УДК 514

ЛАГРАНЖЕВЫ СЕЧЕНИЯ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Инвариантным образом определено понятие лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей произвольного порядка, сформулированы и доказаны их свойства. Дан инвариантный критерий решения задачи. Получено необходимое условие лагранжевых сечений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка.

Ключевые слова: *обратная вариационная задача, расслоенное пространство скоростей, лагранжево сечение, уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение. Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу П. Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследованы задачи о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения – в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном.

Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Л. Эйлер (уравнения Эйлера) и Ж. Лагранж (метод вариаций). Далее следует А. Лежандр (исследование второй вариации – необходимое условие Лежандра), У. Гамильтон и Б. Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона – Якоби), А. Клёбш и Ю. Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX в. послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Д. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, А. Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема – понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII в. и связано с именами Л. Эйлера и Г. Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Г. Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795). В 1827 г. К. Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной геометрии, сыграло открытие неевклидовой геометрии. Б. Риман в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) заложил основы римановой геометрии, наиболее развитой части современной дифференциальной геометрии.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна изложена в его «Эрлангенской программе» (1872): геометрия – учение об инвариантах групп преобразований. В применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений – М. Голубицким, В. Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений – А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13, 16–19].

Вариационная задача с управляемым параметром $u \in KC[t_0, t_1]$ на классе функций $x(t) \in KC^1[t_0, t_1]$ решена Л.С. Понтрягиным и сформулирована как принцип максимума Понтрягина. Эта задача тесно связана с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением на классе кусочно-непрерывных функций от времени, новые результаты также получены А.А. Козловым для двух неизвестных функций [5–7].

Основные определения и математические объекты. Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right), \ k = \overline{0,n},\ i = \overline{1,m},$$

называется обобщенным импульсом ранга *n* для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (*x*) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как *k*-я компонента обобщенного импульса P_n ранга n по *i*-й координате или импульс порядка k (*k*-импульс) по *i*-й координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранга *n* определен для функций $L: T^p X_m \to \Re$.

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right)$ следует, что при $k > p$, $l \geq 0 \Rightarrow l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n, p)$, то в **определении 1** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}, i = \overline{1, m}$.

Максимальный порядок производной по *t* в $p_k^i(n)$ равен $l + k + l = 2 \cdot l + k$.

При $l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l + k \leq p$, кроме того,

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l+k \le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$$
$$= 2\cdot\min(n,p)-2\cdot k+k = 2\cdot\min(n,p)-k\,.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow 2\cdot l+k \le 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n-2\cdot k+k = 2\cdot n-k.$$

При $p>n,\ l+k\le n$ и максимальный порядок производной по t в аргументах $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ больше максимального порядка производной по переменной t в знаменателе частной производной.

Теорема 1 [11]. Пусть $x^i = S^i(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_m})$ $S:(\overline{x})\to x(\overline{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m, $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(p)}{\overline{x}})}{\partial \overset{(s)}{\overline{x}}{}^{j}} = \begin{cases} C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right),\ C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k,\ l\ge s\\ 0,\ l<s.\end{cases} \qquad (1)$$

Теорема 2 [10] (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$). При замене $(\overline{x})\to(x(\overline{x}))$ в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ импульсы $\overline{p_k^i(n)(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\overline{x}})}$ преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(n)(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\overline{x}})} = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i} = p_k^j(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i} \text{ – свертка по } j,$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^{i}}\Big) \text{ – импульс порядка } k,\ k=\overline{0,n}\quad i,j=\overline{1,m}.$$

Пусть T^kX_m – расслоенное пространство скоростей порядка k многообразия X_m, $\pi_k^l: T^lX_m\to T^kX_m$, $l>k\ge 0$ – каноническая проекция (при $k=0$ – проекция на базу расслоения многообразия X_m). Предполагается, что X_m – бесконечно гладкое многообразие, $U(v_{0_x}^{2n-1})$ – окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$.

Определение 2. Пусть $L:T^nX_m\to\mathfrak{R}$ – гладкая функция. $L(x,\dot{x},\dots,x^{(n)})$ – локальная запись в системе координат (x). (ϕ_x: $(V\subset T^nX_m)\to\mathfrak{R}^{(n+1)m}$ – координатный диффеоморфизм в локальной карте (V,ϕ_x)). Функция $L:T^nX_m\to\mathfrak{R}$ называется невырожденной (вырожденной) в точке $v_x^n\in T^nX_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения, если $\det\Big(\dfrac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)}{x}{}^{i}\,\partial \overset{(n)}{x}{}^{j}}\Big)\ne 0\ (=0)$ соответственно.

Теорема 3. Пусть $L:T^nX_m\to\mathfrak{R}$ – гладкая функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$, $L\left(x,\dot{x},\dots,x^{(n)}\right)$ – локальная запись в системе координат (x) в базе X_m, $L\left(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(n)}{\overline{x}}\right)$ – локальная запись в системе координат $(\overline{x})$.

Тогда
$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \tag{2}$$

Доказательство. $$\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}.$$

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)+\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \tag{3}$$

Преобразуем левую часть в сумме (3):

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)=\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в левую часть суммы (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \tag{5}$$

Подставляем полученное выражение (5) в формулу (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big)\cdot\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big). \tag{6}$$

По **теореме 1**, $\dfrac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right),\ C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k,\ l \ge s \\ 0,\ l < s \end{cases} \quad i,j=\overline{1,m}.$

Поскольку $n \ge t \ge 0$, то

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}} = \begin{cases} C_n^n \cdot D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right) = D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right) = \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}, C_n^n = \dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = 1, n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k, t = n = \delta_n^t \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \\ 0,\ t < n. \end{cases}$$

Значит, при $n \ge t \ge 0$,

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{i}} = \delta_n^t \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}. \tag{7}$$

где $\delta_n^t = \begin{cases} 1, t = n \\ 0, t \ne n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Подставляем формулу (7) в правую часть суммы (6):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)}{\bar{x}}{}^{j}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\frac{\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)}{\bar{x}}{}^{j}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\delta_n^t \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)}{\bar{x}}{}^{j}} \delta_n^t \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{j}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right). \tag{8}$$

Так как $n \ge 1$, то $\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$ зависит только от $\bar{x}$ и не зависит от производных первого порядка и выше. Следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = 0.$ Значит полученное выражение (8) – правая часть в формуле (6)

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{j}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = 0.$$

Значит, выражение (3), равное выражению (6), с учетом (8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}\,\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)}{x}{}^{d}\,\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}} \frac{\partial \overset{(s)}{x}{}^{d}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}} \frac{\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}}\left(\frac{\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)}{x}{}^{d}\,\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}} \frac{\partial \overset{(s)}{x}{}^{d}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}} \frac{\partial \overset{(t)}{x}{}^{j}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}}. \tag{9}$$

На основании выражения (7) имеют место равенства:

$$n \ge t \ge 0,\ \frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{l}} = \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l},\ \text{где}\ \delta_n^t = \begin{cases} 1, t = n \\ 0, t < n \end{cases} - \text{символ Кронекера}; \tag{10}$$

$$n \ge s \ge 0,\ \frac{\partial x^{(s)d}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)}{\bar{x}}{}^{k}} = \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k},\ \text{где}\ \delta_n^s = \begin{cases} 1, s = n \\ 0, s < n \end{cases} - \text{символ Кронекера}. \tag{11}$$

Подставляя формулы (10), (11) в выражение (9), получим

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \tag{12}$$

Так как $\delta_n^s=\begin{cases}1, s=n\\ 0, s<n\end{cases}$ – символ Кронекера, то

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d=n}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^{s=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=$$

$$=\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s=n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^{s=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}, \tag{13}$$

так как $\delta_n^s=0,\ s<n;\ \delta_n^{s=n}=1$.

Подставляем выражение (13) в формулу (12):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\delta_n^t\sum_{d=1}^{m}(\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\sum_{d=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \tag{14}$$

Так как $\delta_n^t=0,\ t<n;\ \delta_n^{t=n}=1$, то

$$\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}+\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t=n)j}{x}}\delta_n^{t=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=$$

$$=\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \tag{15}$$

Подставляя формулу (15) в формулу (14), получим

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}=\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. $L:T^nX_m\to\Re$ – невырожденная (вырожденная) функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$ в системе координат (x) базы X_m расслоения. Тогда в любой другой системе координат $(\bar{x})$ в базе X_m функция Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$ также будет невырожденной (вырожденной) соответственно, следовательно, свойства вырожденности и невырожденности не зависит от выбора локальной системы координат в базе X_m, то есть является геометрическим инвариантом в расслоении $T^n X_m$.

Доказательство. По **теореме 3**, $\dfrac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}} \dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}$.

Невырожденность в системе координат (x) в базе X_m по определению означает, что $\det(\dfrac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}) \neq 0$. Поэтому, **по теореме 3**, имеем

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}) = \det(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) =$$

$$= \det(\frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}) \det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) \neq 0, \text{ так как } \det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) \neq 0 \text{ и } \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) \neq 0,$$

поскольку замена координат $x = x(\bar{x})$ в базе X_m невырожденная.

Аналогично, если $L: T^n X_m \to \Re$ – вырожденная функция, то $\det(\dfrac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}) = 0$. В силу **теоремы 3** получим

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}) = \det(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) =$$

$$= \det(\frac{\partial^2 L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}) \det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) = 0 \cdot \det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) \det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) = 0.$$

Теорема 4 доказана.

Определение 3. Гладкое отображение $f: T^k X_m \to T^l X_m$ $(0 \leq k < l)$ называется сечением, если следующая диаграмма коммутативна (рисунок).

$$\begin{tikzcd}
T^kX \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & T^lX \arrow[dl, "\pi^l_k"] \\
& T^kX &
\end{tikzcd}$$

Рисунок

Определение 4. Пусть $U(v_{0_x}^{2n-1})$ – окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1} X_m$.

Подмногообразие $\sigma_f \subset T^{2n} X_m$, $\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n} X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}),\ v_x^{2n-1} \in U(v_{0_x}^{2n-1}) \right\}$ называется (гладким) подмногообразием, порожденным сечением $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$.

Пусть $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \to \Re$ – невырожденная функция, $L(x, \dot{x}, ..., x^{(n)})$ локальная запись в системе координат (x) и $\varphi_x: (V \subset T^{2n} X_m) \to \Re^{(2n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм в локальной карте $(V \subset T^{2n} X_m, \varphi_x)$ – расслоенного пространства $T^{2n} X_m$

Лемма 1. Пусть $U(v_{0_x}^{2n-1})$ – окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1} X_m$. Подмногообразие

$$\sigma_f \subset T^{2n} X_m,\ \sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n} X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}),\ v_x^{2n-1} \in U(v_{0_x}^{2n-1}) \right\},$$

задаваемое сечением $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$ имеет размерность $2mn$.

Доказательство. Пусть (x) – локальная система координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$. Тогда отображение $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$ в локальных координат имеет вид

$$y^{(k)i}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = \begin{cases} x^{(k)i},\ k = \overline{0, 2n-1} \\ f_i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}),\ k = 2n \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим отображения $s(k,i) = m \bullet k + i,\ k = \overline{0, 2n},\ p(l, j) = m \bullet l + j,\ l = \overline{0, 2n-1},\ i, j = \overline{1, m}.$

Отображение $s(k,i),\ k = \overline{0, 2n},\ i = \overline{1, m}$ биективно отображает двумерную целочисленную решетку размером $[0; 2n] \times [1; m]$ в одномерную целочисленную решетку отрезок $[1; (2n+1) \bullet m]$.

Сюрьективность отображения $s(k,i) = m \bullet k + i$ следует из очевидного тождества:

$$s = \begin{cases} m \bullet [\frac{s}{m}] + s - m \bullet [\frac{s}{m}],\ \mathrm{mod}(s, m) \neq 0 \Rightarrow 0 \le k = [\frac{s}{m}] \le 2n,\ 1 \le i = s - m \bullet [\frac{s}{m}] < m, \\ m \bullet ([\frac{s}{m}] - 1) + m,\ \mathrm{mod}(s, m) = 0 \Rightarrow 0 \le k = [\frac{s}{m}] - 1 \le 2n,\ i = m, \end{cases}$$

где $\mathrm{mod}(s, m)$ – остаток от деления s на m.

Докажем, что $s(k,i)$ инъективно: $s(k,i) = m \bullet k_1 + i_1 = m \bullet k_2 + i_2 \Rightarrow m \bullet (k_2 - k_1) = i_1 - i_2$. Поскольку $1 \le i_1, i_2 \le m \Rightarrow 1 - m \le i_1 - i_2 \le m - 1$, то $m \bullet (k_2 - k_1) \vdots m \Rightarrow i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0$, следовательно, инъективность и сюрьективность, а значит, и биективность $s(k,i)$ доказаны.

Аналогично доказывается биективность отображения $p(l, j) = m \bullet l + j$.

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} Y^{s(k,i)} = x^{(k)i},\ k = \overline{0, 2n-1},\ i = \overline{1, m} \Rightarrow Y^{s(k,i)} = Y^{mk+i} = x^{(k)i} = X^{p(k,i)} = X^{mk+i} = X^s \\ Y^{s(2n,i)} = x^{(2n)i} = f_i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) \\ X^{p(l,j)} = x^{(l)j},\ l = \overline{0, 2n-1},\ j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Пусть E_{2mn} – единичная матрица размера $2mn$, $F_i(X^1, ..., X^{2mn}) = f_i(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})$. Тогда ранг матрицы Якоби

$$\mathrm{rk} \frac{\partial y^{k(i)}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})}{\partial x^{(l)j}} = \mathrm{rk} \frac{\partial Y^{s(k,i)}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})}{\partial X^{p(l,j)}} = \mathrm{rk} \frac{\partial X^{s(k,i)}(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x})}{\partial X^{p(l,j)}} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix} \ge 2mn.$$

С другой стороны, ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix}$ размером $(2mn+m)\times 2mn$ имеет вид

$$\operatorname{rk} A \le \min(2mn+m, 2mn) = 2mn \Rightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix} = 2mn.$$

Значит, отображение $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ задает подмногообразие размерности $2mn$.
Лемма 1 доказана.

Определение 5. Подмногообразие $\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \left\{ v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m, \mid \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \Re^m \right\}$ называется лагранжевым подмногообразием в окрестности $V(v_{0_x}^{2n}) \subset T^{2n}X_m$, $\varepsilon_L \subset T^{2n}X_m$. Здесь $\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$ – гладкая функция, которая в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ имеет вид

$$\varepsilon_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right), \ i = \overline{1, m}.$$

Постановка задачи. Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L : T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Ставится следующая задача: пусть $T^{2n}X_m \supset V(v_0^{2n}) = V$ – окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n}X_m$, $\pi_{2n-1}^{2n} : T^{2n}X_m \to T^{2n-1}X_m$ – каноническая проекция: $\pi_{2n-1}^{2n}(V) = U(u_0^{2n-1}) = U = \left\{ \pi_{2n-1}^{2n}(v) \mid \forall v \in V(w_0^{2n}) \right\}$, $\pi_{2n-1}^{2n}(v_0^{2n}) = u_0^{2n-1}$ $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ – гладкое сечение.

Существуют ли окрестность $\overline{V}(v_0^{2n}) \subset V(v_0^{2n})$ ($\pi_{2n-1}^{2n}(\overline{V}) = \overline{U}$) и такая невырожденная функция $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \to \Re^m$, такие что указанные многообразия $\sigma_f(\overline{U}) = \varepsilon_L(\overline{V})$ совпадают.

Теорема 5. Определение 5 корректно, так как оно не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$, то есть независимо от выбора локальных координат (x) в базе X_m в окрестности точки $v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m$ расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ определяет одно и то же подмногообразие:

$$\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \left\{ v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m \mid \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \Re^m \right\}.$$

Более точно: если $x = x(\overline{x})$ – произвольная невырожденная замена в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ и функции

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\varepsilon^i_{(\overline{x})L}(\overline{x}, \overset{\bullet}{\overline{x}}, \dots, \overset{(2n)}{\overline{x}}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \overline{L}(\overline{x}, \overset{\bullet}{\overline{x}}, \dots, \overset{(n)}{\overline{x}})}{\partial \overline{x}^{(l)i}}\right), \quad i = \overline{1, m},$$

представляющие собой координатные записи отображений:

$$\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m, \quad \varepsilon_{(\overline{x})L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\overline{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m,$$

то имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}. \tag{16}$$

Доказательство. По определению $\varepsilon_{(x)L}:\Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_x(W\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) = p_0^i(n) = p_{0,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x}),\quad i=\overline{1,m}.$$

Действительно, так как $L:T^nX_m\supset\pi_n^{2n-1}U\to\Re \Rightarrow p=n$, следовательно,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big),$$

$k=\overline{0,n},\ i=\overline{1,m}.$ В частности, при $k=0$ запишем

$$p_{k=0}^i(n) = p_{0,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}).$$

Аналогично, $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}\Big) = \bar{p}_0^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}),\ i=\overline{1,m}$, поскольку

$$\bar{p}_k^i(n) = \bar{p}_{k,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{\bar{x}}) = \bar{p}_{k,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big),$$

$k=\overline{0,n},\ i=\overline{1,m}.$

$$\bar{p}_{k=0}^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}\Big) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}).$$

По **теореме 2**, для $k=0,n,\ i,j=\overline{1,m}$ имеем

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_k^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},\ \det\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\neq 0.$$

В частности, для $k=0$ (импульсы 0-го порядка – функциональные части в уравнениях Эйлера – Лагранжа)

$$\overline{p_0^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_0^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_0^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_0^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}))\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Таким образом доказано, что $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$, $\det\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\neq 0$,

поэтому

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = 0,\ i,j=\overline{1,m}.$$

Следовательно, равенство нулю левой части уравнения Эйлера – Пуассона $\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})=0,\ j=\overline{1,m}$ в одной системе координат влечет $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}})=0$ во всех системах координат. Таким образом, лагранжево подмногообразие не зависит от выбора локальной системы координат при замене в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})$ – локальная запись гладкой функции $f:T^nX_m\to\Re$. В локальных координатах в базе X_m расслоения T^nX_m. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}),\ p\ge 1.$$

Доказательство. Проведем индукцией по p. База индукции $p=1$, тогда

$$D_t^1 f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=D_t f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

При $s\le k-1\Rightarrow s+1\le k$, поэтому $\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение $\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма $a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+1-1)}{x})=a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ также зависит от производных порядка не выше k. Получим

$$D_t^1 f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}=a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для любого натурального числа p, то есть

$$D_t^p f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Тогда докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p+1-1)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p)}{x}).$$

По предположению индукции имеем

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})=D_t(D_t^p f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x}))=D_t(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}))=$$

$$=(\sum_{j=1}^{m}D_t\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}+\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}D_t(\overset{(k+p)j}{x}))+D_t\,a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}D_t\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p+1)j}{x}+D_t\,a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы $\sum_{j=1}^{m}D_t\frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен $\max(k+1,k+p)=k+p$, так как $p\ge 1$. По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок производных в $D_t \dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в $D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x})$ равен $k+p-1+1=k+p$.

Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p)}{x}) = \sum\limits_{j=1}^{m} D_t \dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x})$ зависит от производных порядка не выше $k+p$.

Итак, $\sum\limits_{j=1}^{m} D_t \dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p)}{x}).$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})$ – функции из условия **теоремы 5**. Тогда

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^n \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}.$$

Доказательство. Проведем индукцией по n. База индукции $n=1$, тогда

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n=2)}{x}) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x}) = \sum_{l=0}^{n=1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^0 D_t^0 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n=1)}{x})}{\partial x^{(0)i}}\right) + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n=1)}{x})}{\partial x^{(1)i}}\right) =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{p=0}^{1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(p)j} \partial \dot{x}^i} \cdot x^{(p+1)j} =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(0)j} \partial \dot{x}^i} x^{(0+1)j} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(1)j} \partial \dot{x}^i} x^{(1+1)j} =$$

$$= \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j = (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j + g_i(x,\dot{x}),$$

где $g_i(x,\dot{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i$. База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для n. Докажем, что оно верно для $n+1$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2(n+1))}{x}) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2(n+1))j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2(n+1)-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} x^{(2n+2)j} + g_i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n+1)}{x}).$$

Для $n+1$ имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big).$$

По **теореме 6**,

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(l)i}}\cdot\overset{(n+1+l)j}{x}+a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1+l-1)}{x})\Big)+$$

$$+(-1)^{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(n+1)i}}\cdot\overset{(n+1+n+1)j}{x}+a(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1+n+1-1)}{x})\Big)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(l)i}}\cdot\overset{(n+1+l)j}{x}+a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big)+$$

$$+(-1)^{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(n+1)i}}\cdot\overset{(2n+2)j}{x}+a(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})\Big).$$

Максимальный порядок производных в $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(l)i}}\cdot\overset{(n+1+l)j}{x}+a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big)$ равен $\max\limits_{0\le l\le n}(n+1,n+1+l,n+l)=\max\limits_{0\le l\le n}(n+1+l)=n+n+1=2n+1$, поэтому

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(l)i}}\cdot\overset{(n+1+l)j}{x}+a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big)+(-1)^{n+1}\cdot a(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})=\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x}).$$

$$\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)=(-1)^{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j}\partial x^{(n+1)i}}\cdot\overset{(2n+2)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})\Big).$$

Индуктивный переход доказан.
Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Для двух отображений: $\varepsilon_{(x)L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_x(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_{\bar{x}}$ $(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$, рассмотрим 2 их композиции:

$$\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x:\ V\subset T^{2n}X_m\to\Re^m \quad \text{и} \quad \varepsilon_{(\bar{x})L}\circ\varphi_{\bar{x}}:\ V\subset T^{2n}X_m\to\Re^m.$$

Тогда множества решений уравнений $\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x(v^{2n})=0\in\Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L}\circ\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})=0\in\Re^m$, $v^{2n}\in W\subset T^{2n}X_m$, совпадают поточечно, то есть задают в $T^{2n}X_m$ одно и то же гладкое подмногообразие размерности $(2n+1)\cdot m-m=2mn$.

Более того, имеет место равенство

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n}))=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n}))\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}. \tag{17}$$

Доказательство: Для окрестности V $v^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m$ из расслоенного пространства $T^{2n}X_m$, на которую действует локальная карта $\varphi_x(v^{2n})$, запишем

$$\varphi_x(v^{2n}) = (x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x}), \qquad \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = (\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(2n)}{\bar{x}}).$$

По **теореме 5**, имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j_{(x)L}(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

поэтому $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n})) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$, то есть

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j_{(x)L} \circ \varphi_x(v^{2n}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Соотношение (17) доказано.

В матрице Якоби $\dfrac{\partial \varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$, $k = \overline{0, 2n}$, $i = \overline{1, m}$, отображения $\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$ размером $m \times (2n+1)$ существует невырожденный минор порядка $m \times m$.

По **теореме 7**, имеем

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x}),\ i = \overline{1, m}.$$

$$\frac{\partial \varepsilon^i_{(x)L}(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left((-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} + g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left((-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k}\right) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k}\right) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}}\right) \bullet x^{(2n)k} + \frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k})) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}.$$

Так как $g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x}), \dfrac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}}$ не зависит от $\overset{(2n)j}{x}$ явно, то

$$\frac{\partial g_i(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}}, \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\bullet}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}}\right) = 0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}}(x^{(2n)k} = \delta^k_j = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера, то имеет равенство

$$(-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}} \left(\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right) \bullet x^{(2n)k} + \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}} (x^{(2n)k})) + \frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \frac{\partial}{\partial \overset{(2n)j}{x}} (x^{(2n)k} + \frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \delta_j^k + \frac{\partial g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})}{\partial \overset{(2n)j}{x}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \delta_j^k = (-1)^n \bullet \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}},$$

где $\delta_j^k = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера.

По условию функция $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} W \to \Re$ – невырожденная, поэтому, по **теореме 4**, в любых координатах $\det\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}\right) \neq 0$.

Значит, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) \geq m$. С другой стороны, ранг матрицы Якоби

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) \leq \min(m,(2n+1) \bullet m) \leq m, k = \overline{0,2n}, i = \overline{1,m}).$$

Значит, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) = m$. Следовательно, система уравнений $\varepsilon_{(\bar{x})L}: \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}$ $(W \subset T^{2n} X_m) \to \Re^m$ задает гладкое подмногообразие размерности $(2n+1) \cdot m - m = 2mn$.

Теорема 8 доказана.

Рассмотрим V окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n} X_m$, на которой определена проекция $\pi_{2n-1}^{2n}: T^{2n} X_m \to T^{2n-1} X_m$ (каноническая проекция). Окрестность $U(u_0^{2n-1}) = \pi_{2n-1}^{2n}\left(V(v_0^{2n})\right)$ – образ при каноническом проектировании окрестности V.

Функция $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$ представляет собой гладкое сечение и невырожденную функцию Лагранжа во всей области определения $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1} U \to \Re$.

Теорема 9 (инвариантный критерий решения задачи). Пусть σ_f – подмногообразие сечения f, то есть

$$\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n} X_m \mid v^{2n} = f(u^{2n-1}),\ u^{2n-1} \in U(u_0^{2n-1}) \right\},$$

а $\varepsilon_L(V)$ – лагранжево подмногообразие в $T^{2n} X_m$, то есть

$$\varepsilon_L(V) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n} X_m \mid \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n})) = 0 \in \Re^m \right\}.$$

Два подмногообразия σ_f и ε_{L} совпадают

$$\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi^{2n}_{2n-1}(V)) = \varepsilon_{\mathrm{L}}(V),$$

тогда и только тогда, если в любой локальной системе координат (x) в базе X_m

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to 0 \in \Re^m.$$

Доказательство проведем от противного. По **теореме 8**, решение уравнения $\varepsilon_{(x)L} \circ \phi_x(v^{2n}) = 0 \in \Re^m$ не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m. Значит, равенство композиции

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) = 0 \in \Re^m$$

не зависит от выбора локальных координат.

Так как $f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ – гладкое сечение, то в локальной системе координат (x) в базе X_m лагранжево сечение задается уравнением

$$\overset{(2n)i}{x} = f^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}), \tag{18}$$

$\varepsilon_L(V)$ задается системой уравнений Эйлера – Пуассона

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Равенство $\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi^{2n}_{2n-1}(V)) = \varepsilon_{\mathrm{L}}(V)$ означает, что наборы $\overset{(2n)i}{x} = f(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x})$ являются решением системы уравнений (18). Это значит, что

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n)}{x} = f(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x})) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} f^j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{20}$$

Пусть существует набор $(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}, \overset{(2n)}{x})$, являющийся решением (19), но не удовлетворяющий условию (18), то есть $\overset{(2n)j}{x} = f_j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + d_j$, $|d| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} d_j^2} \neq 0$, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + d_j) + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{21}$$

В силу равенства (21) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

. Значит,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Так как $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1}U \to \Re$ – невырожденная функция, то, по **теореме 4**, в любой системе координат $\det(\dfrac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\, \partial \overset{(n)j}{x}}) \neq 0$. Значит, существует обратная матрица $(\dfrac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}$, $k,i=\overline{1,m}$, такая что

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}=\delta_j^k\,, \quad \text{где} \quad \delta_j^k=\begin{cases}1, j=k\\ 0, j\neq k\end{cases} - \text{символ Кронекера.}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j)=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\cdot 0=0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}d_j(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\, \partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}})=\sum_{j=1}^{m}d_j\,\delta_j^k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k+d_k\delta_{j=k}^k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0+d_k\delta_k^k=d_k\,,k=\overline{1,m}. \quad (23)$$

В правой части выражения (22) $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0=0$, т.к. $\delta_j^k=\begin{cases}1, j=k\\ 0, j\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера, то есть $\bar{d}=(d_1,d_2,\dots,d_m)=(0,0,\dots,0)=\bar{0}$. Получили противоречие с тем, что $\overset{(2n)j}{x}=f_j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})+d_j$, $|d|=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}d_j^2}\neq 0$. Значит, решением системы (19) являются только наборы вида (18).

Теорема 9 доказана.

Следствие. Из **теоремы 9** вытекает, что лагранжевость сечения $f: T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$, которое в локальных координатах задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\overset{(2n)j}{x}=f^j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})$, $j=\overline{1,m}$, эквивалентно существованию невырожденной матрицы $a_{ij}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})$, $\det(a_{ij}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}))\neq 0$, такой что

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})(\overset{(2n)j}{x}-f^j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}))=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\cdot 0=0.$$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}.$$

Итак, сформулированная выше задача лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей в локальных координатах означает существование невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа, разрешая которую относительно старших производных можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения с заданной правой частью.

Возникает естественный вопрос: существуют ли нелагранжевые сечения. Оказывается при $n>1$ существует прозрачный необходимый признак.

Теорема 10. Имеет место формула разложения от производной функции Лагранжа порядка k по независимой переменной t

$$D_t^k L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,,k\ge 1. \quad (24)$$

Доказательство. Проведем индукцией по k. Для базы индукции $k=1$

$$D_t^k L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k=1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{p=1}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}). \tag{25}$$

Так как $r = p = 1$, то выражение (25) примет вид

$$\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r 1\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1\\ k_1=n+1}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j_1=1}^{m} C^{j_1,}_{n+1}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j_1} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}). \tag{26}$$

$$D_t^{k=1}L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = D_t L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^{m}\Big(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1}\Big) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1} + \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}).$$

База индукции доказана.

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть утверждение верно для k. Докажем, что оно верно для $k+1$

$$D_t^{k+1}L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k+1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} \overline{C}^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + \overline{h}(x,\dots,\overset{(n)}{x}),\ k\ge 1. \tag{27}$$

По предположению индукции имеем

$$D_t^{k}L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x}),\ k\ge 1.$$

Учитывая линейность оператора дифференцирования $D_t(\prod_{s=1}^{r} f_s) = \sum_{u=1}^{r}\frac{\prod_{s=1}^{r} f_s}{f_u}D_t f_u$, получим

$$D_t^{k+1}L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}) = D_t(D_t^k L(x,\dot{x},\dots,x)) = D_t\Big(\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,\dots,\overset{(n)}{x})\Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} D_t C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + D_t h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) +$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = m+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})D_t x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot D_t x^{(k_r)j_r} =$$

$$= \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} D_t C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} + D_t h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) +$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1+1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} +$$

$$+\ldots+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}x^{(k_2+1)j_2}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} +$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r+1)j_r}. \quad (28)$$

Условие $\sum_{i=1}^{r}k_i = rn+p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$ приводит к виду

$$D_t C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j} = \sum_{j=1}^{m}B_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j} + D_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})$$

и означает, что набор $(k_1,\dots,k_r):\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$ в сумме

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} D_t C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} \quad (29)$$

будет соответствовать набору $(k_1,\dots,k_r,k_{r+1}=n+1):\sum_{i=1}^{r+1}(k_i-n)=\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)+(n+1-n)=p+1$.

В формуле (29) $r\le p\le k \Rightarrow r+1\le k+1, p+1\le k+1$, а т.к. в выражении (27) выполнено неравенство $r\le p\le k+1$, то все слагаемые вида (29) войдут в сумму (27). Каждому набору $(k_1,..,k_i,.,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p$ в сумме (28)

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}x^{(k_2)j_2}\ldots x^{(k_i+1)j_2}\cdot x^{(k_r)j_r}$$

соответствует набор $(k_1,..,k_i+1,.,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p+1$.

В сумме (28) $r\le p\le k \Rightarrow p+1\le k+1$, а т.к. в (27) $r\le p\le k+1$, то все слагаемые вида (28) войдут в сумму (27).

Еще одно слагаемое в (28) $D_t h(x,\dots,\overset{(n)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial h(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j} = \sum_{j=1}^{m}B(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j} + D(x,\dots,\overset{(n)}{x})$.

Очевидно, что первое слагаемое в последней формуле как частный случай при $r = p = 1$ входит в первую сумму формулы (27), а второе слагаемое $D(x,..., \overset{(n)}{x})$ – в свободный член $\bar{h}(x,..., \overset{(n)}{x})$ той же формулы (27).

Итак, все слагаемые суммы (28) являются членами суммы (27). Индуктивный переход доказан.

Теорема 10 доказана.

Замечание 1. Все слагаемые в сумме при $l \geq 1,\ l < k$

$$D_t^l L(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{l} \sum_{r=1}^{p} \sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{n+1 \leq k_1,...,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C_{k_1,...,k_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,..., \overset{(n)}{x}) x^{(k_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(k_r)j_r} + h(x,..., \overset{(n)}{x}),\ l \geq 1, l < k \quad (30)$$

структурно входят в сумму (24), т.к. $l \leq k$ и все условия в сумме (30) выполняются для суммы (24).

Замечание 2. Введем новые переменные:

$k_1 - n = s_1, k_2 - n = s_2, ..., k_r - n = s_r \Rightarrow s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, ..., s_r \geq 1 \quad k_1 = s_1 + n, ..., k_r = s_r + n$, тогда

$$D_t^l L(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(n)}{x}) = \sum_{p=1}^{l} \sum_{r=1}^{p} \sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leq s_1,...,s_r \\ \sum_{i=1}^{r} s_i = p}} C_{s_1,...,s_r}^{j_1,j_2,...,j_r}(x,..., \overset{(n)}{x}) x^{(s_1+n)j_1} \cdot ... \cdot x^{(s_r+n)j_r} + h(x,..., \overset{(n)}{x}),\ l \geq 1.$$

Теорема 11. Пусть $\overset{(2n)i}{x} = f_j(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}), i = \overline{1,m}$ – локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$, $n > 1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ карты $(U(u_0^{2n-1}), \varphi_x)$; $\varphi_x : U(u_0^{2n-1}) \to \Re^{2mn}$ – координатный гомеоморфизм, где $\varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = W_{\Re^{2mn}(x)}(x_0, \overset{\bullet}{x}_0,..., \overset{(2n-1)}{x_0}) \subset \Re^{2mn}$, $\varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = (x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x})$.

Тогда

$$\begin{gathered} f_i(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{r=2}^{n} \sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leq s_1,...,s_r \\ \sum_{i=1}^{r} s_i = n}} C_{s_1,...,s_r}^{ij_1,j_2,...,j_r}(x,..., \overset{(n)}{x}) x^{(n+s_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(n+s_r)j_r} + \\ + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{p} \sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{n+1 \leq k_1,...,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} s_i = p}} C_{s_1,...,s_r}^{ij_1,j_2,...,j_r}(x,..., \overset{(n)}{x}) x^{(n+s_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x,..., \overset{(n)}{x}). \end{gathered} \quad (31)$$

Доказательство. На основании **теоремы 7** имеем относительно старших производных линейную невырожденную систему уравнений

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Разрешая эту систему относительно старших производных, умножая обе части на $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right)^{-1}$, в силу невырожденности функции $L : T^n X_m \to \Re^m$ $\left(\det\left(\frac{\partial^2 L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}\right) \neq 0\right)$, выражаем

$$f_i(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right)^{-1} g_j(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}),$$

в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\overset{(2n)i}{x} = f_i(x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x}), i = \overline{1,m}$.

Поскольку член со старшей производной в сумме

$$\varepsilon^{i}_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}D_t^{l}\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) \tag{32}$$

равен $D_t^{n}\left(\dfrac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)$, то на основании **теоремы 10** имеет место равенство

$$D_t^{n}\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots,k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}),\ n\ge 1. \tag{33}$$

Из **замечания к теореме 10** все члены суммы (34) при $l<n$ структурно входят в сумму (33)

$$D_t^{l}\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)=\sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots,k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x}),l\ge 1, \tag{34}$$

поэтому вся сумма (32) будет структурно иметь такой вид, как и выражение (33)

$$D_t^{n}\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots,k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ (n\ge 1). \tag{35}$$

По **теореме 7**, запишем биномиальный коэффициент

$$C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}. \tag{36}$$

Слагаемым $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в сумме (35) с максимальным порядком производной, равным $2n$, имеющим коэффициенты вида (36) соответствует условие $\sum_{i=1}^{r=1}(k_i-n)=n\Rightarrow k_1=2n$, то есть $r=1, p=n$. Все остальные слагаемые в сумме (35) зависят от производных порядка не выше $2n-1$. Поэтому выделение в (35) слагаемых $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в отдельную сумму $\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}=\sum_{j_1=1}^{m}\dfrac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}$ означает исключение из суммы (35) слагаемых с $r=1 и\ p=n$.

Отрицание условия $(r=1)\ \wedge(p=n)$ имеет вид $\overline{(r=1)\ \wedge(p=n)}=\overline{r=1}\vee\overline{p=n}=(r\ne 1)\vee(p\ne n)$.

Условие $(r\ne 1)\wedge(p\ne n)$ включается в условие $(p\ne n)$. Это следует из

$$(r\ne 1)=(r\ne 1)\wedge 1=(r\ne 1)\wedge((p=n)\vee(p\ne n))=(r\ne 1)\wedge(p=n)\ \vee\ (r\ne 1)\wedge(p\ne n).$$

$$(r\ne 1)\vee(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n)\ \vee\ (r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)=$$

$$=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee\ ((r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)\ =(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\vee((r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)\wedge 1)=$$

$$=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\vee((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \ \vee\ ((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n).$$

Так как $((r\ne 1)\vee 1)=1$ и $((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=1\wedge(p\ne n)=(p\ne n)$ то,

$$(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \ \vee\ ((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \ \vee(p\ne n).$$

Итак, $\quad(r\ne 1)\vee(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \ \vee(p\ne n)=(\ r\ge 2)\wedge(p=n))\vee(p\le n-1).\qquad(37)$

Условия $((r\neq 1)\wedge(p=n))$ и $(p\le n-1)$ не пересекаются.

$$D_t^n\Big(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\Big)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})\ =$$

$$=\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\(r\neq1)\vee(p\neq n)}}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})=$$

$$=\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\((r\ge2)\wedge(p=n))\ \vee(p\le n-1)}}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})=$$

$$=\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}).\qquad(38)$$

Тогда уравнения $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)=0$ будут иметь структурный вид (38).

$$\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}=-\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}-$$

$$-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}).\qquad(39)$$

Так как $\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)k}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}\Big)^{-1}$ зависит от производных порядка n, то при умножении обеих частей формулы (39) на обратную матрицу $\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)k}{x}\,\partial\overset{(n)j_1}{x}}\Big)^{-1}$ правая часть (39) сохранит свой структурный вид:

$$\overset{(2n)i}{x}=f_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}). \tag{40}$$

При замене переменных в сумме (40)

$$k_1-n=s_1\,,k_2-n=s_2\,,\dots,k_r-n=s_r\Rightarrow s_1\ge 1,s_2\ge 1,\dots,s_r\ge 1\quad k_1=s_1+n,\dots,k_r=s_r+n$$

получим

$$\overset{(2n)i}{x}=f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}). \tag{41}$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть $\overset{(2n)i}{x}=f_j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$ – локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$, $n>1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$. Тогда

$$f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{kji}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(n+1)k}{x}\overset{(2n-1)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n-1)j}{x}+c_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-2)}{x})\ i=\overline{1,m}.$$

Доказательство. Используем основное утверждение **теоремы 11** – формулу (31)

$$f_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}). \tag{42}$$

Слагаемые со старшей производной в сумме $\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}$ имеют вид $a(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(n+n-1)}{x}\overset{(n+1)}{x}$. Это следует из того что $r=2$ и $s_1+s_2=n$, тогда решениями являются наборы $(s_1,s_2)=(n-1,1)$, $(s_1,s_2)=(n-2,2)$, … Член со старшей производной такой $a(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n-1)}{x}\overset{(n+1)}{x}$.

Аналогично слагаемые со старшей производной во второй сумме $\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})$ имеют вид $b(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})\overset{(n+n-1)}{x}$.

Это следует из того, что $r=1, p=n-1$ и $s_1=p=n-1$, тогда решениями являются наборы $(s_1)=(n-1)$. Член со старшей производной равен $b(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(n)}{x})\overset{(2n-1)}{x}$.

Теорема 12 доказана.

Результаты, полученные методами дифференциальной геометрии, применимы в линейных и нелинейных задачах математической физики, а также в технических приложениях [20–23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк : ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288.
20. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.

21. Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
22. Наилучшее приближение монотонно убывающих функций кусочно-постоянными функциями в метрике квадратичного отклонения / Р.Ю. Карабанов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : сб. науч. ст. IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых: в двух частях. – 2018. – С. 48–53.
23. Пастухов, Ю.Ф. Квантование функции плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения [Электронный ресурс] // Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, Р.П. Богуш / Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018) : Электронный сб. ст. I междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 14–15 июня 2018 г. / Полоцкий государственный университет. – Новополоцк, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – С. 92–95.

Поступила 24.09.2018

LAGRANGIAN SECTIONS

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The concept sections of Lagrange in fibered velocity spaces of arbitrary order is defined invariantly, their properties are formulated and proved, an invariant criterion for solving the problem is given, a necessary condition for Lagrangian sections and ODE systems of arbitrary even order is obtained.

Keywords: *inverse variational problem, stratified velocity space, Lagrangian section, Euler – Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, nondegenerate function.*