УДК 517.983

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ Н-ФУНКЦИЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен двумерный аналог модифицированного H*-преобразования с H-функцией в ядре в пространстве интегрируемых функций в области* $R^2_{++} = R^1_+ \times R^1_+$. *Даны условия ограниченности, описание образа изучаемого оператора преобразования, а также устанавливается формула его обращения. Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного модифицированного H-преобразования.*

Ключевые слова: *одномерное и двумерное интегральные модифицированные* H*-преобразования, преобразование Меллина, H-функция, пространство интегрируемых функций.*

1. Введение. Рассматривается интегральное преобразование

$$\left(\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int\limits_0^{\mathrm{x}} \mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)1,\mathrm{p}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)1,\mathrm{q}\end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\mathrm{t})\frac{d\,\mathrm{t}}{\mathrm{t}} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.1}$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2) \in R^2$; $\mathrm{t} = (\mathrm{t}_1, t_2) \in R^2$ – векторы;

$\mathrm{x}\cdot\mathrm{t} = \sum\limits_{k=1}^{2} x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathrm{x}\cdot 1 = \sum\limits_{k=1}^{2} x_k$ для $1 = (1,1)$; $\mathrm{x} > \mathrm{t}$ означает $x_1 > t_1,\ x_2 > t_2$ и аналогично для знаков $\geq, <, \leq$; $\int\limits_0^{\mathrm{x}} := \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}$;

$\mathrm{m} = (m_1, m_2) \in Z^2_+ \cup 0$ и $m_1 = m_2$; $\mathrm{n} = (n_1, n_2) \in Z^2_+ \cup 0$ и $n_1 = n_2$; $\mathrm{p} = (p_1, p_2) \in Z^2_+ \cup 0$ и $p_1 = p_2$; $\mathrm{q} = (q_1, q_2) \in Z^2_+ \cup 0$ и $q_1 = q_2$; $(0 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{q},\ 0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{p})$;

$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2) \in C^2$; $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2) \in C^2$;

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$, $1 \leq i \leq \mathrm{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2} \in C$ $(1 \leq i_1 \leq p_1,\ 1 \leq i_2 \leq p_2)$; $\mathrm{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$, $1 \leq j \leq \mathrm{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2} \in C$ $(1 \leq j_1 \leq q_1,\ 1 \leq j_2 \leq q_2)$;

$\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})$, $1 \leq i \leq \mathrm{p}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \in R^+_1$ $(1 \leq i_1 \leq p_1,\ 1 \leq i_2 \leq p_2)$; $\boldsymbol{\beta}_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2})$, $1 \leq j \leq \mathrm{q}$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2} \in R^1_+$ $(1 \leq j_1 \leq q_1,\ 1 \leq j_2 \leq q_2)$;

$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N$ $(k_1 \in N, k_2 \in N)$ – индекс с $k! = k_1!k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1}(\partial x_2)^{k_2}}$;

$d\,\mathrm{t} = d\,t_1 \cdot d\,t_2$; $\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} = t^{\kappa_1} \cdot t^{\kappa_2}$; $f(\mathbf{t}) = (t_1, t_2)$;

$\mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)1,\mathrm{p}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)1,\mathrm{q}\end{matrix}\right.\right]$ – функция следующего вида:

$$\mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right] = \prod_{k=1}^{2} H^{m_k,n_k}_{p_k,q_k}\left[\frac{x_k}{t_k}\left|\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right] = H^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}\left[\frac{x_1}{t_1}\left|\begin{matrix}(a_{i_1},\alpha_{i_1})_{1,p_1}\\(b_{j_1},\beta_{j_1})_{1,q_1}\end{matrix}\right.\right] \cdot H^{m_2,n_2}_{p_2,q_2}\left[\frac{x_2}{t_2}\left|\begin{matrix}(a_{i_2},\alpha_{i_2})_{1,p_2}\\(b_{j_2},\beta_{j_2})_{1,q_2}\end{matrix}\right.\right], \tag{1.2}$$

представляющая собой произведение H-функций $H^{m,n}_{p,q}[z]$.

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ $(\nu_1 = \nu_2)$, $\overline{2} = (2,2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ на R^2_+, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}} = \left\{\int\limits_{R^1_+} x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left[\int\limits_{R^1_+} x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1,x_2)|^2 dx_1\right]dx_2\right\}^{1/2} < \infty.$$

Даются условия ограниченности оператора преобразования (1.1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения.

Полученные результаты обобщают установленные ранее для соответствующего одномерного модифицированного H-преобразования [1, гл. 5].

2. Предварительные сведения. Для целых неотрицательных m, n, p, q $(0 \le m \le q, 0 \le n \le p)$, комплексных $a_i, b_j \in C$ и положительных α_i, β_j $(1 \le i \le p, 1 \le n \le q)$ значений *H-функция* $H_{p,q}^{m,n}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds,\ z \ne 0, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right| s \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}\right] = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \tag{2.2}$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H-функции (2.1) можно ознакомиться в [1, гл. 1–2].

H-преобразованием называют интегральное преобразование [1]

$$\left(\mathrm{H} f\right)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[xt \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] f(t) dt, \tag{2.3}$$

содержащее H-функцию (2.1) в ядре.

Нам потребуется модифицированное H-преобразование вида

$$\left(\mathrm{H}_{\sigma,\kappa}^{1} f\right)(x) = x^{\sigma} \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] t^{\kappa} f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \tag{2.4}$$

с H-функцией (2.1) $H_{p,q}^{m,n}[z]$ в ядре.

Преобразование (2.4) является модификацией H-преобразования, обобщающего многие интегральные преобразования: преобразования с G-функцией Мейера, преобразования Лапласа и Ханкеля, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с другими функциями гипергеометрического и бесселева типа. Обзор результатов и библиография работ по этой тематике даны в [1, гл. 6–8].

Введем пространство $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $R_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^\infty \left| t^{\nu} f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \le r < \infty,\ \nu \in R), \tag{2.5}$$

заметим, что

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\nu,r}} = \|f\|_{L_r(R_+^1, t^{\nu r - 1})},\ (1 \le r < \infty, \nu \in R).$$

Для функции $f \in \mathfrak{L}_{\nu,r}$ $(1 \le r \le 2)$ *преобразование Меллина* $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2, 3]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{\tau}) e^{s\tau} d\tau \quad (s = \nu + it;\ \nu, t \in R). \tag{2.6}$$

Если $f \in \mathfrak{L}_{\nu,r} \bigcap \mathfrak{L}_{\nu,1}$, $\operatorname{Re}(s) = \nu$, то (2.6) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt \ . \tag{2.7}$$

Двумерное преобразование Меллина функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2)$, $x_1 > 0,\ x_2 > 0$, определяется формулой [3, формула 1.4.42]

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R_{++}^2} f(\mathrm{t}) \mathrm{t}^{\mathbf{s}-1} \, d\, \mathrm{t} \ , \tag{2.8}$$

где $R_{++}^2 = \left\{ \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2 : t_j > 0 \ \ (j = 1,2) \right\}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $s_j \in C \ (j = 1,2)$.

Формула преобразования Меллина от $\mathrm{H}_{\sigma,\kappa}^1$-преобразования (2.4) для «достаточно хороших» функций *f* имеет вид [1, (5.1.14)]

$$(\mathfrak{M} \ \mathrm{H}_{\sigma,\kappa}^1 \ f)(s) = \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{array}{c} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{array} \middle| s + \sigma \right] (\mathfrak{M}f)(s + \sigma + \kappa) \ , \tag{2.9}$$

где $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается выражением (2.2).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\nu,2}$-теорию и формулы обращения модифицированного Н-преобразования (2.4), нам понадобятся перенос следующие постоянные, определяемые через параметры *H*-функции (2.1) [1, (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.10)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min\limits_{1 \le j \le m} \left[\dfrac{\operatorname{Re}(b_j)}{\beta_j} \right], & m > 0; \\ -\infty, & m = 0; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \min\limits_{1 \le i \le n} \left[\dfrac{1 - \operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & n > 0; \\ \infty, & n = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i, \tag{2.11}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}, \tag{2.12}$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1 + \max\limits_{m+1 \le j \le q} \left[\dfrac{\operatorname{Re}(b_j) - 1}{\beta_j} \right], & q > m; \\ -\infty, & q = m; \end{cases} \quad \beta_0 = \begin{cases} 1 + \min\limits_{n+1 \le i \le p} \left[\dfrac{\operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & p > n; \\ \infty, & p = n. \end{cases} \tag{2.13}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$, определенной в (2.2), называется множество вещественных чисел ν, таких, что $\alpha < 1 - \nu < \beta$ и $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ имеет нули на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1 - \nu$.

Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Следующее утверждение представляет $\mathfrak{L}_{\nu,2}$-теорию модифицированного Н-преобразования (2.4).

Утверждение 2.1 [1, теорема 5.37] *Допустим, что*

$$\alpha < \nu - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta, \quad a^* = 0, \Delta[\nu - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) \le 0 \, . \tag{2.14}$$

Верны следующие утверждения

а) Существует инъективное преобразование $\mathrm{H}_{\sigma,\kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\nu,2}, \mathfrak{L}_{\nu - \operatorname{Re}(\kappa+\sigma),2}]$, *такое, что равенство* (2.9) *выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\nu,2}$ *и* $\operatorname{Re}(s) = \nu - \operatorname{Re}(k + \sigma)$.

Если $a^*=0,\ \Delta\left[\nu-\mathrm{Re}(\kappa)\right]+\mathrm{Re}(\mu)=0$ *и* $1-\nu+\mathrm{Re}(\kappa)\notin\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, *то* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *на* $\mathfrak{L}_{\nu-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),2}$.

b) Преобразование $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *не зависит от* ν *в том смысле что, если* ν *и* $\tilde{\nu}$ *удовлетворяют условию* (2.14) *и если преобразования* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *и* $\tilde{\mathrm{H}}^1_{\sigma,\kappa} f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *и* $\mathfrak{L}_{\tilde{\nu},2}$ *равенством* (2.9), *то* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f=\tilde{\mathrm{H}}^1_{\sigma,\kappa} f$ *для* $f\in\mathfrak{L}_{\tilde{\nu},2}\cap\mathfrak{L}_{\nu,2}$.

c) Если $a^*=0,\ \Delta\left[\nu-\mathrm{Re}(\kappa)\right]+\mathrm{Re}(\mu)<0$, *то для* $f\in\mathfrak{L}_{\nu,2}$ $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *дается формулой* (2.4).

d) Пусть $\lambda\in C,\ h>0$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\nu,2}$. *Если* $\mathrm{Re}(\lambda)>(\nu-\mathrm{Re}(\kappa))h-1$, *то* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *представимо в виде*

$$(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f)(x)=hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h}\frac{d}{dx}x^{(\lambda+1)/h}\int\limits_0^\infty H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[\frac{x}{t}\left|\begin{matrix}(-\lambda,h),(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(-\lambda-1,h)\end{matrix}\right.\right]t^{\kappa-1}f(t)dt,\qquad(2.15)$$

а при $\mathrm{Re}(\lambda)<(\nu-\mathrm{Re}(\kappa))h-1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f)(x)=-hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h}\frac{d}{dx}x^{(\lambda+1)/h}\int\limits_0^\infty H^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[\frac{x}{t}\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p},(-\lambda,h)\\(-\lambda-1,h),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]t^{\kappa-1}f(t)dt.\qquad(2.16)$$

e) Если $f\in\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{1-\nu+\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),2}$, *то имеет место формула:*

$$\int\limits_0^\infty f(x)\left(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} g\right)(x)dx=\int\limits_0^\infty\left(\mathrm{H}^2_{\sigma,\kappa} f\right)(x)g(x)dx,\qquad(2.17)$$

где

$$\left(\mathrm{H}^2_{\sigma,\kappa} f\right)(x)=x^\sigma\int\limits_0^\infty H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]t^\kappa f(t)\frac{dt}{x}.\qquad(2.18)$$

Формулы обращения $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования даются равенствами [1, формулы (5.5.23) и (5.5.24)]:

$$f(x)=-hx^{(\lambda+1)/h-\kappa}\frac{d}{dx}x^{-(\lambda+1)/h}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty H^{q-m,p-n+1}_{p+1,q+1}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}(-\lambda,h), & (1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{n+1,p},\ (1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,n}\\(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{m+1,q}, & (1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{1,m},\ (-\lambda-1,h)\end{matrix}\right.\right]t^{-\sigma}(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f)(t)dt\qquad(2.19)$$

или

$$f(x)=hx^{(\lambda+1)/h-1}\frac{d}{dx}x^{-(\lambda+1)/h}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty H^{q-m+1,p-n}_{p+1,q+1}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}(1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{n+1,p},(1-a_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,n},(-\lambda,h)\\(-\lambda-1,h),\ (1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{m+1,q},\quad(1-b_j-\beta_j,\beta_j)_{1,m}\end{matrix}\right.\right]t^{-\sigma}(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f)(t)dt.\qquad(2.20)$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение.

Утверждение 2.2 [1, теорема 5.47] *Пусть*

$$a^*=0,\quad\alpha<\nu-\mathrm{Re}(\kappa)<\beta,\ \alpha_0<1-\nu+\mathrm{Re}(\kappa)<\beta_0,\ \textit{и пусть}\ \lambda\in C,\ h>0.$$

Если $\Delta\left[\nu-\mathrm{Re}(\kappa)\right]+\mathrm{Re}(\mu)=0$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\nu,2}$, *то формулы обращения* (2.19) и (2.20) *справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\lambda)>(1-\nu+\mathrm{Re}(\kappa))h-1$ *и* $\mathrm{Re}(\lambda)<(1-\nu+\mathrm{Re}(\kappa))h-1$.

3. $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ **-теория модифицированного** $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$ **-преобразования.** Введем двумерный аналог функции (2.2):

$$\mathcal{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}(\mathbf{s}) \equiv \mathcal{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right] = \prod_{k=1}^{2}\mathcal{H}^{m_k,n_k}_{p_k,q_k}\left[\left.\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right|s_k\right]. \tag{3.1}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}(\mathbf{s})$ назовем множество векторов $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$, таких, что $\alpha_1<1-\nu_1<\beta_1$, $\alpha_2<1-\nu_2<\beta_2$, и функции $\mathcal{H}^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}(s_1)$, $\mathcal{H}^{m_2,n_2}_{p_2,q_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1)=1-\nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2)=1-\nu_2$ соответственно.

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.8) к $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразованию (1.1) и учитывая (2.9), получаем следующую формулу для «достаточно хороших» функций *f*:

$$\left(\mathfrak{M}\,\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f\right)(\mathbf{s}) = \int\limits_{R^2_{++}} \mathbf{t}^{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}-1}\,d\,\mathbf{t}\int\limits_{0}^{\mathbf{t}} \mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathbf{t}}{\boldsymbol{\tau}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\boldsymbol{\tau})\frac{d\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau}} =$$

$$= \mathcal{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)1,\mathrm{p}\\(\mathbf{b}_j,\boldsymbol{\beta}_j)1,\mathrm{q}\end{matrix}\right|\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}\right](\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\kappa}), \tag{3.2}$$

где $\mathcal{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}(\mathbf{s})$ определяется формулой (3.1).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теорию и формулы обращения модифицированного $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования (1.1), нам понадобятся следующие двумерные аналоги постоянных (2.10) – (2.12):

$$\alpha_1=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}}\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0;\end{cases}\qquad \beta_1=\begin{cases}\min\limits_{1\le i_1\le n_1}\left[\dfrac{1-\mathrm{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}}\right], & n_1>0,\\ \infty, & n_1=0,\end{cases}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}}\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0;\end{cases}\qquad \beta_2=\begin{cases}\min\limits_{1\le i_2\le n_2}\left[\dfrac{1-\mathrm{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}}\right], & n_2>0,\\ \infty, & n_2=0,\end{cases}$$

$$a_1^*=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{\,1}-\sum_{i=n_1+1}^{p_1}\alpha_i^{\,1}+\sum_{j=1}^{m_1}\beta_j^{\,1}-\sum_{j=m_1+1}^{q_1}\beta_j^{\,1},\quad a_2^*=\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i^{\,2}-\sum_{i=n_2+1}^{p_2}\alpha_i^{\,2}+\sum_{j=1}^{m_2}\beta_j^{\,2}-\sum_{j=m_2+1}^{q_2}\beta_j^{\,2},$$

$$\Delta_1=\sum_{j=1}^{q_1}\beta_{j_1}-\sum_{i=1}^{p_1}\alpha_{i_1},\quad \Delta_2=\sum_{j=1}^{q_2}\beta_{j_2}-\sum_{i=1}^{p_2}\alpha_{i_2},$$

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_1}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_1}+\frac{p_1-q_1}{2},\quad \mu_2=\sum_{j=1}^{q_2}b_{j_2}-\sum_{i=1}^{p_2}a_{i_2}+\frac{p_2-q_2}{2},$$

$$\alpha_0^1=\begin{cases}1+\max\limits_{m_1+1\le j_1\le q_1}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(b_{j_1})-1}{\beta_{j_1}}\right], & q_1>m_1;\\ -\infty, & q_1=m_1;\end{cases}\quad \alpha_0^2=\begin{cases}1+\max\limits_{m_2+1\le j_2\le q_2}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(b_{j_2})-1}{\beta_{j_2}}\right], & q_2>m_2;\\ -\infty, & q_2=m_2;\end{cases}$$

$$\beta_0^1=\begin{cases}1+\min\limits_{n_1+1\le i_1\le p_1}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}}\right], & p_1>n_1;\\ \infty, & p_1=n_1;\end{cases}\qquad \beta_0^2=\begin{cases}1+\min\limits_{n_2+1\le i_2\le p_2}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}}\right], & p_2>n_2;\\ \infty, & p_2=n_2;\end{cases}.$$

Теорема 3.1. *Допустим, что*

$$\alpha_1 < \nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_1,\ \alpha_2 < \nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_2, \tag{3.3}$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \quad \Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) \le 0, \quad \Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) \le 0.$$

Верны следующие утверждения

a) Существует инъективное преобразование $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\overline{2}}]$, *такое, что равенство* (3.2) *выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \mathrm{Re}(\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma})$.

Если $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \ \Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0,\ \ \Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0$ *и* $1 - \overline{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}) \notin \mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$, *то* $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\overline{2}}$.

b) Преобразование $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\overline{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют* (3.3) *и если преобразования* $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *и* $\tilde{\mathrm{H}}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством* (3.2), *то* $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f = \tilde{\mathrm{H}}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}} \cap \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

c) Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0,\ \ \Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0,\ \ \Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0$, *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *дается формулой* (1.1).

d) Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_1) \in C^2$, $\overline{h} = (h_1, h_2) > 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (\overline{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))\overline{h} - 1$, *то* $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *представимо в виде*

$$(\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{x}) = \overline{h}\, \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_0^{\mathrm{x}} H^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,q}, (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t}, \tag{3.4}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (\overline{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))\overline{h} - 1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{x}) = -\overline{h}\, \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_0^{\mathrm{x}} H^{\mathrm{m+1,n}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{p}}, (-\overline{\lambda}, \overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t}. \tag{3.5}$$

e) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\overline{2}}$, *то имеет место формула*

$$\int\limits_0^{\mathrm{x}} f(\mathrm{x}) \left(\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}\, g \right)(\mathrm{x})\,d\,\mathrm{x} = \int\limits_0^{\mathrm{x}} \left(\mathrm{H}^2_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f \right)(\mathrm{x})\, g(\mathrm{x})\,d\,\mathrm{x}, \tag{3.6}$$

где

$$\left(\mathrm{H}^2_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f \right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int\limits_0^{\mathrm{x}} H^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}} \left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\mathrm{t}) \frac{d\,\mathrm{t}}{\mathrm{x}}. \tag{3.7}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству **утверждения 2.1** с учетом (1.2), представления (3.2), из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

Получены формулы обращения $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования:

$$f(\mathrm{x}) = -\overline{h}\, \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-\kappa} \frac{d}{d\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\mathrm{x}} H^{\mathrm{q-m,p-n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (1-\mathbf{a}_i - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{\mathrm{n+1,p}}, (1-\mathbf{a}_i - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,\mathrm{n}} \\ (1-\mathbf{b}_j - \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{\mathrm{m+1,q}},\ \ (1-\mathbf{b}_j - \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,\mathrm{m}}, (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{-\boldsymbol{\sigma}} (\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} \tag{3.8}$$

или

$$f(\mathrm{x}) = \overline{h}\,\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\frac{d}{d\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int_0^{\mathrm{x}} H^{\mathrm{q-m+1,\,p-n}}_{\mathrm{p+1,\,q+1}}\left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}}\left|\begin{matrix}(1-\mathbf{a}_i-\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)_{\mathrm{n+1,p}},(1-\mathbf{a}_i-\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)_{\mathrm{1,n}},(-\overline{\lambda},\overline{h})\\(-\overline{\lambda}-1,\overline{h}),\,(1-\mathbf{b}_j-\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)_{\mathrm{m+1,q}},\quad(1-\mathbf{b}_j-\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)_{\mathrm{1,m}}\end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{-\boldsymbol{\sigma}}(\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}f)(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,. \quad (3.9)$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть*

$$a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \ a^* = 0,\ \alpha_1 < \nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_1,\ \alpha_2 < \nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_2,$$

$$\alpha_0^1 < 1-\nu_1 + \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_0^1,\ \alpha_0^2 < 1-\nu_2 + \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_0^2,\ \textit{и пусть}\ \overline{\lambda}\in C^2,\ \overline{h} > 0.$$

Если $\Delta_1\left[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)\right] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0,\quad \Delta_2\left[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)\right] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, *то формулы обращения* (3.8) и (3.9) *справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))\overline{h}-1$ *и* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))\overline{h}-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006. – 523 p.

Поступила 20.03.2018

TWO-DIMENTIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE H-FUNCTION IN THE KERNEL IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

O. SKOROMNIK

Two-dimentional analog of modified H- *transform involving H- function in the kernel is studied on the space of summable functions on a domain* $R^2_{++} = R^1_+ \times R^1_+$. *Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formula is established. The results generalize the well know findings for corresponding one-dimentional integral transform.*

Keywords: *one-dimensional and two-dimensional integral modified H-transforms, Mellin transform, H-function, space of integrable functions.*