (2.1.(10))].

Областью интегрирования оператора преобразования в левой части (1.1) является прямоугольник с противоположными вершинами $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ и $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$:

$$\left\{\mathbf{x}: x=(x_1,x_2)\in R^2,\ -\infty<a_1<x_1<\infty,\ -\infty<a_2<x_2<\infty\right\};$$

в частности, это может быть октант с вершиной $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$: $\left\{\mathbf{x}: x=(x_1,x_2)\in R^2,\ 0\le x_1<\infty,\ 0\le x_2<\infty\right\}$.

Конструкция вида (1.1) обобщает соответствующее одномерное интегральное преобразование в [1, § 37.1].

В работе преобразование (1.1) изучается в пространстве $L_{\overline{p}}(\Omega)=L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$, $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset R\times R$, $-\infty<a_i<b_i<\infty\ (i=1,2)$, $\overline{p}=(p_1,p_2)$ $(1\le p_i<\infty,\ i=1,2)$, функций $f(x_1,x_2)$, имеющих конечную норму [1, § 24.4]:

$$\|f\|_{\overline{p}}=\left\{\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\right]^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{1/p_2}<\infty. \tag{1.3}$$

Даются условия ограниченности оператора преобразования в левой части (1.1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода [1, § 37.1], [4].

2. Предварительные сведения.

Интеграл

$$\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ \ x>a, \tag{2.1}$$

где $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ – левосторонний интеграл Римана – Лиувилля дробного порядка α [1].

Выражение

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\quad x>a, n=[\operatorname{Re}(\alpha)]+1, \tag{2.2}$$

называется левосторонней производной порядка $\alpha\in C,\ \operatorname{Re}(\alpha)\ge 0$.

Выражение

$$\left(\mathrm{I}_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\varphi\right)(\mathbf{x})=\left(\mathrm{I}_{a_1+,a_2+}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\varphi\right)(\mathbf{x})=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\frac{\varphi(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}}d\mathbf{t},\ \alpha>0, \tag{2.3}$$

определенное для функций $\varphi(\mathbf{x})$, заданных при $x_1 > a_1, x_2 > a_2$, будем называть (левосторонним) смешанным дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, где $\mathrm{I}^{\alpha_i}_{a_i+}$ $(i = 1, 2)$ – операторы преобразования (2.1).

$$\left(D^{\alpha}_{\mathbf{a}+} f\right)(\mathbf{x}) = \left(D^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{a_1+,a_2+} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int\limits_{a_1}^{x_1} \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{f(\mathbf{t})d\mathbf{t}}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.4}$$

называют смешанной дробной производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ [1, § 24.2], где $D^{\alpha_i}_{a_i+}$ $(i = 1, 2)$ – операторы преобразования (2.2).

Выражение (2.4) определено для функций, заданных на $x_1 > a_1$, $x_2 > a_2$. Мы будем использовать для них следующие обозначения:

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\varphi = \begin{cases} \mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\varphi, & \alpha > 0, \\ D^{-\alpha}_{\mathbf{a}+}\varphi, & \alpha \le 0. \end{cases}$$

Введем пространство $L_p = L_p(\Omega)$ [1, § 1.2] измеримых на $\Omega = [a,b], -\infty < a < b < \infty$ функций $f(x)$, для которых $\int\limits_{\Omega} \left| f(x) \right|^p dx < \infty$, где $1 \le p < \infty$, с нормой $\| f \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \left| f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Через $\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}(L_p(a,b))$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом (2.1) порядка α от суммируемой функции: $g = \mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f$, $f \in L_p\left(a,b\right), 1 \le p < \infty$ [1, § 2.6].

Введем пространство

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \mathrm{I}^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{a_1+a_2+}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \left\{ f : f = \mathrm{I}^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{a_1+a_2+}\varphi, \varphi \in L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b}), -\infty < a_i < b_i < \infty, i = 1,2 \right\} \tag{2.5}$$

функций, являющихся смешанными дробными интегралами от функций из пространства (1.3) $L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $1 < p_1 < \dfrac{1}{\alpha_1}$, $1 < p_2 < \dfrac{1}{\alpha_2}$; $0 \le \alpha_1 < 1$, $0 \le \alpha_2 < 1$.

Пространство $\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ играет ту же роль для уравнения (1.1), что и пространство $AC\left([a,b]\right)$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2].

Теорема 1 [1, теорема 25.2]. Пусть $1 \le p_i \le \infty$, $1 \le q_i \le \infty$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2)$. Левосторонний оператор смешанного дробного интегрирования (2.5) $\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+} = \mathrm{I}^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{a_1+,a_2+}$ ограничен из $L_{p_1,p_2}(R^2)$ в $L_{q_1,q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_i < 1$, $1 < p_i < \dfrac{1}{\alpha_i}$, $q_i = \dfrac{p_i}{(1-\alpha_i p_i)}$ $(i = 1, 2)$.

Из теоремы 1 следует

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}(L_{p_1,p_2}) \subset L_{q_1,q_2}(R^2), \quad q_i = \frac{p_i}{1-\alpha_i p_i} \quad (i = 1, 2).$$

Теорема 2 [1, теорема 37.1]. Одномерный оператор

$$\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{a+} f\right)(x) \equiv \int\limits_{a}^{x} \frac{\left(x-t\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F\left(\beta;\alpha;\lambda(x-t)\right) f(t)dt \quad (x > a)$$

ограниченно действует из пространства $L_p(a,b)$, $p \ge 1$ на пространство $I^{\alpha}_{a+}\left(L_p(a,b)\right) \subset L_p(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Преобразование Лапласа функции $f(x)\ (x>0)$ определяется формулой [1, формула (1.119)]

$$Lf=\left(L\ f\right)(s)=L\{f(t);s\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\,.$$

Сверткой для преобразования Лапласа является интеграл [2, формула (1.4.10)]

$$[h*\varphi]=[h*\varphi](x)=\int_0^x h(x-t)\varphi(t)dt\,;$$

теорема о свертке [2, формула (1.4.12)]

$$L[h*\varphi](s)=L(h)(s)L(\varphi)(s)\,. \tag{2.6}$$

При выполнении условий $\mathrm{Re}(b)>0,\ \mathrm{Re}(s)>\max(0,\mathrm{Re}\,k),\ |s|>k$ имеем место формула [3, формула (6.10(5))]

$$L\left\{t^{b-1}{}_1F_1(a,c;kt);s\right\}=\Gamma(b)s^{-b}{}_2F_1(a,b;c;ks^{-1})=\Gamma(b)(s-k)^{-b}{}_2F_1\left(c-a,b;c;\frac{k}{k-s}\right),\ \ |s-k|>|k|\,. \tag{2.7}$$

Двумерное преобразование Лапласа функции $f(\mathbf{x})=(x_1,x_2)\ (x_1>0,x_2>0)$ определяется формулой [1, формула (24.49)]:

$$Lf=(Lf)(s)=\int_0^{\mathrm{x}} e^{-st}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t},\ \ s=(s_1,s_2),\ s_1>0,\ s_2>0;\ \mathrm{x}\in R^2_{++}=R_+\times R_+\,, \tag{2.8}$$

где R^2_{++} – октант $\{t:\ t_1\ge 0,\ t_2\ge 0\}$.

Свертка Лапласа двух функций $h(\mathbf{t})=h(t_1,t_2)$ и $\varphi(\mathbf{t})=\varphi(t_1,t_2)$ определяется через интеграл [2, формула 1.4.21]:

$$h*\varphi\equiv[h*\varphi](\mathbf{x})=\int_0^{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varphi(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\,\mathbf{t}\quad (\mathbf{x}\in R^2_{++}=R_+\times R_+)\,, \tag{2.9}$$

где $\int_0^{\mathbf{x}}:=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}$; $h(\mathbf{x}-\mathbf{t})=h(x_1-t_1,x_2-t_2)$. Для свертки (2.9) теорема (2.6) также выполняется.

Справедлива формула [1, формула 24.50]:

$$\left(LI^{\alpha}_{\mathbf{0}+}f\right)(s)=s^{-\alpha}(Lf)(s)\,, \tag{2.10}$$

где $I^{\alpha}_{\mathbf{0}+}f$ – оператор преобразования $\left(\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{0}+}f\right)(\mathbf{x})=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\frac{f(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}}d\mathbf{t},\ \alpha>0$.

3. Действие оператора (1.1). Значение преобразования Лапласа равенства (1.1)

В силу равенства ${}_1F_1(a;c;0)=1$ получаем

$$I^{\alpha,\beta,0}_{\mathbf{a}+}=I^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\,. \tag{3.1}$$

Это позволяет оператор в левой части (1.1) считать некоторым обобщением смешанного дробного интеграла порядка α, определяемого по формуле (2.3).

Исходя из представления ядра оператора преобразования (1.1) через ряд (1.2) и воспользовавшись формулой $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+k)}{(z)_k}$ $(\mathrm{Re}\,z>-n, n=1,2,...,z\ne 0,1-1,-2,...)$ [1, формула 1.56], выводим следующую формулу, отражающую структуру оператора (1.1):

$$I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda}=I_{a_1+}^{\alpha_1,\beta_1,\lambda_1}I_{a_2+}^{\alpha_2,\beta_2,\lambda_2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_k}{k!}\lambda_1{}^k I_{a_1+}^{\alpha_1+k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta_2)_k}{k!}\lambda_2{}^k I_{a_2+}^{\alpha_2+k}=$$

$$=I_{a_1+}^{\alpha_1}\left(E-\lambda_1 I_{a_1+}^1\right)^{-\beta_1}I_{a_2+}^{\alpha_2}\left(E-\lambda_2 I_{a_2+}^1\right)^{-\beta_2}=I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(E-\lambda I_{\mathbf{a}+}^1\right)^{-\beta},\qquad(3.2)$$

где E – единичный оператор.

Отмеченная в (3.1) связь с дробным интегралом (2.3) дает возможность заключить, что оператор (1.1) обладает в пространстве $L_{\overline{p}}(R^2)$ таким же действием, как и оператор $\mathrm{I}_{\mathbf{a}+}^{\alpha}$. Справедлива теорема.

Теорема 3. Оператор в левой части (1.1) ограниченно действует из пространства $L_{p_1,p_2}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $p\ge 1$, на пространство $I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})\right)$, $1<p_1<\dfrac{1}{\alpha_1}$, $1<p_2<\dfrac{1}{\alpha_2}$; $0\le\alpha_1<1, 0\le\alpha_2<1$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $-\infty<\mathrm{a}<\mathrm{b}<\infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойства ${}_1F_1(a;c;0)=1$ и **теоремы 1** и **теоремы 2**.

Если в (1.1) $\mathbf{a}=0$ или $\mathbf{a}>0$, но функция $f(\mathbf{t})$ доопределена нулем на интервале $0<\mathbf{t}<\mathbf{a}$, то применяем двумерное преобразование Лапласа (2.8) к левой части равенства (1.1). Записываем оператор (1.1) как свертку Лапласа (2.9). Тогда по теореме о свертке (2.6), вычислив преобразование Лапласа ядра по формуле (2.7), получаем следующее значение преобразования Лапласа равенства (1.1)

$$\left(L\,I_{\mathbf{0}+}^{\alpha,\beta,\lambda}f\right)(s)=\int_0^{\infty}e^{-s_2x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}F\left(\beta_2;\alpha_2;\lambda_2\left(x_2-t_2\right)\right)dt_2\times$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-s_1x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-t_1)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}F\left(\beta_1;\alpha_1;\lambda\left(x_1-t_1\right)\right)f(t_1,t_2)dt_1=s^{-\alpha}\left(1-\lambda s^{-1}\right)^{-\beta}\left(Lf\right)(s),\qquad(3.3)$$

$s_1>0, s_2>0; \lambda_1>0, \lambda_2>0$.

Сравнивая правую часть формулы (3.3) с правой частью формулы (3.2), замечаем, что она формально получается из (3.2) заменой $I_{\mathbf{a}+}^1$ на s^{-1}.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении оператора преобразования (1.1).

4. Обращение оператора (1.1).

Как показывает формула (3.3), преобразование Лапласа $\left(Lh\right)(s)$ ядра $h(\mathbf{x})$ оператора (1.1) и соответствующая ему обратная величина $\left[\left(Lh\right)(s)\right]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования $I_{\mathbf{0}+}^{\alpha}$, которому соответствует $\left(Lh\right)(s)=s^{-\alpha}$ с условием $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, для преобразования Лапласа s^{α} ядра обратного оператора $D_{\mathbf{0}+}^{\alpha}$ условие $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ вынуждает нас представить s^{α} в виде $s^{\alpha}=s^n s^{-(n-\alpha)}$, где $\mathrm{Re}(n-\alpha)>0$, причем значению s^n соответствует оператор $\left(\dfrac{d}{d\mathbf{x}}\right)^n=D_{\mathbf{0}+}^n$ [1, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении оператора (1.1).

Учитывая сказанное, построим решение уравнения (1.1) $\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda}f\right)(\mathbf{x})=g(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}>\mathbf{a}$. Пользуясь формулой (3.3) и равенством ${}_1F_1(a,c;x)=e^x\,{}_1F_1(c-a,c;-x)$ [3, формула (6.3(7))], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (1.1):

$$f(\mathbf{x})=\left\{\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda}\right)^{-1}g\right\}(\mathbf{x})=I_{\mathbf{a}+}^{-\alpha}\left(E-\lambda I_{\mathbf{a}+}^1\right)^{\beta}g(\mathbf{x})=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)\right)\frac{dg(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}}d\mathbf{t}\,.\qquad(4.1)$$

Следующая теорема дает условия обратимости оператора (1.1).

Теорема 4. Пусть задано уравнение (1.1) $\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda} f\right)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, $0 \le a_i < x_i < b_i < \infty, 0 < \alpha_i < 1$, $\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2)$; $g(\mathbf{x})$ – заданная на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ функции; $f(\mathbf{x})$ – искомая функция (в случае $\mathbf{a} > 0$ полагается, что $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0$ при $0 < x < \mathbf{a}$), тогда его решение f в классе $L_{\overline{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{b} < \infty$, существует и единственно, если $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right)$, $\overline{p} \ge 1$. В случае $\overline{p} = (p_1, p_2) = (1, 1)$ оно может быть представлено формулой (4.1), если еще выполняются дополнительные условия $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right)$, $g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // North – Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – 523 p.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
4. Скоромник, О.В. Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 104–110.

Поступила 20.03.2017

**TWO-DIMENTIONAL INTEGRAL TRANSFORM
WITH THE CONFLUENT HYPERDEOMETRIC KUMMER FUNCTION
IN THE KERNEL AND INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND
IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS**

O.V. SKOROMNIK

Two-dimentional integral transform involving confluent hyperdeometric Kummer function in the kernel is studied on the space of summable functions on a finite domain $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ *of a plane. Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formula is established. Integral equation of the first kind with the confluent hyperdeometric Kummer function in the kernel also is considered. The solution of the investigating equation in the closed form is established, and conditions for it solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well know findings for corresponding one-dimentional integral equation.*

Keywords: *integral transform, integral equation, confluent hyperdeometric Kummer function, space of summable functions, fractional integrals and derivatives.*