УДК 514

ЗАКОН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА

д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук О.В. ГОЛУБЕВА,
канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Введено понятие обобщенного импульса ранга n $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$, $i = \overline{1,m}$, $k = 0,n$, *являющееся обобщением импульсов в преобразовании Остроградского* $F_L(x): T^{2n}X_m \to T^{2n}X_m$, *индуцированного невырожденной функцией Лагранжа* $L: T^n X_m \to \Re$.

Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k = 0,n$ *ранга* n *при замене координат в базе* X_m *расслоения* $T^n X_m$, *они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):*

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$k = 0,n, \quad i = \overline{1,m}.$

Ключевые слова: *уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция.*

Введение. Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно вывести закон движения, определить траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как принципы запрета: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Поэтому, чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.); одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире с его классическими представлениями. Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1–8, 11]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координаты – временя объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения

Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты [7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением работы [9].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L: T^n X_m \to \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Определение 1. Пусть D_t^k – оператор k-кратного полного дифференцирования по переменной t

$$p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m},$$

а в любой другой системе локальных координат $x(\bar{x})$ в базе X_m,

$$\overline{p_k^i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \text{ (свертка) } \; i,j=\overline{1,m}, 0\le k\le n$$

называется преобразованием Остроградского в расслоении скоростей $T^{2n}X_m$, а функции $p_k^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$ зависят от производных координат не более $(2n-k)$ порядка (нижний индекс – номер порядка импульса, верхний – номер координаты) и называются импульсами порядка k по i-й координате.

Обобщением определения 1 является следующее определение.

Определение 2. Система функций $P_n = \left\{p_k^i(n)\right\} = \left\{p_{k,n}^i\right\}$, таких, что

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right), \; k=\overline{0,n}, \; i=\overline{1,m},$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \mathfrak{R}$,

где $L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$;

$p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ – функция, называемая k-й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по i-й координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по i-й координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранга n определен для функций $L: T^p X_m \to \mathfrak{R}$.

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что при $k > p$, $l \ge 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \le p$. Поскольку $k \le n, k \le p \Rightarrow k \le \min(n,p)$, то в **определении 2** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n,p)},\ i = \overline{1,m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$ при $l + k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$, и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \le p$, кроме того,

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow l + k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (\min(n,p) - k) + k =$$

$$= 2 \cdot \min(n,p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n,p) - k.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (n-k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k.$$

При $p > n,\ l + k \le n - k + k = n$ максимальный порядок производной по t в $L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})$ больше максимального порядка производной по t переменной, по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$.

При $p < n$, поскольку $l + k \le n - k + k = n$ при $l + k > p$ $\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ будет тождественно равна 0.

Пограничным является случай $p = n$, который будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^n D_t^n \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right),$$

которые представляют собой нуль-импульсы (функционалы в уравнении Эйлера – Лагранжа):

$$p_{1,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

$$p_{2,n}^i = \sum_{l=0}^{n-2} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

$$\ldots$$

$$p_{n,n}^i = \sum_{l=0}^{n-n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}.$$

Теорема 1 [10]. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ $S:(x) \to (\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p = \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^j} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \ge s \\ 0, l < s \end{cases}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о связи импульсов *k*-го порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$.

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L: T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m, где

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$ – импульс *k*-го порядка ранга *n*,

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$$ – импульс k-го порядка ранга *n* +1.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right).$$

Доказательство:

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\right) =$$

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right) = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right).$$

Теорема доказана.

Математическая постановка задачи.

Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ – функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. Исследовать закон преобразования компонент обобщенного импульса P_n ранга n при замене локальной системы координат $x = x(\bar{x})$ в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$.

Теорема 3 (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ импульсы $\overline{p_k^i(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}})}$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}})} = \sum_{j=1}^{n} p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$k = 0, n$ $i, j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по рангу обобщенного импульса n. База индукции $n = 1$.

$$x=(x^1,x^2,...,x^m),\ \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$$

$$L(x,\dot{x})=L(x,D_t x)$$

$$\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})=\bar{L}(\bar{x},D_t\bar{x})=L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}))=L(x(\bar{x}),D_t(x(\bar{x}))).$$

Для импульса 0-го порядка (0-импульса) 1-го ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar{p}^i_{0,1}=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\Big)=-D\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\Big)=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m -D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\Big)=$$

$$=-\sum_{s=1}^m D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)-\sum_{s=1}^m D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\Big).$$

Поскольку $\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=0$, то по ранее доказанной **теореме 1** $\frac{\partial x^s}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^s}{\partial D_t^1\bar{x}^i}=\frac{\partial\overset{(0)s}{x}}{\partial\overset{(1)i}{\bar{x}}}=0$ и $0<1$ (это и понятно, так как x^s не зависит от $\dot{\bar{x}}^i$). Продолжим преобразование:

$$-\sum_{s=1}^m D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)-\sum_{s=1}^m D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}\Big)=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}\Big)=$$

$$=\sum_{s=1}^m -D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big)+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}+\sum_{s=1}^m\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}.$$

Так как $\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial\dot{x}^s(\bar{x})}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial\dot{\bar{x}}^i}\Big(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\cdot\dot{\bar{x}}^k\Big)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\cdot\frac{\partial\dot{\bar{x}}^k}{\partial\dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\cdot\delta_i^k=\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}$,

где $\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера, то

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

$$\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(D_t x^s(\bar{x})) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \cdot D_t \bar{x}^k\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \cdot \dot{\bar{x}}^k\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \cdot \dot{\bar{x}}^k$$

$$D_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(x^s(\bar{x}))\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \cdot \dot{\bar{x}}^k = D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) = \frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i}.$$

Этот результат следует и из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(0)i}{\bar{x}}} = C_1^0 \cdot D_t^{1-0} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = D_t \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Далее

$$\sum_{s=1}^{m} -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\right) \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} - \sum_{s=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\right) \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} - \sum_{s=1}^{m} D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) \cdot \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot D_t\left(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\right) \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{s=1}^{m}\left(-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\right) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\right) \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} p_{0,1}^s \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_{0,1}^s \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Так как $p_{0,1}^s = \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(l+s)i}{x}}\right) = -D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\right) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}$.

Утверждение теоремы доказано для импульса 0-го порядка(0-импульса) 1-го ранга.

Для импульса 1-го порядка (1-импульса) 1-го ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar{p}_{1,1}^i = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}\right) = \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) = \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} \cdot \frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}. \tag{1}$$

Второе слагаемое в формуле (1) $\sum\limits_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=0$, что следует из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^s(\bar x)}{\partial D_t^1\bar x^i}=\frac{\partial \overset{(0)s}{x}(\bar x)}{\partial \bar x^{(1)i}}=\delta_1^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=0,$$

в связи с тем, что $l=0<1=s$ (иначе $-x^s$ не зависит от $\dot{\bar x}^i$).

Для первого слагаемого в формуле (1) (по **теореме 1**):

$$\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}=\frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i},$$

то, упрощая формулу (1), имеем

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\sum_{s=1}^{m}p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}$$

Утверждение теоремы доказано для импульса 1-го порядка(1-импульса) 1-го ранга. Таким образом, база индукции доказана.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для n и для любой $L:T^nX_m\to\Re$

$$\bar p_0^{\,i}(n)=\bar p_{i,0}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+0)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^i}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big),\ 1\le i\le m. \qquad (2)$$

Правая часть в формуле (2) записана на основании теоремы о производной сложной функции:

$$\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(l)i}{\bar x}}\Big)$$

Нужно доказать, что:

$$\bar p_0^{\,i}(n+1)=\bar p_{0,n+1}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dots,\overset{(n)}{\bar x},\overset{(n+1)}{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar x}}\Big)=\sum_{s=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+0)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}=p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}.$$

По теореме о производной сложной функции: $\dfrac{\partial L(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}},\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{s=0}^{n+1}\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\dfrac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}$

$$\bar{p}_0^{\,i}(n+1)=\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}},\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n+1} D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}\Big)= \quad (3)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big). \quad (4)$$

Последнее слагаемое в выражении (3) равно 0 по **теореме 1:** $\dfrac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=0,$ при $0\le s\le n<n+1$.

Учитывая равенство (2), по предположению индукции последнее слагаемое в сумме (4) равно

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \quad (5)$$

По **теореме 1:**

$$\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}=C_{n+1}^l D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big). \quad (6)$$

Принимая во внимание выражение (6), преобразуем первое слагаемое в сумме (4), используя формулу Лейбница производной порядка l произведения двух функций f,g :

$$D_t^l(fg)=\sum_{p=0}^{l}C_l^p D_t^p(f)D_t^{l-p}(g)\ ,C_l^p=\frac{l!}{p!(l-p)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k:$$

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}C_{n+1}^l D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l\sum_{p=0}^{l}C_l^p D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{l-p}D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l\sum_{p=0}^{l}C_l^p D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big)=$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \tag{7}$$

$$C_{n+1}^l C_l^p = \frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!}\,\frac{l!}{p!(l-p!)} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\,\frac{(n+1-p)!}{(l-p)!(n+1-p-(l-p))!} = C_{n+1}^p C_{n+1-p}^{l-p} \tag{8}$$

Введем новую переменную $m = l - p$ и преобразуем последнюю сумму в выражении (7) с учетом соотношения (8):

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^p C_{n+1-p}^{l-p} = \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^{m+p} C_{n+1}^p C_{n+1-p}^m = (-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^m\,. \tag{9}$$

При $p = n+1$ преобразуем выражение (9):

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^m C_{n+1-(n+1)}^m = (-1)^{n+1}.$$

При $p < n+1$ сумма в (9) равна:

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} C_{n+1-p}^m (-1)^m 1^{n+1-p-m} = (-1)^p C_{n+1}^p (1+(-1))^{n+1-p} = 0\,,$$

то есть

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \begin{cases}(-1)^{n+1}, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} = (-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p\,,\ \delta_{n+1}^p = \begin{cases}1, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} - \text{символ Кронекера}\,. \tag{10}$$

Заменяем последнюю сумму $\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p$ в формуле (6) полученным в (10) выражением:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l C_l^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-(n+1)}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Таким образом, доказано равенство:

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\,\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)}{\bar{x}}{}^i}\Big) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\,. \tag{11}$$

Подставляя полученный в выражении (11) результат в сумму (4) и учитывая формулу (5), получим

$$\bar{p}_0^{\,i}(n+1)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)s}{x}}\Big)+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{k=1}^{m}p_0^k(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Индуктивный переход для импульсов 0-го порядка ранга n доказан.

Для импульсов $\bar{p}^{\,i}_{n+1,n+1}$ порядка $(n+1)$ ранга $(n+1)$ имеем:

$$\bar{p}^{\,i}_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{\bar{L}}(x,\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{l=0}^{0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{\bar{L}}(x,\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=(-1)^0 D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{\bar{L}}(x,\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(0+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial \bar{\bar{L}}(x,\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}}\cdot\frac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}})= \tag{12}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}}\cdot\delta^p_{n+1}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)j}{x}}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{j=1}^{m}p^j_{n+1,n+1}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Так как в выражении (12) $\dfrac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}\equiv 0$ для $0\le p\le n$, а для $p=n+1$ (по **теореме 1)**:

$$\frac{\partial \overset{(n+1)j}{x}}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=C^{n+1}_{n+1}\cdot D_t^{n+1-(n+1)}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=D_t^0\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

то есть $$\frac{\partial \overset{(p)j}{x}}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=\begin{cases}0, 0\le p\le n\\ \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}, p=n+1\end{cases}=\delta^p_{n+1}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},\quad \delta^k_i=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases}-\text{символ Кронекера}.$$

Индуктивный переход для импульсов n-го порядка ранга n доказан.

Теорема доказана.

Из замечания 1 в начале работы следует

Теорема 4. Если $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$ – любая невырожденная замена координат в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ для функции $L: T^p X_m \to \Re$, тогда компоненты обобщенного импульса ранга $n \ge p$ порядка $k = \overline{0,n}$ $\overline{p_k^i(n)}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}), i = \overline{1,m}$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы)

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_k^j(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2p-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2p-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$k = \overline{0,n}\quad, i = \overline{1,m}$.

Из **теоремы 4** следует корректность определения 2.

Теорема 5. Обобщенный импульс ранга $n : P_n = \left\{p_k^i(n)\right\} = \left\{p_{k,n}^i\right\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big),\ k = \overline{0,n}\quad, i = \overline{1,m},$$

не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$ $n \ge p$ (*обобщенный импульс порядка* $k = \overline{0,n}$ ранга n *является геометрическим инвариантом*).

Замечание 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$. При $p > n$ импульсы порядка $k = \overline{0,n}$ ранга n, вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов 0-го и 1-го порядков ранга 1 : $\bar{p}_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big)$.

По **теореме 1:**

$$\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^i} = C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big),\quad \frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \begin{cases} C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big), \text{ при } k \ge 1 \\ 0\,,\ \textit{при}\, k = 0 \end{cases}$$

$$\bar{p}_0^i(1) = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\Big) = -D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big) + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^i} = -D_t\Big(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big) +$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^i} = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t\Big(D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big) + \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t^k(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^0 D_t^k(\frac{\partial x^j(\bar{x}}{\partial \bar{x}^i})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}D_t^k(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})(-C_k^1+C_k^0)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}})C_k^1 D_t^{k-1}(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}). \qquad (13)$$

Видно, что при $p=1$ выражение (13) является тензором:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}-\sum_{j=1}^{m}D_t(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i})\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}-D_t(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}))\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

а при $p>1$ выражение (13) тензором не является, так как будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})$ и $-C_k^1+C_k^0\neq 0$, при $p>1$.

$$\bar{p}_1^i(1)=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}})=\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t^{k-1}(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}). \qquad (14)$$

И в этом случае при $p>1$ выражение (14) тензором не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})$.

Замечание 3. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$. При $p>n$ импульсы порядка $0<k<n$ ранга n, вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов 1-го порядка ранга 2: $\bar{p}_k^i(n)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}})$.

$$\bar{p}_1^i(2)=\bar{p}_{1,2}^i=\sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\ddot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}})=D_t^0(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i})-D_t^1(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^i})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i})-\sum_{k=1}^{m}D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \ddot{\bar{x}}^i})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}C_1^1D_t^{1-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}C_2^1D_t^{2-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-\sum_{k=1}^{m}D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}C_2^2D_t^{2-2}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}C_2^1D_t^1(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-\sum_{k=1}^{m}D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}C_2^1D_t^1(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-\sum_{k=1}^{m}(D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k})\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}D_t(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}-D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}))\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\quad+\quad\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}D_t(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})(C_2^1-1)\,. \qquad (15)$$

Для первой суммы в выражении (15) выполнен тензорный закон преобразования, а для второй – нет. Поэтому импульс $\bar{p}_1^i(2)$ не является тензором.

Замечание 4. Пусть $L:T^2X_m\to\Re$ $(p=n=2)$. Для иллюстрации утверждения **теоремы 3** рассмотрим закон преобразования импульсов 0-го и 2-го порядка ранга 2: $\bar{p}_k^i(n)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+k)i}{\bar{x}}})$.

$$\bar{p}_0^i(2)=\bar{p}_{0,2}^i=\sum_{l=0}^{2-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\ddot{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+0)i}{\bar{x}}})=D_t^0(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^i})-D_t^1(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^i})+D_t^2(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^i})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial\dot{x}^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}\frac{\partial\ddot{x}^k}{\partial\bar{x}^i})-D_t^1\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial\dot{x}^k}{\partial\dot{\bar{x}}^i}+$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}\frac{\partial\ddot{x}^k}{\partial\dot{\bar{x}}^i})+\sum_{k=1}^{m}D_t^2(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}\frac{\partial\ddot{x}^k}{\partial\ddot{\bar{x}}^i})=\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}C_1^0D_t^{1-0}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})+$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}C_2^0D_t^{2-0}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-\sum_{k=1}^{m}D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}C_1^1D_t^{1-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k}D_t(C_1^1D_t^{1-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k})C_2^1D_t^{2-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k}D_t(C_2^1D_t^{2-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}D_t^2((\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\ddot{x}^k})C_2^2D_t^{2-2}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i})=\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}-D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^k})C_1^1D_t^{1-1}(\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{k}}C_1^0 D_t^{1-0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}C_2^0 D_t^{2-0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)-\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{k}}D_t\left(C_1^1 D_t^{1-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)- \tag{16}$$

$$-\sum_{k=1}^{m}D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}D_t\left(C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)+ \tag{17}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}C_2^2 D_t^2\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)D_t^0\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)+C_2^1 D_t^1\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)D_t^1\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)+C_2^0 D_t^0\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)D_t^2\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\Bigg)= \tag{18}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^{k}}-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{k}}\right)+D_t^2\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)\right)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{k=1}^{m}p_0^k(2)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \tag{19}$$

Равенство (19) получено, так как разность первого и последнего слагаемых в выражении (16) равна 0: $\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{k}}C_1^0 D_t^{1-0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)-\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{k}}D_t\left(C_1^1 D_t^{1-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)=0$, сумма среднего в (16), последнего в (18) минус последнее в (17) равна 0:

$$\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}C_2^0 D_t^{2-0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)+C_2^0 D_t^0\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)D_t^2\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)-\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}D_t\left(C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)=0,$$

второе в выражении (18) минус первое в (17): $C_2^1 D_t^1\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)D_t^1\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)-D_t\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\right)C_2^1 D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)=0$.

$$\bar{p}_2^{\,i}(2)=\bar{p}_{2,2}^{\,i}=\sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\ddot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+2)}{\bar{x}}{}^{i}}\right)=\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{i}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \ddot{\bar{x}}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{k}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{k=1}^{m}p_2^k(2)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \tag{20}$$

Равенство (19), (20) являются тензорным законом преобразования, то есть утверждение **теоремы 3** проверено при $n=2$ $k=0,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский – М. :Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
6. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 507 с.
7. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М.Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.

8. Дирак, П. Лекции по квантовой механики / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12 – 125–133.
10. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Сер., Проблемы геометрии. – 1979. – Т. 9.
11. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.

Поступила 20.03.2017

THE PRINCIPLE OF GENERAL IMPULSE TRANSFORMATION

S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$, $i = \overline{1,m},\ 0 \le k \le n$, *which is a generalization of pulses in the transformation Ostrogradsky* $F_L(x) : T^{2n} X_m \to\ T^{2n} X_m$, *induced non-degenerate Lagrangian* $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$.

Studied the law of transformation of order $k = \overline{0,n}$ *component pulses rank* n *at change of coordinates in the base* X_m *of the bundle* $T^n X_m$*, they transform as a tensor of type (0,1) (covectors):*

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(2r-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$$r = \min(n, p), \quad k = \overline{0,n}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Keywords: *Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, fiber space velocities, the momentum of the system, the transformation Ostrogradsky nondegenerate function.*