МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 **DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-72-83**

О КРИТЕРИИ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложено новое доказательство критерия гладкости на f классического решения F уравнения $u_{tt}(x,t)-a^2(x,t)u_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=]0,+\infty]\times]0,+\infty]$. Критерий состоит из необходимых и достаточных требований ограниченных непрерывности f и непрерывной дифференцируемости двух интегралов от f на G_∞. Необходимость непрерывности и ограниченности f следует из этого уравнения, которому удовлетворяет F на G_∞. Эти два интеграла непрерывно и ограниченно дифференцируемы как производные от $F\in C^2(G_\infty)$ вдоль характеристик уравнения. Отсюда вытекает их достаточность для $F\in C^2(G_\infty)$. Если f зависит лишь от x или t, то f непрерывна и ограничена по x или t. Построен общий интеграл модельного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: *модельное телеграфное уравнение, одна переменная скорость, неявные характеристики, классическое решение, критерий гладкости, общий интеграл.*

Введение. В настоящей статье предложен простой вывод (без метода корректировки) критерия (необходимых и достаточных условий) гладкости правой части неоднородного модельного телеграфного уравнения с одной переменной скоростью $a(x,t)$ для его явного классического решения F в первой четверти плоскости. Более простое доказательство критерия гладкости, чем в работах [1; 2], возможно только благодаря простейшему виду волнового уравнения, так как в случае одной как постоянной $a_1=a_2=a$, так и переменной скорости $a_1(x,t)=a_2(x,t)=a(x,t)$ эта функция F является дважды непрерывно дифференцируемой в первой четверти плоскости и поэтому не требует корректировки (замечание 2). В работах [3; 4] показана не дважды непрерывная дифференцируемость функции типа F в первой четверти плоскости для волнового уравнения $u_{tt}+(a_1-a_2)u_{xt}-a_1a_2u_{xx}=f(x,t)$ с разными скоростями $a_1\neq a_2$, и, следовательно, обобщённое решение F требует корректировки обобщёнными решениями до классических решений этого уравнения в первой четверти плоскости. Нужны корректировки и некоторых классических решений для построения новых классических решений. Основы метода корректировки пробных решений лежат в критическом анализе учебников (замечание 3).

Итак, в настоящей статье без метода корректировки доказан критерий гладкости на правую часть f модельного телеграфного уравнения, при котором функция F дважды непрерывно дифференцируема и поточечно удовлетворяет этому уравнению в первой четверти плоскости. Поэтому производные от F вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения представляют необходимые интегральные требования гладкости (8) на правую часть f уравнения (1). Достаточность интегральных требований гладкости (8) на f устанавливается дифференцированием функции F. Справедливость модельного телеграфного уравнения (1) для F в первой четверти плоскости выводится предельным переходом по f с непрерывно дифференцируемых правых частей f на непрерывные f со свойствами (8). С помощью этого обоснованного классического решения F неоднородного модельного телеграфного уравнения построен его общий интеграл в первой четверти плоскости для решения смешанных (начально-граничных) задач. В статье автора [5] исследуемая формула его классического решения во всей первой четверти плоскости использовалась при решении первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения без продолжений исходных данных. В ней модельное телеграфное уравнение позаимствовано из диссертации[1], где решалась первая смешанная задача методом продолжений исходных данных. В указанной диссертации первая смешанная

[1] Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 1991. – 59 с.

задача в полуполосе плоскости за счёт периодических продолжений коэффициентов и входных данных на верхнюю полуплоскость сведена к задаче Коши и формуле Даламбера, которые в [5] естественно отсутствуют на $G_+ \subset G_\infty$ при не продолжении данных.

Более сложным смешанным задачам для волновых уравнений с разными постоянными коэффициентами $a_1 \neq a_2$ посвящены работы Новикова Е. Н.[2] и Устилко Е. В. [6] соответственно с нехарактеристическими и характеристическими первыми косыми производными, Лысенко В. В. [7] и Спесивцевой К. А. [8] соответственно с нехарактеристическими и характеристическими вторыми частными производными в нестационарных граничных условиях. В них найдены явные классические решения и критерии корректности этих смешанных задач. В случае нехарактеристических первых и вторых частных производных в граничных условиях требования гладкости и условия согласования не меняются при неограниченном росте времени колебаний. В случае же характеристических этих производных в граничных условиях выше требования гладкости и больше условий согласования исходных данных смешанных задач и они неограниченно растут вместе с ростом времени колебаний. В последних работах требуются критерии гладкости правой части общих волновых уравнений с $a_1 \neq a_2$ для уже скорректированных решений из множеств решений произвольных целых порядков гладкости.

Смешанные задачи для модельного телеграфного уравнения и более общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами нельзя решить методом Фурье, так как эти уравнения не допускают разделения переменных x и $t.$ В статьях [9–11] для волнового уравнения найдены формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи. Это решение удовлетворяет волновому уравнению почти всюду по x и $t.$ В [12] секвенциальным и аксиоматическим методами А. П. Хромова из этих работ И. С. Ломовым получено обобщенное решение в виде быстро сходящегося ряда Фурье смешанной задачи для простейшего телеграфного уравнения с потенциалом $q(x,t),$ мажорирующимся функцией $q_0(x) \in L_1(0,1),$ при нелокальном граничном условии на отрезке $[0,1].$ Эти методы используют резольвентный метод, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и Л. Эйлера о расходящихся рядах и аксиоматику.

1. Модельное телеграфное уравнение. В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ ищется классическое решение $F(x,t)$ с минимальной гладкостью правой части $f(x,t)$ уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

где f – заданная вещественная функция переменных x и $t,$ коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0,$ $(x,t) \in G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[,$ и $a \in C^2(G_\infty).$ Мы обозначаем числом нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество функций с непрерывными ограниченными производными до порядка k включительно на подмножестве $\Omega \subset R^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ – множество непрерывных ограниченных функций на $\Omega \subset R^2,$ $R =]-\infty,+\infty[.$

Общеизвестно, что уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt, i = 1, 2, \quad (2)$$

которые имеют общие интегралы характеристик уравнения (1)

$$g_1(x,t) = C_1, \quad g_2(x,t) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R. \quad (3)$$

Если коэффициент a строго положителен, т. е. $a(x,t) \geq a_0 > 0,$ $(x,t) \in G_\infty,$ то в плоскости Oxt переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1, C_1 \in R,$ строго убывает и на характеристиках $g_2(x,t) = C_2, C_2 \in R,$ строго возрастает вместе с ростом $x.$ Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i, x \geq 0, t \geq 0,$ имеют строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i,t\}, t \geq 0,$ $t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0,$ $i = 1, 2.$ По определению обратных отображений они удовлетворяют на G_∞ следующим тождествам обращения [5]:

$$g_i(\,h_i\{y_i,t\},t) = y_i, \quad \forall\, y_i, \qquad h_i\{g_i(x,t),t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

---

[2] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

$$g_i\ (x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad \forall\, y_i, \quad h^{(i)}[x, g_i(x,t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

В правых частях тождеств (4)–(6) вместе с взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если в уравнении коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0,\ (x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, то непрерывные ограниченные функции $g_i,\ h_i,\ h^{(i)}$ имеют непрерывные ограниченные первые и вторые частные производные по $x, t, y_i,\ i = 1, 2,$ на G_∞ [5].

Определение 1. Функция $u = u(x,t)$ называется к л а с с и ч е с к и м решением уравнения (1) на множестве $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, если она ограничена на $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, имеет ограниченные производные гладкости $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле для каждого $(x,t) \in \Omega \cap \dot{G}_\infty$.

Замечание 1. В случае $a(x,t) = a = const > 0$ характеристиками (3) являются функции: $g_1(x,t) = x + at$, $g_2(x,t) = x - at$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x)/a$, $h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2)/a$ в диссертации[3]. Важно отметить, что в указанной диссертации получены критерий корректности и явные формулы единственного и устойчивого классического решения с F из (7) при $a(x,t) = const > 0$ смешанной задачи при нехарактеристических первых косых производных граничных условий в первой четверти плоскости G_∞ без явных продолжений исходных данных задачи вне G_∞.

Ниже указано классическое решение уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$ и критерий (необходимые и достаточные условия) гладкости на f в G_∞. Благодаря модулю $|s|$ под интегралом (7) функции $a(|s|, \tau)$ характеристики (3) неявно продолжаются чётно по x с G_∞ на всю верхнюю полуплоскость.

2. Критерий гладкости классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения. Классические решения этого волнового уравнения можно вычислять методом корректировки его пробных решений из [3]. Не используя метод корректировки, одно из классических решений неоднородного модельного телеграфного уравнения с критерием гладкости его правой части даёт

Теорема 1. Пусть коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0,\ (x,t) \in G_\infty,\ a \in C^2(G_\infty)$. Функция

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)}\, ds\, d\tau \tag{7}$$

является классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_∞ тогда и только тогда, когда его правая часть $f \in C(G_\infty)$ и

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}\ \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i}\ d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $f \in C(G_\infty)$ и $H_i \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2.$ Тогда по формулам производных от интеграла с переменными пределами интегрирования и сложной функции для функции $f \in C(G_\infty)$ интеграл F вида (7) имеет на G_∞ непрерывные ограниченные первые производные

$$F_t = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}\ \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}\ \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau =$$

$$= \left(g_1(x,t)\right)_t \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}\ \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau -$$

[3] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

$$-\left(g_2(x,t)\right)_t \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C(G_\infty), \tag{9}$$

$$F_x = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right] d\tau =$$

$$= \left(g_1(x,t)\right)_x \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial g_1} d\tau -$$

$$-\left(g_2(x,t)\right)_x \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C(G_\infty) \tag{10}$$

в силу вторых тождеств обращения из (4) при $i = 1, 2.$

Из равенств (9), (10) и интегральных требований гладкости (8) на G_∞ вытекает, что интеграл F вида (7), очевидно, обладает непрерывными ограниченными вторыми частными производными на G_∞, т. е. $F \in C^2(G_\infty),$ и без явных чётных продолжений функций f и a по x с $x \geq 0$ на $x < 0$, так как на G_∞ дважды непрерывно дифференцируемы функции $g_i \in C^2(G_\infty),\ i = 1, 2.$

Остаётся проверить, что если функция f зависит от x и $t,$ то функция $F \in C^2(G_\infty)$ вида (7) удовлетворяет поточечно уравнению (1) на $\dot{G}_\infty$ (см. следствие 1). Сначала покажем, что непрерывно и ограниченно дифференцируемые правые части $f \in C^1(G_\infty)$ удовлетворяют требованиям гладкости (8). Заменами $s_i = h_i\{g_i(x,t),\tau\}$ переменной интегрирования τ интегралы из (8) приводятся к интегралам

$$H_i(x,t) = \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\ \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\ d\tau =$$

$$= \int_{h_i\{g_i(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|s_i|,\tau)}{a(|s_i|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\left(\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial \tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau = h^{(i)}[s_i,\, g_i(x,t)]} ds_i \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2, \tag{11}$$

которые для $f \in C^1(G_\infty)$ непрерывно и ограниченно дифференцируемы по x и t на $G_\infty,$ потому что в интегралах (11) под модулем $|s_i|$ переменной интегрирования s_i явно отсутствуют x и $t.$ В противном случае модуль дал бы разрыв первых производных от (11). Здесь мы применили вторые тождества обращения из (4) и равенства $\tau = h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)],\ \ i = 1, 2,$ ввиду вторых тождеств обращения из (6).

Известно, что для любых непрерывно и ограниченно дифференцируемых функций $f \in C^1(G_\infty)$ интеграл F вида (7) дважды непрерывно дифференцируем и удовлетворяет поточечно уравнению (1) на $\dot{G}_\infty$ [4] [5]. В этом также можно убедиться подстановкой функции (7) в уравнение (1). Поэтому модельное телеграфное уравнение (1) предельным переходом по f распространяется с функций $f \in C^1(G_\infty)$ на функции $f \in C(G_\infty)$ со свойствами (8) в норме соответствующего банахова пространства из [5].

Необходимость. Если интеграл F вида (7) – классическое решение уравнения (1) на $G_\infty,$ то из определения 1 имеем, что $F \in C^2(G_\infty)$ и, в силу поточечной справедливости уравнения (1) на $G_\infty,$ его правая часть непрерывна и ограничена $f \in C(G_\infty).$ Теперь для выявления дополнительных необходимых (обязательных) требований гладкости (8) на правую часть f к уже установленной непрерывности и ограниченности $f \in C(G_\infty)$ вычисляем производную от F из (7) вдоль характеристик $g_i(x,t) = C_i$ из (3), т. е.

[4] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

вдоль векторов $\vec{\sigma}_i = \{(g_i)_t, -(g_i)_x\}$, $i = 1, 2$. Ортогональные к ним векторы градиентов $\overrightarrow{grad}\, g_i(x,t) = \{(g_i)_x, (g_i)_t\}$, $i = 1, 2$, направлены вдоль нормалей к этим характеристикам, так как их скалярное произведение равно $\left(\overrightarrow{grad}\, g_i(x,t), \vec{\sigma}_i\right) = (g_i)_x (g_i)_t - (g_i)_t (g_i)_x = 0$, $(x,t) \in G_\infty$.

Ввиду (9) и (10) производные вдоль характеристик (3) от дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемой функции $F \in C^2(G_\infty)$ являются непрерывно и ограниченно дифференцируемыми:

$$(g_1)_t F_x - (g_1)_x F_t = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J(x,t) \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial g_2}\, d\tau \in C^1(G_+), \tag{12}$$

$$(g_2)_t F_x - (g_2)_x F_t = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J(x,t) \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial g_1}\, d\tau \in C^1(G_+), \tag{13}$$

так как для частных производных от функций $h_i = h_i\{g_i(x,t), \tau\}$ справедливы соотношения

$$(g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial t} - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial x} =$$

$$= (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x \equiv 0, \ i = 1, 2.$$

$$(g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} =$$

$$= [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x\,] \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial g_2} = J(x,t) \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial g_2},$$

$$(g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} =$$

$$= [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x\,] \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial g_1} = J(x,t) \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial g_1}.$$

Из равенств (12), (13) следует справедливость включений (8), так как замена переменных

$$\xi = g_1(x,t), \quad \eta = g_2(x,t) \tag{14}$$

имеет невырожденный, непрерывно и ограниченно дифференцируемый якобиан $J(x,t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$ в G_∞ и $J \in C^1(G_\infty)$, так как коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Действительно, из равенств (12) и (13) следует необходимость (обязательность) требований гладкости (8):

$$H_1(x,t) = 2[(g_2)_t F_x(x,t) - (g_2)_x F_t(x,t)] / J(x,t) \in C^1(G_\infty),$$

$$H_2(x,t) = 2[(g_1)_t F_x(x,t) - (g_1)_x F_t(x,t)] / J(x,t) \in C^1(G_\infty).$$

Необходимость интегральных требований гладкости (8) установлена. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В работах [1; 2] выполнение уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$ для интеграла $F \in C^2(G_\infty)$ вида (7) также подтверждает подстановка функции $F \in C^2(G_\infty)$ в канонический вид

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta) / \left[2a(x,t)J(x,t)\right], \quad (\xi,\mu) \in \tilde{G}_\infty, \tag{15}$$

уравнения (1) после невырожденной и дважды непрерывно дифференцируемой замены переменных (14) с помощью (2). В правой части уравнения (15) функция $\tilde{f}(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ и в его левой части функция $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)$ на образе $\tilde{G}_\infty$ первой четверти плоскости G_∞ при замене (14). Каждое дважды непрерывно дифференцируемое по переменным (x,t) решение $u(x,t)$ уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$ в результате замены (14) будет дважды непрерывно дифференцируемым по переменным (ξ,η) решением $\tilde{u}(\xi,\eta)$ уравнения (15) на $\tilde{G}_\infty$ и наоборот. Но не все классические (непрерывно дифференцируемые с непрерывной смешанной производной) по новым переменным (ξ,η) решения уравнения (15) на $\tilde{G}_\infty$ после обратной замены к (14) становятся классическими (дважды непрерывно дифференцируемыми) по переменным (x,t) решениями уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$. Поэтому только дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые решения уравнения (15) будут классическими решениями уравнения (1) после обратной замены к (14). Дважды непрерывная и ограниченная дифференцируемость функции F вида (7) на G_∞ доказана в [1; 2] обобщением метода корректировки и непосредственным дифференцированием по новым переменным (ξ,η) функции $\tilde{F}$, полученной заменой переменных (14) из F.

Следствие 1. *Пусть коэффициент $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. Если правая часть f уравнения (1) не зависит от x или t в G_∞, то для того, чтобы функция F из (7) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_∞, необходимо и достаточно непрерывности и ограниченности f соответственно по t или x.*

Доказательство. Достаточность непрерывности и ограниченности $f \in C[0,+\infty[$ по x или t объясняется тем, что в случае зависимости правой части f уравнения (1) только от x или t на G_∞ интегральные требования гладкости (8) всегда выполняются.

Если правая часть $f = f(x)$ не зависит от t, то функция F из (7) приобретает вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|)}{a(|s|,\tau)}\, ds\, d\tau. \tag{16}$$

Согласно доказательству достаточности теоремы 1 для справедливости требований гладкости (8) для (16) нам достаточно обосновать включение $F \in C^2(G_\infty)$. Проверим, что $F \in C^2(G_\infty)$ для $f \in C[0,+\infty[$. Первая частная производная по t от (16) равна функции

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t)|,\tau\})}{a(|h_1\{g_1(x,t)|,\tau\},\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t)|,\tau\})}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

в которой мы применили вторые тождества обращения из (4). Когда мы здесь перейдем к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z = h_2\{g_2(x,t),\tau\}$, тогда мы получим уже очевидное непрерывно и ограниченно дифференцируемое на G_∞ представление этой производной

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_{h_1\{g_1(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau = h^{(1)}[y, g_1(x,t)]} dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|z|)}{a(|z|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau = h^{(2)}[z, g_2(x,t)]} dz \in C^1(G_\infty),$$

в котором мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (4) и тождествами $\tau = h^{(1)}[y, g_1(x,t)]$, $\tau = h^{(2)}[z, g_2(x,t)]$ благодаря вторым тождествам обращения из (6). В последних интегралах под модулями $|y|$ и $|z|$ явно нет переменных x и t, иначе модули дали бы разрыв производных от $\partial F / \partial t$.

Для всех $f \in C[0,+\infty[$ первой частной производной по x от (16) является функция

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t)|,\tau\})}{a(|h_1\{g_1(x,t)|,\tau\},\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t)|,\tau\})}{a(|h_2\{g_2(x,t)|,\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

в которой мы использовали вторые тождества обращения из (4). После перехода к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z = h_2\{g_2(x,t),\tau\}$ эта частная производная приобретает очевидное для $f \in C[0,+\infty[$ непрерывно и ограниченно дифференцируемое на G_∞ представление

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau=h^{(1)}[y,g_1(x,t)]} dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|z|)}{a(|z|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]\Bigg|_{\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]} dz \in C^1(G_\infty),$$

где мы применили те же самые тождества, что и для частной производной по t от F.

Если правая часть $f = f(t)$ не зависит от x, то функция F из (7) принимает вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\tau)}{a(|s|,\tau)}\, ds\, d\tau. \tag{17}$$

Проверим дважды непрерывную и ограниченную дифференцируемость функции (17) для $f \in C[0,+\infty[$. Ввиду вторых тождеств обращения из (4) для всех $f \in C[0,+\infty[$ все её первые частные производные непрерывно и ограниченно дифференцируемы на G_∞ :

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} \right] d\tau \in C^1(G_\infty),$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \right] d\tau \in C^1(G_\infty),$$

если здесь так же, как и выше, воспользоваться заменами переменной интегрирования $y = h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z = h_2\{g_2(x,t),\tau\}$. Отсюда мы имеем $F \in C^2(G_\infty)$.

Итак, достаточность гладкости и ограниченности $f \in C[0,+\infty[$ по x или t для $F \in C^2(G_+)$ проверена. Факт выполнения уравнения (1) поточечно на $\dot{G}_\infty$ для функции F вида (7) с непрерывной, ограниченной и зависящей только от x или t правой частью $f \in C[0,+\infty[$ вытекает из теоремы 1.

Необходимость непрерывности и ограниченности $f \in C[0,+\infty[$ по t или x следствия 1 строго обоснована в доказательстве теоремы 1 с помощью уравнения (1). Доказательство следствия 1 завершено.

Замечание 3. Интеграл F в (7) содержит модуль $|s|$ точек струны подынтегральных функций f, a. В отличие от значений начальных данных φ и ψ на характеристиках $x \pm at = \pm C$, $C \in R$, (однородного) уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ аналог нашего частного решения F вида (7) с модулем нижнего предела интегрирования $|x - a(t-\tau)|$ из формулы (31) в [13, с. 83] неоднородного уравнения не имеет точно такой же интерпретации: общее решение этого однородного уравнения – суперпозиция (арифметическая сумма) двух встречных волн. Для функций $f \in C^1(G_\infty)$ и даже менее гладких в теореме 1 наш интеграл F из (7) дважды непрерывно дифференцируем в первой четверти плоскости G_∞, а даже для более гладких функций f вторые производные от этого аналога F из формулы (31) в [13] терпят разрывы на $x = at,$ и эта функция F является непрерывным кусочно-дифференцируемым решением простейшего уравнения колебаний струны в [13]. Поэтому для этого аналога F из [13] не следует продолжать правую часть f волнового уравнения нечётно по x с $x \ge 0$ на $x < 0$ при решении первой и других смешанных задач на полупрямой. Вообще не надо явно как-то продолжать f вне G_∞, а неявно её чётно по x продолжает указанный выше модуль. В настоящей статье и в [13] интеграл F вида (7) – интегральная сумма двух встречных волн с одной скоростью a. В учебнике [13, рисунок 19, п. 9, § 2, глава II] двойной интеграл по характеристическому треугольнику ΔMBA с вершиной $M(x,t)$ при $at > x$ равен двойному интегралу по четырёхугольнику $MBA'A$ из-за нечётного продолжения f по x с $x \ge 0$ на $x < 0.$ Это искажает реальный процесс колебаний струны, потому что в треугольнике $OA'A$ действует вынуждающая сила с плотностью f, а функция F никак не реагирует на эту силу. Это абсурд, так как треугольник $OA'A$ примыкает к граничному условию при $x = 0.$ Таким образом, в [13, с. 83] для классических решений первой смешанной задачи на полупрямой лучше использовать F из (7) при $a(x,t) = a > 0$ и с модулем $f(|s|, \tau)$ под интегралом вместо модуля в нижнем пределе интегрирования. В диссертации[5] правильность классического решения с F из (7) смешанной задачи на полупрямой при первой косой производной в граничном условии доказана и проверена на компьютере в системе Mathematics.

Следствие 2. *Пусть коэффициент* $a(x,t) \ge a_0 > 0,$ $(x,t) \in G_\infty,$ $a \in C^2(G_\infty).$ *Если функция* f *зависит от* x *и* t, *то для* $f \in C(G_\infty)$ *требование принадлежности интегралов из (8) пространству* $C^1(G_\infty)$ *эквивалентно их принадлежности одному из пространств* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *или* $C^{(1,0)}(G_\infty)$. *Здесь* $C^{(0,1)}(G_\infty)$, $C^{(1,0)}(G_\infty)$ *– соответственно пространства непрерывных, ограниченных по* x *и* t *и непрерывно и ограниченно дифференцируемых по* t *и* x *функций на множестве* G_∞.

Доказательство. Для гладкости (8) с функциями $f \in C(G_\infty)$ **необходимость** $H_i \in C^{(1,0)}(G_\infty)$, $C^{(0,1)}(G_\infty)$, $i = 1, 2,$ очевидна: если в любой точке множества G_∞ функция $H_i \in C(G_\infty)$, $i = 1, 2,$ непрерывно и ограниченно дифференцируема одновременно по x и t, то в любой точке множества G_∞ она непрерывно дифференцируема по каждой из этих переменных в отдельности.

Достаточность. Пусть $C^{(k,p)}(G_\infty)$ – банаховы пространства функций $f \in C(G_\infty)$, полученных замыканием множества функций $f \in C^1(G_\infty)$, удовлетворяющих гладкости (8) на G_∞, по нормам

$$\|f\|_{(k,p)} = \sup_{(x,t)\in G_\infty}\left(|f(x,t)| + \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{p}\left|\frac{\partial^{s+j}H_i(x,t)}{\partial x^s \partial t^j}\right|\right),\ 0 \le k,\ p \le 1.$$

Сначала убедимся в равенстве банаховых пространств $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$.

Для более гладких ограниченных функций $f \in C^1(G_\infty)$ берём частную производную по t от (11)

$$\frac{\partial H_i(x,t)}{\partial t} = \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),t\}|,t)}{a(|h_i\{g_i(x,t),t\}|,t)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),t\}}{\partial g_i} + \int_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\right]'_t d\tau =$$

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,t)}\,\frac{1}{(g_i)_x} + (-1)^{i+1}a(x,t)\int_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\,\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\right]'_x d\tau =$$

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,t)}\,\frac{1}{(g_i(x,t))_x} + (-1)^{i+1}a(x,t)\frac{\partial H_i(x,t)}{\partial x},\ i = 1, 2, \tag{18}$$

[5] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

в силу вторых тождеств обращения из (4), формулы производной обратной функции и

$$(g_i)_t = (-1)^{i+1} a(x,t)(g_i)_x, \ (x,t) \in G_\infty, \ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i}(g_i)_t =$$

$$= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i}(g_i)_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial t \partial g_i} = \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2}(g_i(x,t))_t =$$

$$= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2}(g_i(x,t))_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial x \partial g_i}, \ (x,t) \in G_\infty, \ i = 1, 2.$$

В равенствах (18) из первых и самых последних их частей, которые не содержат явных производных от функции f по x и t на G_∞, мы переходим к пределу по f с более гладких $f \in C^1(G_\infty)$, удовлетворяющих (8) на G_∞, в нормах $\|f\|_{(0,1)}$ и $\|f\|_{(1,0)}$ их левых и правых частей на непрерывные ограниченные функции $f \in C(G_\infty)$ из пространств $C^{(0,1)}(G_\infty)$ и $C^{(1,0)}(G_\infty)$. В результате этого предельного перехода по f приходим к равенству пространств $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$.

Если для $f \in C(G_\infty)$ в (8) интегралы $H_i \in C^{(0,1)}(\dot{G}_\infty)$, $i = 1, 2$, и, в частности, ограниченно непрерывны по x и непрерывно дифференцируемы по t в некоторых окрестностях внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$, то ввиду равенства $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$ интегралы $H_i \in C^{(1,0)}(G_\infty)$, $i = 1, 2$, т. е. ограниченно непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по t в окрестностях внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$. Известно, что из существования ограниченных и непрерывных первых частных производных по x и t в некоторых окрестностях всех внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ следует ограниченно непрерывная дифференцируемость во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ интегралов $H_i \in C^1(\dot{G}_\infty)$, $i = 1, 2$. Поскольку по теореме 1 гладкость $F \in C^2(G_\infty)$ равносильна гладкости $H_i \in C^1(G_\infty)$, $i = 1, 2$, на замыкании G_∞, то гладкость $H_i \in C^1(\dot{G}_\infty)$, $i = 1, 2$, со внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ распространяется предельным переходом по f на граничные точки, т. е. $H_i \in C^1(G_\infty)$, $i = 1, 2$. Отсюда вытекает **достаточность** следствия 2.

Замечание 4. В формуле (18) значения $i = 1$ и $i = 2$ соответствуют значениям $i = 2$ и $i = 1$ замечания 2.1 в диссертации[6] при $a(x,t) = a = const > 0$ из-за взаимно обратного соответствия характеристик.

3. Общий интеграл неоднородного модельного телеграфного уравнения. При решении смешанных (начально-граничных) задач для модельного телеграфного уравнения (1) методом характеристик из [13] важно знать его общий интеграл.

Теорема 2. *Пусть* $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ *и для* $f \in C(G_\infty)$ *выполняются условия (8). Тогда общим интегралом уравнения (1) на* G_∞ *во множестве классических (дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемых на* G_∞*) решений являются функции*

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t), \ (x,t) \in G_\infty, \tag{19}$$

где $\tilde{f}_1$ *и* $\tilde{f}_2$ *– любые дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые функции по* ξ, η *вида*

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)), \ \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)). \tag{20}$$

[6] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

Доказательство. Согласно теореме 1 предположения теоремы 2 гарантируют то, что действительно функция $F \in C^2(G_\infty)$ и поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) на $\dot{G}_\infty$. Поэтому во множестве классических решений сумма

$$u_0(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)), \quad (x,t) \in G_\infty, \tag{21}$$

служит общим интегралом однородного уравнения (1) при $f = 0$ на G_∞. Сумма (21) получается интегрированием по ξ и η однородного уравнения (14) при $\tilde{f} = 0$. Тогда формула (19) является множеством всех классических решений неоднородного уравнения (1) на G_∞ благодаря теореме 1.

Функции (20) выводятся «методом погружения в решения с фиксированными значениями» в [7]. В общем интеграле (19) постоянная $f_2(g_2(0,0))$ сокращается, но очевидное значение $\tilde{f}_2(g_2(0,0)) = 0$ из (20) существенно упрощает решение систем дифференциальных уравнений при решении смешанных задач для (1) методом характеристик, например, в [7] и упростило бы в диссертации[7] и других источниках. Теорема 2 доказана.

Гладкий, ограниченный и невырожденный коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$ и, следовательно, дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые подынтегральные функции g_i, h_i, $h^{(i)}$ по x, t, y_i, $i = 1, 2$, на G_∞ не препятствуют требованиям (8) на $f \in C(G_\infty)$.

Замечание 5. Для коэффициента $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ интегральные требования гладкости из (8) на непрерывную и ограниченную правую часть $f \in C(G_\infty)$ равносильны требованиям

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)\, d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2.$$

Заключение. Дано доказательство дважды ограниченно непрерывной дифференцируемости решения F вида (7) неоднородного модельного телеграфного уравнения (1) в первой четверти плоскости G_∞. Критерий гладкости состоит из непрерывности и ограниченности правой части f и двух интегральных требований (8) на f в G_∞. Построен общий интеграл (19) из дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемых функций при решении смешанных задач для уравнения (1) на G_∞.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lomovtsev F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – БГУ : ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
2. Ломовцев Ф. Е. Критерий гладкости частного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 99–116. – DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116.
3. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
4. Ломовцев Ф. Е. В криволинейной первой четверти плоскости метод корректировки пробных решений для минимальной гладкости правой части волнового уравнения с постоянными коэффициентами // Весн. Віцеб. дзярж. ўн-та. – 2021. – № 4(113). – С. 5–22.
5. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
6. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2(56). – С. 21–36.

[7] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

7. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. Смешанная задача для общего одномерного волнового равнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2021. – № 2(58). – С. 28–54.
8. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения с характеристическими вторыми производными в нестационарном граничном режиме // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, вып. 3. – С. 345–357. – DOI: 10.4213/mzm13243.
9. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 484, № 1. – С. 18–20. – DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.
10. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. № 5. – С. 717–731. – DOI: 10.1134/S0374064119050121.
11. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы / г. Саратов (31 янв. – 4 февр. 2022 г.). – Саратов: Саратовский университет, 2022. – Вып. 2. – С. 319–324.
12. Ломов И. С. Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 11. – С. 1471–1483. – DOI: 10.31857/S0374064122110048.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 2004. – 798 с.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriteriy gladkosti klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya pri skorosti *a(x,t)* na poluosi [The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriterii gladkosti chastnogo klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti [Smoothness Criterion for a Particular Classical Solution of an Inhomogeneous Model Telegraph Equation in the First Quarter of the Plane]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 99–116. DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korrektirovki probnogo resheniya obshchego volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoi chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Lomovtsev, F. E. (2021). V krivolineinoi pervoi chetverti ploskosti metod korrektirovki probnykh reshenii dlya minimal'noi gladkosti pravoi chasti volnovogo uravneniya s postoyannymi koeffitsientami [In the curvilinear first quarter of the plane the correction method of test solutions for the minimum smoothness of the right-hand side for the wave equation with constant coefficients]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [J. of Vitebsk State University]*, *4*(113), 5–22. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoi [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (1), 18–38. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Lomovtsev, F. E., & Ustilko, E. V. (2020). Smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya pri kharakteristicheskoi pervoi kosoi proizvodnoi v nestatsionarnom granichnom rezhime dlya gladkikh reshenii [A mixed problem for a one-dimensional wave equation with a characteristic first oblique derivative in a non-stationary boundary regime for smooth solutions]. *Vesnik Magileuskaga dzyarzhaunaga universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences]*, *2*(56), 21–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2021). Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh [A mixed problem for a general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with non-stationary non-characteristic second derivatives]. *Vesnik Magileuskaga dzyarzhaunaga universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences]*, *2*(58), 28–54. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Lomovtsev, F. E., & Spesivtseva, K. A. (2021). Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Nonstationary Boundary Mode. *Math Notes*, *110*(3), 329–338. DOI: 10.1134/S0001434621090030.
9. Khromov, A. P., & Kornev, V. V. (2019). Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoi zadachi dlya neodnorodnogo volnovogo uravneniya [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a non-homogeneous wave equation]. *Doklady Akademii nauk, 484*(1), 18–20. DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.
10. Khromov, A. P. (2019). Neobkhodimye i dostatochnye usloviya sushchestvovaniya klassicheskogo resheniya smeshannoi zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya v sluchae summiruemogo potentsiala [Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]*, *55*(5), 703–717. DOI: 10.1134/S0012266119050112.
11. Khromov, A. P. (2022). Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya [Divergent series and generalized mixed problem for wave equation]. In *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh*

prilozheniya: vyp. 21 [Modern problems of the theory of functions and their applications: iss. 21] (319–324). Saratov: Saratov State University. (In Russ., abstr. in Engl.).

12. Lomov, I. S. (2022). Construction of a generalized solution of a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches. *Differential equations*, *58*(11), 1468–1481. DOI: 10.1134/S00122661220110040.
13. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Поступила 25.01.2023

ON THE SMOOTHNESS CRITERION FOR A CLASSICAL SOLUTION TO AN INHOMOGENEOUS MODEL TELEGRAPH EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE

F. LOMOVTSEV
(Belarusian State University, Minsk)

We propose a new proof of the smoothness criterion on f for the classical solution F to the equation $u_{tt}(x,t)-a^2(x,t)u_{xx}(x,t)-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t)-a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=]0,+\infty]\times]0,+\infty]$. The criterion consists of the necessary and sufficient requirements for bounded continuity f and continuous differentiability of two integrals from f on G_∞. The need for continuity and boundedness f follows from this equation, which satisfies F on G_∞. These two integrals are continuously and boundedly differentiable, as derivatives of $F\in C^2(G_\infty)$ along the characteristics of the equation. This implies their sufficiency for $F\in C^2(G_\infty)$. If f depends only on x or t, then f is continuous and bounded on x or t. A general integral of the model telegraph equation is constructed.

Keywords: *model telegraph equation; one variable rate; implicit characteristics; classical solution; smoothness criterion; general integral.*