

УДК 517.983+517.444

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-84-91

**ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА  
И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ  
ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

*д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК*

*(Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия);*

*канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, К. А. ВАСИЛЕВИЧ*

*(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

*Рассматриваются два двумерных интегральных преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что они являются частными случаями двумерного G-преобразования. На основании теории G-преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций в области  $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$ . Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов.*

**Ключевые слова:** *двумерное интегральное G-преобразование, G-функция Мейера, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, гипергеометрическая функция Гаусса, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

**Введение.** Рассматриваются двумерные интегральные преобразования

$$\left(G_{1,1,1,2} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^{\infty} {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1.1)$$

$$\left(G_{1,2,2,2} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) f(t) dt \quad (x > 0) \quad (1.2)$$

и двумерное G-преобразование [1–4]

$$(Gf)(x) = \int_0^{\infty} G_{p,q}^{m,n} \left[ xt \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1.3)$$

где (см., например, [1–6; 7, §28.4])  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ ;  $t = (t_1, t_2) \in R^2$  – векторы,  $R^2$  – Евклидово двумерное пространство;  $x > t$  означает  $x_1 > t_1$ ,  $x_2 > t_2$  и аналогично для знаков  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$ ;  $\int_0^{\infty} := \int_0^{\infty} \int_0^{\infty}$ ;  $N = \{1, 2, \dots\}$  –

пространство натуральных чисел,  $N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N_0^2 = N_0 \times N_0$ ;  $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{x \in R^2, x > 0\}$ ;

$C^2$  – двумерное пространство комплексных чисел  $z = (z_1, z_2)$ ,  $z_1, z_2 \in C$ ;  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2)$ ,

$\bar{c} = (c_1, c_2) \in C^2$ ;  $\Gamma(\bar{a}) = \Gamma(a_1)\Gamma(a_2)$ ;

$m = (m_1, m_2) \in N_0^2$  и  $m_1 = m_2$ ;  $n = (n_1, n_2) \in N_0^2$  и  $n_1 = n_2$ ;

$p = (p_1, p_2) \in N_0^2$  и  $p_1 = p_2$ ;  $q = (q_1, q_2) \in N_0^2$  и  $q_1 = q_2$ ; ( $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ );

$a_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $a_{i_1}, a_{i_2} \in C$  ( $1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$ );

$b_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $b_{j_1}, b_{j_2} \in C$  ( $1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$ );

$k = (k_1, k_2) \in N_0^2 = N_0 \times N_0$  ( $k_1 \in N_0, k_2 \in N_0$ ) – индекс с  $k! = k_1!k_2!$  и  $|k| = k_1 + k_2$ ; для  $l = (l_1, l_2) \in R_+^2$

$D^l = \frac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1} (\partial x_2)^{l_2}}$ ;  $dt = dt_1 \cdot dt_2$ ;  $f(t) = f(t_1, t_2)$ ; функции в ядрах преобразований (1.1) и (1.2) представляют

собой произведения вырожденной гипергеометрической функции (функции Куммера)  ${}_1F_1(a; c; z)$  и гипергеометрической функции Гаусса  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  соответственно:

$${}_1F_1(\bar{a}, \bar{c}; -x t) = \prod_{i=1}^2 {}_1F_1(a_i, c_i; -x_i t_i);$$

$${}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -x t) = \prod_{i=1}^2 {}_2F_1(a_i, b_i; c_i; -x_i t_i).$$

Для  $a, b, c \in \mathbb{C}$  вырожденная гипергеометрическая функция Куммера  ${}_1F_1(a; c; z)$ , определяется по формуле [7, §1]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty,$$

где  $(\gamma)_n$  – символ Похгаммера:  $(\gamma)_0 \equiv 1, (\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$  ( $\gamma \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$ );  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция Гаусса

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1,$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

для  $z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re}(b) < \operatorname{Re}(c), |\arg(1-z)| < \pi, z \neq 1$  [8, формулы 2.1(2) и 2.1.(10)].

Функция вида  $G_{p,q}^{m,n} \left[ \text{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right]$  в ядре преобразования (1.3) [1–4]

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ \text{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^2 G_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[ x_k t_k \left| \begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right],$$

является произведением  $G$ -функций Мейера  $G_{p,q}^{m,n} [z]$  [9, гл. 1].

$G$ -функцией Мейера порядка  $(m, n, p, q)$ , где  $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ , называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L G_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (1.4)$$

где

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (1.5)$$

Здесь  $L$  – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса  $s = -b_j - k, j = 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots$  слева, а полюса  $s = 1 - a_j + k, j = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$  – справа; пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией  $G$ -функции (1.4) можно ознакомиться, например, в [9, гл. 6].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1; 3–6; 10] и, в частности, является продолжением [2]. Мы рассматриваем еще два класса двумерных интегральных преобразований вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$  ( $v_1 = v_2$ ),  $\bar{2} = (2, 2)$ , интегрируемых функций  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$  на  $R_+^2$ , для которых  $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$ , где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2 - 1} \left[ \int_{R_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Используя технику преобразования Меллина, показываем, что преобразования (1.1) и (1.2) являются частными случаями двумерного G-преобразования (1.3). На основании теории G-преобразования, построенной в [1], мы исследуем свойства рассматриваемых интегральных преобразований в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ . Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов в [9].

**2. Предварительные сведения.** Двумерное преобразование Меллина функции  $f(x) = f(x_1, x_2)$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , определяется формулой (см., например, [1–6; 10; 11])

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_{R_+^2} f(t) t^{s-1} dt, \tag{2.1}$$

где  $s = (s_1, s_2)$ ,  $s_j \in C$  ( $j = 1, 2$ ).

Обратное преобразование Меллина для  $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$  дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x) = \mathfrak{M}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} x^{-s} g(s) ds, \quad \gamma_j = \text{Re}(s_j) \quad (j = 1, 2).$$

В [1] получили формулу преобразования Меллина (2.1) от G-преобразования (1.3)

$$(\mathfrak{M}Gf)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s), \tag{2.2}$$

где функция  $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$  является произведением функций вида (1.5)

$$\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \prod_{k=1}^2 \mathcal{G}_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[ \begin{matrix} (a_k)_{1, p_k} \\ (b_k)_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right].$$

Исключительным множеством  $\mathcal{E}_{\bar{g}}$  функции  $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$  [1–6; 9] назовем множество векторов  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$  ( $v_1 = v_2$ ) таких, что  $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1$ ,  $\alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$  и функции вида (1.5)  $\mathcal{G}_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}(s_1)$ ,  $\mathcal{G}_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}(s_2)$  имеют нули на прямых  $\text{Re}(s_1) = 1 - v_1$ ,  $\text{Re}(s_2) = 1 - v_2$  соответственно.

Нам понадобятся:

- интеграл, содержащий функцию Куммера  ${}_1F_1(a; c; z)$  [12, формула 1.14.1(1)]

$$\int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha-1} {}_1F_1(a, b; \pm \lambda x) dx = \pm \frac{x^\alpha}{\alpha} {}_2F_2(\alpha, a; \alpha + 1; b; \pm \lambda x) + \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b-\alpha)}, \tag{2.3}$$

( $x_1 = x$ ,  $x_2 = \infty$ ,  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ,  $\text{Re}(a - \alpha) > 0$ ,  $x > 0$ );

- интеграл, содержащий гипергеометрическую функцию Гаусса  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  [12, формула 2.21.1(1)]

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} {}_2F_1(a, b; c; -\omega x) dx = \omega^{-\alpha} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-\alpha)}, \tag{2.4}$$

$(0 < \text{Re}(\alpha) < \text{Re}(a), \text{Re}(b); |\arg \omega| < \pi)$ .

Для формулировки утверждений, представляющих  $\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}$ -теорию  $G_{1,1,1,2}$ - и  $G_{1,2,2,2}$ -преобразований, нам понадобятся следующие постоянные [1, формулы (3.3)–(3.7)]:

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} [\text{Re}(b_{j_1})], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_1 \leq n_1} [\text{Re}(a_{i_1})], & n_1 > 0, \\ \infty, & n_1 = 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} [\text{Re}(b_{j_2})], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases}, \quad \beta_2 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_2 \leq n_2} [\text{Re}(a_{i_2})], & n_2 > 0, \\ \infty, & n_2 = 0; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$a_1^* = 2(m_1 + n_1) - p_1 - q_1, \quad a_2^* = 2(m_2 - n_2) - p_2 - q_2; \tag{2.8}$$

$$\Delta_1 = q_1 - p_1, \Delta_2 = q_2 - p_2; \tag{2.9}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \tag{2.10}$$

Через  $[X, Y]$  обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ .

**3.  $G_{1,1,1,2}$ - и  $G_{1,2,2,2}$ -преобразования как  $G$ -преобразование.** Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к  $G_{1,1,1,2}$ -преобразованию (1.1), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.3) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} G_{1,1,1,2} f)(s) &= \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty x^{s-1} {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\bar{a}-s)}{\Gamma(\bar{c}-s)} (\mathfrak{M} f)(1-s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,2}^{1,1} \left[ \begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$(\mathfrak{M} G_{1,1,1,2} f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,2}^{1,1} \left[ \begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \tag{3.1}$$

Из (2.2) и (3.1) следует представление преобразования (1.1)  $G_{1,1,1,2} f$  в виде  $G$ -преобразования (1.3):

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = \int_0^\infty G_{1,2}^{1,1} \left[ xt \middle| \begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right] f(t) dt \quad (x > 0). \tag{3.2}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.1):

$$m_1 = m_2 = 1; \quad n_1 = n_2 = 1; \quad p_1 = p_2 = 1; \quad q_1 = q_2 = 2; \quad \alpha_1 = -\min[0, \text{Re}(1-c_1)], \quad \alpha_2 = -\min[0, \text{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1 = \text{Re}(a_1), \quad \beta_2 = \text{Re}(a_2); \quad a_1^* = a_2^* = 1; \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 1; \quad \mu_1 = \text{Re}(a_1 - c_1) - \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \text{Re}(a_2 - c_2) - \frac{1}{2}.$$

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к  $G_{1,2,2,2}$ -преобразованию (1.2), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.4) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}G_{1,2,2,2}f)(s) &= \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) x^{s-1} dx = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a}-s)\Gamma(\bar{b}-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\bar{c}-s)} (\mathfrak{M}f)(1-s) = \bar{\mathcal{G}}_{2,2}^{1,2} \left[ \begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$(\mathfrak{M}G_{1,2,2,2}f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{2,2}^{1,2} \left[ \begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \quad (3.3)$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает представление преобразования (1.2)  $G_{1,2,2,2}f$  в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,2,2,2}f)(x) = \int_0^\infty G_{2,2}^{1,2} \left[ \begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right] xt f(t) dt \quad (x > 0). \quad (3.4)$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.3):

$$m_1 = m_2 = 1; n_1 = n_2 = 2; \quad p_1 = p_2 = 2; q_1 = q_2 = 2; \quad \alpha_1 = -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_1)], \quad \alpha_2 = -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1 = 1 - \max[\operatorname{Re}(1-a_1), \operatorname{Re}(1-b_1)], \quad \beta_2 = 1 - \max[\operatorname{Re}(1-a_2), \operatorname{Re}(1-b_2)];$$

$$a_1^* = a_2^* = 2; \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 0; \quad \mu_1 = \operatorname{Re}(a_1 + b_1 - c_1) - 1, \quad \mu_2 = \operatorname{Re}(a_2 + b_2 - c_2) - 1.$$

**4.  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория  $G_{1,1,1,2}$ -преобразования.** В следующей теореме представлена  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория преобразования  $G_{1,1,1,2}f$  (1.1).

**Теорема 4.1.** Пусть

$$-\min[0, \operatorname{Re}(1-c_1)] < 1-v_1 < \operatorname{Re}(a_1), \quad -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_2)] < 1-v_2 < \operatorname{Re}(a_2), \quad v_1 = v_2, \quad (4.1)$$

$$a_1^* = a_2^* = 1. \quad (4.2)$$

Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование  $G_{1,1,1,2} \in [\mathcal{L}_{\bar{v},2}, \mathcal{L}_{1-\bar{v},2}]$  такое, что равенство (3.1) выполняется для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $\operatorname{Re}(s) = 1-\bar{v}$ .

В. Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ , то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x) (G_{1,1,1,2}g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,1,1,2}f)(x) g(x) dx.$$

С. Пусть  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$  и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ . Если  $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$ , преобразование  $G_{1,1,1,2} f$  (1.1) представимо в виде

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,3}^{1,2} \left[ xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при  $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$  дается формулой

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,3}^{2,1} \left[ xt \left| \begin{matrix} 1-\bar{a}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

Д. Преобразование  $G_{1,1,1,2} f$  не зависит от  $\bar{v}$  в том смысле, что если  $\bar{v}$  и  $\bar{v}$  удовлетворяют (4.1) и выполняются условия (4.2), а также преобразования  $G_{1,1,1,2} f$  и  $\tilde{G}_{1,1,1,2} f$  определяются в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  и  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  равенством (3.1), то  $G_{1,1,1,2} f = \tilde{G}_{1,1,1,2} f$  для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ .

Е. Если выполняются условия (4.1) и (4.2), то для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  преобразование  $G_{1,1,1,2} f$  дается формулами (1.1) и (3.2).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.1), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

**5.  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория  $G_{1,2,2,2}$ -преобразования.** В следующей теореме представлена  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория преобразования  $G_{1,2,2,2} f$  (1.2).

**Теорема 5.1.** Пусть

$$\begin{aligned} -\min[0, \text{Re}(1-c_1)] < 1-v_1 < 1-\max[\text{Re}(1-a_1), \text{Re}(1-b_1), \\ -\min[0, \text{Re}(1-c_2)] < 1-v_2 < 1-\max[\text{Re}(1-a_2), \text{Re}(1-b_2)], \quad v_1 = v_2; \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$a_1^* = a_2^* = 2. \tag{5.2}$$

Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование  $G_{1,2,2,2} \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}]$  такое, что равенство (3.3) выполняется для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  и  $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$ .

В. Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ , то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x) (G_{1,2,2,2} g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,2,2,2} f)(x) g(x) dx.$$

С. Пусть  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$  и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ . Если  $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$ , преобразование (1.2) представимо в виде

$$(G_{1,2,2,2} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{3,3}^{1,3} \left[ xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при  $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$  дается формулой

$$(G_{1,2,2,2} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{3,3}^{2,2} \left[ xt \left| \begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

*D.* Преобразование  $G_{1,2;2,2} f$  не зависит от  $\bar{v}$  в том смысле, что если  $\bar{v}$  и  $\bar{\tilde{v}}$  удовлетворяют (5.1) и выполняются условия (5.2), а также преобразования  $G_{1,2;2,2} f$  и  $\tilde{G}_{1,2;2,2} f$  определяются в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}}$  и  $\mathcal{L}_{\bar{\tilde{v}},\bar{2}}$  равенством (3.3), то  $G_{1,2;2,2} f = \tilde{G}_{1,2;2,2} f$  для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{\tilde{v}},\bar{2}}$ .

*E.* Если выполняются условия (5.2), то для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}}$  преобразование  $G_{1,2;2,2} f$  дается формулами (1.2) и (3.4).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.3), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

**Заключение.** В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1.1) и (1.2) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получены аналоги формулы интегрирования по частям. Для таких преобразований установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович М. В., Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4. – С. 131–136.
2. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Два частных случая двумерного интегрального G-преобразования в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 117–123. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123).
3. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
4. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи // АМАДЕ-2021: сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116.
5. Ситник С. М., Скоромник О. В., Шлапак С. А. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
6. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
9. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
10. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1170–1178.
11. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – Vol. 204. – 523 p.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 801 с.

#### REFERENCES

1. Papkovich, M. V., & Skoromnik, O. V. (2019). Dvumernoe integral'noe preobrazovanie s G-funktsiei Meiera v yadre v prostranstve summiruemykh funksii [Two-Dimensional Integral Transform With the Meijer G-Function in the Kernel in the Space of Summable Functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 131–136. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Dva chastnykh sluchaya dvumernogo integral'nogo G-preobrazovaniya v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funksii [Two special cases of two-dimensional integral G-transformation in the weighted spaces of summable functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 117–123. (In Russ., abstr. in Engl.). DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123).
3. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funksiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funksii [Multi-dimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of VSU]*, 1(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).

4. Sitnik S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ikh chastnye sluchai [Multidimensional modified G- and H-transforms and their special cases]. In *AMADE-2021: sb. trudov* (104–116). Minsk: IVTs Minfina. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2019). Mnogomernoe obshchee integral'noe preobrazovanie so spetsial'nymi funktsiyami v yadre [Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of VSU]*, 3(104), 18–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. In *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer).
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
8. Beitmen, G., & Erdeii, A. (1973). *Vysshie transsendentnye funktsii: v 3 t. T. 1: Gipergeometricheskaya funktsiya Gaussa. Funktsiya Lezhandra*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
9. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications*. London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
10. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 43(6), 1170–1178.
11. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.
12. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., & Marichev, O. I. (1986). *Integraly i ryady: v 3 t. T. 3: Dopolnitel'nye glavy*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

*Получена 17.04.2023*

**TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH KUMMER FUNCTION  
AND HYPERGEOMETRIC GAUSSIAN FUNCTION IN KERNELS AS SPECIAL CASES  
OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL G-TRANSFORMATION**

**S. SITNIK**

*(Belgorod State National Research University "BelGU", Russia);*

**O. SKOROMNIK, K. VASILEVICH**

*(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)*

*Two two-dimensional integral transformations with confluent hypergeometric Kummer function and Gauss hypergeometric function in kernels are considered. Applying the Mellin transformation technique, we show that they are special cases of a two-dimensional G-transformation. Based on the theory of the G-transformation, the properties of the considered integral transformations in the weight spaces of integrable functions in the domain  $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$  are investigated. The results of the study generalize the results obtained earlier for the corresponding one-dimensional analogues.*

**Keywords:** *two-dimensional integral G-transformation, Meijer G-function, confluent hypergeometric Kummer function, Gauss hypergeometric function, two-dimensional Mellin transform, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*