

УДК 537.5;621.3.032.26

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА КВАЗИСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ В УСТРОЙСТВАХ ПЛАЗМЕННОЙ ЭМИССИОННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

*канд. техн. наук, доц. О.Н. ПЕТРОВИЧ, И.С. РУСЕЦКИЙ*  
(Полоцкий государственный университет)

*На основе метода декомпозиции расчетной области предложена технология построения квазиструктурированных сеток для разработки численных методов расчета электронно- и ионно-оптических систем. Представлены алгоритмы моделирования электромагнитных полей с наложением и без наложения расчетных областей для программной реализации с применением параллельных и последовательных вычислительных схем.*

**Ключевые слова:** квазиструктурированные сетки, численное моделирование, методы расчета электронно-оптических систем, методы расчета ионно-оптических систем.

**Введение.** Компьютерное моделирование процессов формирования пучков заряженных частиц в устройствах плазменной эмиссионной электроники можно рассматривать как совокупность вычислительных задач по расчету электрического и магнитного полей, движения заряженных частиц, объемных зарядов частиц, положения и формы плазменной поверхности. При этом положение и форма плазменного эмиттера оказывают существенное влияние на характеристики пучка [1]. В связи с чем возникает необходимость проводить моделирование положения и формы плазменной поверхности, а также потока заряженных частиц с большей точностью. Точность решения указанных численных задач определяется результатами расчета электрического и магнитного полей.

Для описания стационарных полей используются уравнения Пуассона для скалярного  $\varphi$  и векторного  $\vec{A}$  потенциалов [2] с граничными условиями Дирихле:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\rho$  – объемная плотность заряда;  $\vec{j}$  – плотность тока;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $\vec{B}$  – магнитная индукция.

В области, свободной от токов, для описания магнитного поля можно использовать скалярный магнитный потенциал, который удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0, \quad \vec{B} = -\nabla \varphi_m. \quad (3)$$

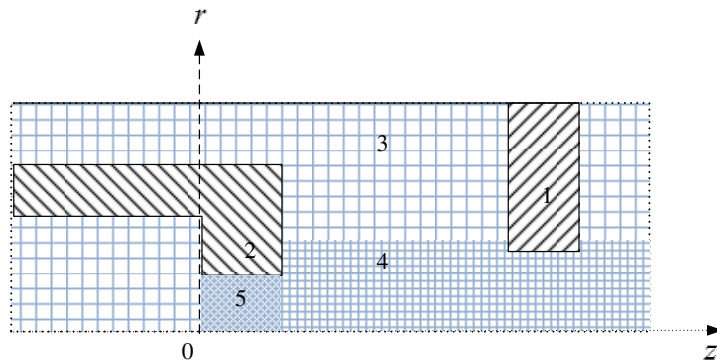
В пакете ELIS [3] численное решение уравнений (1)–(2) по расчету электрического поля, создаваемого системой электродов и объемным зарядом потока частиц, и собственного магнитного поля пучка проводилось методом конечных разностей на квадратной сетке с граничными условиями Дирихле [4].

В данной работе предложена технология построения квазиструктурированных сеток при разработке и программной реализации численных методов расчета электромагнитных полей, основанных на параллельных и последовательных вычислительных схемах.

**Технология построения квазиструктурированных сеток для решения двумерных и трехмерных задач по расчету электромагнитных полей.** С целью усовершенствования алгоритма расчета процессов в устройствах плазменной эмиссионной электроники применим метод декомпозиции расчетной области.

Для полей с аксиальной симметрией разобьем прямоугольную расчетную область в плоскости  $rz$  цилиндрической системы координат (рисунок 1) на три подобласти: внешнюю по отношению к пучку заряженных частиц, обозначенную цифрой 3, внутреннюю – 4 и приэмиттерную – 5. Покроем расчетную область равномерной квадратной макросеткой с шагом  $H$ . По результатам расчета электронно- или ионно-оптической системы на макросетке выделим внутреннюю и приэмиттерную области. Во внутренней области построим более мелкую внутреннюю квадратную сетку с шагом  $h_v = H/n_v$ , в приэмиттерной области еще более густую квадратную сетку с шагом  $h_e = H/n_e$ , где  $n_v$  и  $n_e$  – заданные целые числа. Совокупность макросетки и подсеток образует квазиструктурированную сетку.

Численное моделирование полей будем проводить на квазиструктурированной сетке, расчет движения частиц пучка (траектории, объемный заряд) – на подсетке внутренней области, положение и форму плазменной поверхности будем находить, применяя подсетку приэмиттерной области.



1 – ускоряющий электрод, 2 – фокусирующий электрод  
Рисунок 1. – Квазиструктурированная сетка в расчетной области

В сеточной расчетной области дискретная аппроксимация частных производных в уравнениях (1)–(3) приводит к системе алгебраических уравнений для скалярного и векторного потенциалов поля  $u = \{\varphi, \vec{A}, \varphi_m\}$ :

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{2j+1}{2j} u_{i,j+1} + \frac{2j-1}{2j} u_{i,j-1} + h^2 f_{i,j} \right), \quad (4)$$

$$u_{i,0} = \frac{1}{6} \left( u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + 4u_{i,1} + h^2 f_{i,0} \right), \quad (5)$$

где  $i, j$  – номера узлов; функция  $f = \left\{ -\frac{\rho}{\epsilon_0}, -\mu_0 \vec{j}, 0 \right\}$ ; сеточный шаг принимает одно из значений

$h = \{H, h_v, h_e\}$  в зависимости от того, в какой подобласти расположен узел.

Для решения трехмерных задач электронной и ионной оптики построим пространственные квазиструктурированные сетки, применяя метод декомпозиции расчетной области. В декартовой системе координат  $\{x, y, z\}$  зададим расчетную область в форме параллелепипеда, в которой построим квазиструктурированную сетку, состоящую из макросетки и двух подсеток, ячейки которых геометрически подобны расчетной области. В цилиндрической системе координат сформируем расчетную область в форме цилиндра, а ячейки макросетки и подсеток образованы координатными линиями трех подобластей.

Решение системы алгебраических уравнений для скалярного и векторного потенциалов поля (4)–(5) находим методом итераций на квазиструктурированной сетке с наложением расчетных областей для построения последовательной вычислительной схемы или без наложения расчетных областей для проведения параллельных вычислений.

### Алгоритмы численного моделирования электромагнитных полей на квазиструктурированных сетках

**Алгоритм расчета электромагнитного поля на квазиструктурированной сетке с наложением расчетных областей.** Для поля с аксиальной симметрией построим в расчетной области квазиструктурируемую сетку, состоящую из макросетки и вложенных подсеток в подобласти распространения электронного пучка и приэмиттерной подобласти. Уравнения Пуассона (1)–(2) для самосогласованного электронного поля и собственного магнитного поля пучка, уравнение Лапласа (3) для внешнего магнитного поля, созданного постоянными магнитами или обмотками с токами, находящимися за пределами расчетной области, представим системой алгебраических уравнений (4)–(5).

На первом этапе решение системы (4)–(5) находится на макросетке, заполняющей всю расчетную область. На следующем шаге проводится расчет потенциалов поля  $u$  на внутренней подсетке с учетом значений  $u$  в общих узлах макросетки и подсетки. Затем вычисляются значения потенциалов в приэмиттерной области в дополнительных узлах сетки, вложенной в предыдущую. Таким образом, при расчете полей во внутренней и приэмиттерной подобласти, используются значения потенциалов, полученные в узлах более крупных сеток на предыдущих этапах. При этом на границах подобластей применяются формулы Лагранжа для интерполяции значений потенциалов в узлах, расположенных между узлами более крупных сеток:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} (-u_{i-1} + 9u_i + 9u_{i+1} - u_{i+2}), \quad (6)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}), \quad (7)$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i-1} - u_{i-2}). \quad (8)$$

Изложенный алгоритм расчета электромагнитного поля предназначен для реализации посредством последовательной вычислительной схемы, для повышения сходимости которой используется метод прогонок переменных направлений.

**Алгоритм расчета электромагнитного поля на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей.** Алгоритм расчета электромагнитного поля, основанный на методе декомпозиции расчетной области, был модифицирован с целью распараллеливания вычислений в подобластях. В этом случае, внешняя (3), внутренняя (4) и призматическая (5) подобласти (рисунок 1) сопрягаются без наложения.

Решение вычислительной задачи (4)–(5) проводится в каждой подобласти независимо друг от друга с применением внутреннего итерационного процесса. На границе подобластей полученные решения сшиваются с учетом равенства нормальных производных потенциалов на границе. Для этого строится внешний итерационный процесс, с помощью которого находится решение уравнения Пуанкаре – Стеклова

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^- = 0, \quad (9)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к границе подобластей,  $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^+$  и  $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^-$  – нормальные производные потенциала справа и слева от границы, которые аппроксимируются трехточечными или четырехточечными схемами через значения потенциала в разных подобластях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^+ = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h^+} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^- = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2h^-}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^+ = \frac{-11u_i + 18u_{i+1} - 9u_{i+2} + 2u_{i+3}}{6h^+} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)^- = \frac{-2u_{i-3} + 9u_{i-2} - 18u_{i-1} + 11u_i}{6h^-}. \quad (11)$$

Такой подход создает возможность для автономной аппроксимации уравнения Пуассона в различных подобластях и параллельного нахождения сеточных решений. Для сшивки сеточных решений, полученных в неперекрывающихся подобластях на квазиструктурированной сетке, находятся значения потенциалов полей на границе подобластей:

$$u_i = \frac{1}{6}(4u_{i-1} + 4u_{i+1} - u_{i+2} - u_{i-2}), \quad (12)$$

$$u_i = \frac{1}{22}(18u_{i+1} - 9u_{i+2} + 2u_{i+3} + 2u_{i-3} - 9u_{i-2} + 18u_{i-1}). \quad (13)$$

На границах сеток для интерполяции значений потенциалов применяются формулы Лагранжа (6)–(8).

На рисунке 2 приведены результаты численных расчетов электрического поля в осесимметричной электронно-оптической системе на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей.

Технологии численных решений двумерных задач по расчету электрического и магнитного полей получили дальнейшее развитие при разработке алгоритмов моделирования трехмерных плоских и цилиндрических задач. 3D-алгоритмы построены на конечноразностной аппроксимации уравнений для скалярных потенциалов электрического и магнитного полей в трехмерной постановке в цилиндрической и декартовой системах координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f. \quad (15)$$

На рисунке 3 представлены результаты расчета электрического поля в электронно-оптической системе, формирующей ленточный пучок.

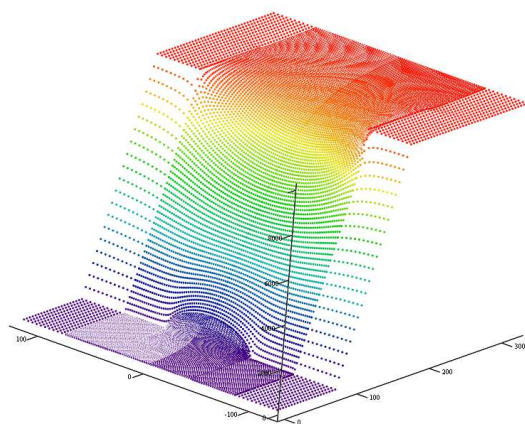


Рисунок 2. – Распределение скалярного потенциала электрического поля на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей

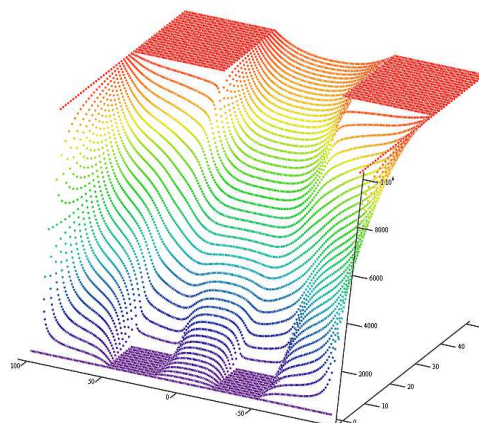


Рисунок 3. – Распределение скалярного потенциала электрического поля в электронно-оптической системе, формирующей ленточный пучок

**Заключение.** Предложена технология проведения численных расчетов устройств плазменной эмиссионной электроники, основанная на методе декомпозиции расчетной области, которая позволяет решать задачу по расчету электрического и магнитного полей на квазиструктурированной сетке, что повышает точность расчета характеристик пучка заряженных частиц.

Приводятся алгоритмы построения квазиструктурированных сеток для решения двумерных осесимметричных и трехмерных плоских и цилиндрических задач по расчету электромагнитных полей. Разработаны методы численного моделирования электромагнитных полей с наложением и без наложения расчетных областей, основанные на параллельных и последовательных вычислительных схемах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17-122).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петрович, О.Н. Моделирование влияния параметров электродной структуры и эмитирующей плазмы на характеристики формируемого остросфокусированного электронного пучка / О.Н. Петрович, А.Ф. Стекольников // Прикладная физика. – 2004. – № 1. – С. 65–72.
2. Ландау, Л.Д. Краткий курс теоретической физики. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1969. – Кн. 1 : Механика. Электродинамика. – 271 с.
3. Петрович, О.Н. Программный комплекс ELIS для моделирования ЭОС ПИЭЛ / О.Н. Петрович, В.А. Груздев // Прикладная физика. – 2012. – № 2. – С. 79–85.
4. Петрович, О.Н. Моделирование электронно-оптических систем с плазменным эмиттером : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / О.Н. Петрович ; Полоцкий государственный университет, 2012. – 199 л.

Поступила 30.03.2018

#### NUMERICAL METHODS OF CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS ON QUASI-STRUCTURED GRIDS IN DEVICES OF PLASMA EMISSION ELECTRONICS

**O. PETROVICH, I. RUSSETSKI**

*On the basis of the decomposition method of the computational domain a technology for constructing quasi-structured grids is proposed. This technology is used for developing of numerical methods for calculating electron- and ion-optical systems. The algorithms for modeling electromagnetic fields with overlapping and without overlapping computational domains, which are applied for software with using parallel and sequential computational schemes, are offered.*

**Keywords:** quasi-structured grids, numerical simulation, methods for calculating electron-optical systems, methods for calculating ion-optical systems.