**УДК 514**

# ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

***канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ***
***(Полоцкий государственный университет)***

*Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n – 1 на экстремалях уравнения Эйлера – Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого ранга вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков Для экстремалей уравнения Эйлера – Лагранжа доказано свойство сохранения компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n – 1, связанной с группой преобразований, сохраняющей вариационную задачу со старшими производными:*

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=0\,,$$

*где* $S:\Re\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$ *– однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию* $L:T^n X_m \to \Re$

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\,,\ \forall x\in X_m,$$

$j_x^{n-1}X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),..., D_t^{n-1}X^i(x))$ *– струя порядка n – 1, связанная с группой преобразований* $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i=\overline{1,m}$.

***Ключевые слова**: уравнение Эйлера – Лагранжа, уравнение Эйлера – Пуассона, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция, струя векторного поля.*

**Введение.** Классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии предложил Э. Галуа; Ф. Клейн – взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии и развиваясь, эта идея показала, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Феликс Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Его программа как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания. В 1872 г. Ф. Клейн представил сенату и философскому факультету Эрлангенского университета и свое «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Феликс Клейн рассматривает иерархию многообразий – пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введенное в математику за двадцать лет до этого. В элементарной геометрии преобразованиями, то есть переходами от одних переменных к другим, служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда сами фигуры (расстояния между образующими их точками) не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим. Инвариант пространства – расстояние, определенное, например, теоремой Пифагора в прямоугольной системе координат. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты – уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, то есть соотношения между расстояниями, например, треугольник, при проективном преобразовании может стать меньше, но остается подобным себе. Содержание истории натурфилософии – преобразование самых общих понятий, самые радикальные изменения, охватывающие основные представления о мире и методы его познания.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных), а также одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–10, 12–16]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат и времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13, 16].

**Основные определения и математические объекты.**

Пусть $X_m$ – гладкое многообразие размерности *m*, $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения $X_m$.

$L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

**Теорема 1 [11].** Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ $S: (x) \to (\overline{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия $X_m$ расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(p)}{\overline{x}})}{\partial \overset{(s)}{\overline{x}}{}^{j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), \ C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, \ l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, \ l \ge s, \\ 0, \ l < s. \end{cases} \tag{1}$$

**Определение 1.** Система функций $P_n = \left\{p_k^i(n)\right\} = \left\{p_{k,n}^i\right\}$,

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$, $k = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,m}$ называется обобщенным импульсом ранга *n* для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы $X_m$ расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L$ при выборе локальных координат (x) в базе $X_m$ расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называется *k*-й компонентой обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$ по *i*-й координате или импульсами порядка $k$ (*k*-импульсами) по *i*-й координате обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$.

Функция $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называется *k*-й компонентой обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$ по *i*-й координате или импульсами порядка $k$ (*k*-импульсами) по *i*-й координате обобщенного импульса $P_n$ ранга $n$.

**Замечание 1.** Обобщенный импульс ранг *n* определен для функций $L: T^p X_m \to \Re$.

Из определения обобщенного импульса ранга $p_k^i(n) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что при $k > p, \ l \ge 0 \Rightarrow l + k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \le p$. Поскольку при $k \le n,\ k \le p \Rightarrow k \le \min(n, p)$, то в **определении 2** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)},\ i = \overline{1, m}.$

Максимальный порядок производной по *t* в $p_k^i(n)$ равен $l + k + l = 2 \cdot l + k$.

При $l + k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l + k \le p$, кроме того, справедливы оценки между индексами обобщенного импульса

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow l + k \le \min(n, p) \Rightarrow l \le \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k =$$

$$= 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по *t* в $p_k^i(n)$ дает

$$l \le n - k \Leftrightarrow l + k \le n \Rightarrow 2 \cdot l + k \le 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k.$$

При $p > n,\ l + k \le n - k + k = n$ максимальный порядок производной по *t* в $L(x, \dots, \overset{(p)}{x})$ больше максимального порядка производной по *t* переменной, по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\dfrac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, в общем случае отлично от нуля.

При $p < n$, поскольку $l + k \le n - k + k = n$, следует, что $l + k > p$, $\dfrac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\dfrac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ будет тождественно равна 0.

Пограничным является случай $p = n$, именно этот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе $X_m$ расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t \Big(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\Big) + \dots + (-1)^n D_t^n \Big(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\Big) -$$

это нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера – Пуассона), импульс 0-го порядка.

**Теорема 2 [9] (дифференциальная связь импульсов *k*-го и (*k* – 1)-го порядков).**

Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция Лагранжа, $L(x, \dots, \overset{(n)}{x})$, $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x})$, $p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k+1)}{x})$ – локальная запись функции $L$ и импульсов *k*-го и (*k* – 1)-го порядков при выборе локальных координат (x) в базе $X_m$ расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k+1)}{x}), \tag{2}$$

где $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\dfrac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)$ – импульс *k*-го порядка;

$p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum\limits_{l=0}^{n-(k-1)} (-1)^l D_t^l \Big(\dfrac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}}\Big)$ – импульс (*k* – 1)-го порядка.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3** (о связи импульсов *k*-го порядка рангов $n$ и $n+1$). Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L:T^pX_m\to\Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения $X_m$, учитывая определение обобщенного импульса:

$$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big),\ k=\overline{0,n},\ i=\overline{1,m}$$ – импульс *k*-го порядка ранга *n*,

$$p_{k,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)$$ – импульс *k*-го порядка ранга *n* + 1.

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\Big).\tag{3}$$

**Доказательство**:

$$p_{k,n+1}^i=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1-k+k)i}{x}}\Big)=$$

$$=p_{k,n}^i+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}\Big).$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Рассмотрим преобразование из новой координатной системы в старую $x=(x^1,x^2,...,x^m)$, $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$. Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия $X_m$ расслоения скоростей порядка $T^pX_m$, $i,\ k=\overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$ – обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^j(x)}{\partial x^k}=\delta_k^i,\qquad \sum_{j=1}^m\frac{\partial\bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}=\delta_k^i,\qquad \delta_i^k=\begin{cases}1,\ i=k\\0,\ i\neq k\end{cases}-\text{символ Кронекера.}\tag{4}$$

**Доказательство**. $x^i=x^i(\bar{x}^1(x),\ \partial\bar{x}^2(x),\ ...,\ \bar{x}^m(x))$. По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta_k^i=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^j(x)}{\partial x^k}.$$

Аналогично доказывается равенство $\dfrac{\partial\bar{x}^i}{\partial\bar{x}^k}=\delta_k^i=\sum_{j=1}^m\dfrac{\partial\bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}$

Теорема доказана.

**Определение 2.** Однопараметрическая группа преобразований $S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau:X_m\to X_m,\ \forall\tau\in\Re$ сохраняет лагранжиан $L:T^nX_m\to\Re$, если выполняется равенство

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))\,|_{\tau=0}=0,\ \forall x\in X_m.$$

$D_t^k S_\tau(x)|_{\tau=0} : X_m \to T^k X_m$ – оператор $k$-кратного полного дифференцирования по переменной $t$. С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x,\tau)) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, $\forall \tau \in \Re$, $X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1,m}$ (струй 0-го порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка $n-1$

$$j_x^{n-1} X^i(x,\tau) = (X^i(x,\tau), D_t^1 X^i(x,\tau), D_t^2 X^i(x,\tau), ..., D_t^{n-1} X^i(x,\tau)),$$

которые будем называть связанными (индуцированными) с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$.

Векторное поле $X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка $n-1$

$$j_x^{n-1} X^i(x,\tau) = (X^i(x,\tau), D_t^1 X^i(x,\tau), D_t^2 X^i(x,\tau), ..., D_t^{n-1} X^i(x,\tau))$$

также будем называть связанными (индуцированными) с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$.

**Математическая постановка задачи.**

Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ – гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей $T^n X_m$ многообразия $X_m$ $L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x})$ – локальная запись функции $L$ и импульсов $k$-го порядка при выборе локальных координат (x) в базе $X_m$ расслоения $T^n X_m$. $p_{k,n}^i = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\dfrac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$.

И пусть $S : \Re \times X_m \to X_m$, $S_\tau : X_m \to X_m$, $\forall \tau \in \Re$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L : T^n X_m \to \Re$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), ..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \ \forall x \in X_m.$$

Задача данной работы – установить закон сохранения компоненты импульса $p_{k,n}^i = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\dfrac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$ (импульсы $k$-го порядка ранга $n$) вдоль струи $j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), ..., D_t^{n-1} X^i(x))$, связанной с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1,m}$, на экстремалях уравнения Эйлера – Пуассона $p_{0,n}^i = \sum\limits_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l (\dfrac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}) = 0$, то есть показать, что

$$D_t \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1} (X^i(x,\tau)) p_{k,n}^i\right) = 0$$

при следующих условиях:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), ..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \forall x \in X_m.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть $S:\Re\times X_m \to X_m$, $S_\tau : X_m \to X_m$, $\forall\tau\in\Re$ однопараметрическая группа преобразований $L:T^nX_m \to \Re$ – гладкая функция в расслоенном пространстве скоростей $T^nX_m$ на гладком многообразии $X_m$ $p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right)$ – импульс 0-го порядка (функционал в уравнении Эйлера – Пуассона) $X^i(x,\tau)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, тогда

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_tS_\tau(x), D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)). \qquad (5)$$

**Доказательство**.

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_tS_\tau(x), D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\frac{d(D_t^1S^i_\tau(x))}{d\tau} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\frac{d(D_t^2S^i_\tau(x))}{d\tau} + \ ... \ + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\frac{d(D_t^nS^i_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\frac{d(D_t^kS^i_\tau(x))}{d\tau} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k\left(\frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)).$$

В частности, при $n = 1$

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_tS_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau) + \frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t(X^i(x,\tau))\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t(X^i(x,\tau)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial X^i(x,\tau)}{\partial x^k}\dot{x}^k\right).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть $S:\Re\times X_m \to X_m$, $S_\tau : X_m \to X_m$, $\forall\tau\in\Re$ – группа преобразований в $X_m$, $L:T^nX_m \to \Re$ – гладкая вещественнозначная функция в расслоении скоростей $T^nX_m$. $p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$, $i=\overline{1,m}$ – импульсы $k$-го порядка ранга $n$

$X^i(x,\tau)) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$ – однопараметрическое семейство векторных полей, индуцированное группой $S_\tau : X_m \to X_m$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}. \qquad (6)$$

**Доказательство.** По **теореме 2** имеем

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))D_t p^i_{k,n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}). \quad (7)$$

Введем новую переменную $k1$ и свяжем со старой переменной $k$:

$k1 = k-1 \Rightarrow k = k1+1,\ 1 \le k \le n\ \Rightarrow\ 0 \le k1 \le n-1,$ затем подставим $k1$ в формулу (7):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))p^i_{k1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k1)}{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(p^i_{k,n} - p^i_{k,n}) - \sum_{i=1}^{m} D_t^0 X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n X^i(x,\tau)p^i_{n,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} D_t^0 X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}).$$

Этот результат может быть получен и по-другому. Проведем доказательство индукцией по *n*. При $n=1$ в формуле (6) получим импульс *k*-го порядка ранга *n*:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n=1}. \qquad (8)$$

Преобразуем левую часть формулы (8):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{1,1}^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p_{1,1}^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}X^i(x,\tau)). \quad (9)$$

Преобразуем правую часть (8):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}D_t^0(X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}X^i(x,\tau)). \quad (10)$$

Формулы (9), (10) совпадают, база индукции при $n = 1$ проверена.
При $n = 2$ в формуле (6) получим

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}), \quad k=\overline{0,n}, \ i=\overline{1,m} \text{ – импульс } k\text{-го порядка ранга } n;$$

$$p_{1,2}^i = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1+1)i}{x}}) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i});$$

$$p_{2,2}^i = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i};$$

$$p_{0,2}^i = \sum_{l=0}^{2-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}) + (-1)^2 D_t^2(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} + D_t^2(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}).$$

По формуле (6) проверим выполнение равенства

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}$$

При $n = 2$ уравнение (6) примет следующий вид:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=2} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=2}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n=2.}$$

Преобразуем левую часть последнего выражения:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + D_t^{2-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2}) = D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))p^i_{1,2} + D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2}) =$$

$$= D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2}) + D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2}) + \sum_{i=1}^{m} D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2}).$$

По **теореме 2** имеем $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})$.

$$D_t p^i_{1,2}(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1-1)i}{x}} - p^i_{1-1,2}(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{1-1,2}(x,\dot{x},\ddot{x},\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x}),$$

$$D_t p^i_{2,2}(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(2-1)i}{x}} - p^i_{2-1,2}(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - p^i_{2-1,2}(x,\dot{x},\ddot{x},\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - p^i_{1,2}(x,\dots,\overset{(3)}{x}).$$

На основании чего последний результат можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,2}) + \sum_{i=1}^{m} D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))D_t(p^i_{2,2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})) + D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + D_t(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - p^i_{1,2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,2} + X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})) + D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + D_t(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - p^i_{1,2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})) + D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + D_t(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} - p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big) + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i} - X^i(x,\tau)\,p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^i} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i} - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,2}(x,\dots,\overset{(4)}{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^i} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n}.$$

Утверждение теоремы проверено для $n = 2$.

Пусть утверждение теоремы справедливо для произвольного натурального числа $n$:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^i} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n}$$

Докажем, что оно верно для $n + 1$, тогда запишем:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^i} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n+1}. \tag{11}$$

По **теореме 3** (формула 3) имеем $p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)}{x}{}^i}\Big)$,

$$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^i}\Big) \Rightarrow p^i_{n+1,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^i}\Big) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)}{x}{}^i}.$$

Проведем преобразования левой части формулы (11):

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) = D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1} + \sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) =$$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + D_t^n(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) =$$

$$= D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}(D_t^n(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) =$$

$$\begin{aligned} &= D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + \sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) = \\ &= D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}). \end{aligned} \tag{12}$$

Подставим $p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$ при $p = n+1$ в первую сумму в формуле (12):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n+1}) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)p^i_{n+1,n+1}) =$$

$$= D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))) \; + \; \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1} =$$

$$= D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) + D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1}) =$$

$$= D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}). \quad (13)$$

По предположению индукции первое слагаемое в сумме (13) равно

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n}. \quad (14)$$

По формуле (3) имеем

$$p^i_{0,n+1} = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}). \quad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в сумме (13):

$$\begin{aligned}
&D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t(D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})).
\end{aligned} \quad (16)$$

Введем новую переменную и преобразуем второе слагаемое последней суммы (16), которую перепишем в следующем виде:

$$k1 = k-1 \Rightarrow k = k1+1, 1 \le k \le n \;\Rightarrow 0 \le k1 \le n-1,\; n+1-k = n-k1, n+2-k = n+1-k1$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k1} D_t^{n+1-k1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^k(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}D_t^k(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-n}D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}((-1)^{n-k}D_t^k(X^i(x,\tau))D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})(-1)^1+1))+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))(-1)^1D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$=(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$=(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}).\qquad(17)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в сумме (13):

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=\sum_{i=1}^{m}(D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}).\qquad(18)$$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества (11), равную сумме (13) и состоящую из трех слагаемых, равных соответственно правым частям формул (14), (17), (18):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\\
&+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)+\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Учитывая выражение (15), объединим первое и последнее слагаемое в сумме (19), получим, что левая часть (11) равна

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\Big(p_{0,n}^i+(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Преобразуем выражение (20), учитывая формулу (15):

$$
\begin{aligned}
&p_{0,n+1}^i=p_{0,n}^i+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1-0}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=p_{0,n}^i+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\Big(p_{0,n}^i+(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n+1}^i.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Полученный результат (21) представляет правую часть доказываемого равенства (11).

Теорема доказана.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.** Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ – гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей $T^nX_m$. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ – локальная запись функции $L$ и импульсов $k$-го порядка при выборе локальных координат (x) в базе $X_m$ расслоения $T^nX_m$. $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$. И пусть $S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\dots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0,\ \forall x\in X_m,$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),\dots,D_t^{n-1}X^i(x))$ – струя порядка $n$ – 1, связанная с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i=\overline{1,m}$ – векторное поле.

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера – Пуассона $p_{0,n}^{i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^{l}D_{t}^{l}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ справедлив закон сохранения компоненты обобщенного импульса вдоль струи:

$$D_{t}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_{t}^{k-1}(X^{i}(x))p_{k,n}^{i})=0\,.$$

**Доказательство.** По формуле (6) **теоремы 6** при любых $x\in X_{m}\,,\tau\in\Re$ выполнено соотношение :

$$D_{t}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_{t}^{k-1}(X^{i}(x,\tau))p_{k,n}^{i})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^{i}(x,\tau)p_{0,n}^{i}. \quad (22)$$

В частности, при $\tau=0$

$$D_{t}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_{t}^{k-1}(X^{i}(x,\tau))|_{\tau=0}\;p_{k,n}^{i})=D_{t}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_{t}^{k-1}(X^{i}(x))p_{k,n}^{i})\;=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x,\tau))|_{\tau=0}-\sum_{i=1}^{m}X^{i}(x,\tau)|_{\tau=0}\;p_{0,n}^{i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x))-\sum_{i=1}^{m}X^{i}(x)p_{0,n}^{i}. \quad (23)$$

По условию **теоремы 7** $S_{\tau}:X_{m}\to X_{m},\,\forall\tau\in\Re$ – однопараметрическая группа преобразований сохраняет функцию Лагранжа $L:T^{n}X_{m}\to\Re$

$$\frac{d}{d\tau}L(S_{\tau}(x),D_{t}S_{\tau}(x),D_{t}^{2}S_{\tau}(x),...,D_{t}^{(n)}S_{\tau}(x))|_{\tau=0}=0,\;\forall x\in X_{m}. \quad (24)$$

По формуле (5) **теоремы 5** имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau}L(S_{\tau}(x),D_{t}S_{\tau}(x),D_{t}^{2}S_{\tau}(x),...,D_{t}^{(n)}S_{\tau}(x))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x,\tau)), \quad (25)$$

которое выполняется при любом $\tau$, в частности, при $\tau=0$. Учитывая равенства (24), (25) получаем

$$\frac{d}{d\tau}L(S_{\tau}(x),D_{t}S_{\tau}(x),D_{t}^{2}S_{\tau}(x),...,D_{t}^{(n)}S_{\tau}(x))|_{\tau=0}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x,\tau))|_{\tau=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x))\;=0\,,$$

поскольку

$$D_{t}^{k}(X^{i}(x,\tau))|_{\tau=0}=D_{t}^{k}(X^{i}(x,0)=D_{t}^{k}(X^{i}(x). \quad (26)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_{t}^{k}(X^{i}(x))\;=0$. Поскольку $x:\Re\to X_{m}$ – экстремаль уравнения Эйлера – Пуассона, то

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right) = 0. \quad (27)$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{m} X^i(x) p^i_{0,n} = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \cdot 0 = 0.$ Подставляя формулы (26), (27) в равенство (23) получим основной результат работы:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x)) p^i_{k,n}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k (X^i(x)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x) p^i_{0,n} = 0 - 0 = 0. \quad (28)$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.** Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга $n$ вдоль струи порядка $n - 1$ на экстремалях уравнения Эйлера – Пуассона для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого порядка вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков [1, с. 297]. В частности, на экстремалях уравнения Эйлера – Лагранжа справедлив закон сохранения компоненты импульса первого порядка первого ранга вдоль векторного поля, индуцированного группой, сохраняющей вариационную задачу первого порядка:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m} X^i p^i_{1,1}\right) = D_t\left(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}}\right) = D_t\left(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии» ; ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах/ С. В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.

15. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – №4. – С. 27–36.
16. Тензор обобщенной энергии // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.

*Поступила 20.03.2018*

## GROUPS OF TRANSFORMATION CONSERVING VARIATIONAL PROBLEM WITH SENIOR DERIVATIVES

***Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV***

*The definition of the momentum component is introduced along the jet and the conservation of components of momentum of rank n along the jet of order n – 1 on the extremals of the Euler-Lagrange equation for groups of transformations preserving the variational problem is a direct and natural generalization of the determination of the momentum vector field (zero-order jet) connected with a one-parameter group of transformations preserving Lagrangian function that depends on the derivatives of zero and first orders. For the extremes of the Euler – Lagrange equation, the property of preserving the momentum component of rank n – 1, connected with the transformation group preserving the variational problem with higher derivatives:*

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))\,p_{k,n}^i\right)=0\,,$$

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $\quad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$ *– is a one-parameter group of transformations that preserves the function* $L:T^n X_m\to\Re$

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))\,|_{\tau=0}=0,\ \forall x\in X_m\,,$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),..., D_t^{n-1}X^i(x))$ *– a jet of order n-1 connected, with the transformation group* $S_\tau : X_m\to X_m$, $X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\,|_{\tau=0}$, $i=\overline{1,m}$.

***Keywords:*** *the Euler – Lagrange equation, the Euler – Poisson equation, smooth manifolds, fibered velocity space, system momentum, energy tensor, generalized-momentum tensor, nondegenerate function, jet of a vector field.*