

МАТЕМАТИКА

УДК 511.8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ВО МНОЖЕСТВЕ ПОЛУКВАТЕРНИОНОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. КОЗЛОВ,
 К.С. СУРАВНЕВА, Н.Д. ЖАЛЕЙКО
 (Полоцкий государственный университет)

Предложено определение преобразования подобия для полукватернионов и доказано, что, вообще говоря, это преобразование (так же, как и в случае кватернионов [2, с. 29]) изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Получена формула преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие. В дальнейшем планируется установить геометрический смысл этого преобразования.

Ключевые слова: полукватернионы, гиперкомплексные числа, преобразование подобия.

Введение. На сегодняшний день теория гиперкомплексных чисел представляет собой не только достаточно стройную фундаментальную математическую теорию, но и действенный аппарат для решения многих прикладных задач. Так, например, дуальные числа позволяют математически, с определенной степенью точности, описать физическое пространство-время [1], кватернионы используются в вопросах управления космическим аппаратом [2, 3], при решении задач компьютерного моделирования 3D-объектов [4] и др.

Сама теория гиперкомплексных чисел появилась как обобщение теории действительных чисел. Первым таким обобщением стало множество комплексных чисел, т.е. чисел вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Необходимость введения этой числовой совокупности была обусловлена тем, что во множестве действительных чисел не каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имело решение. Во введенном же множестве комплексных чисел, как выяснилось, всякое алгебраическое уравнение n -й степени с комплексными коэффициентами обладает ровно n корнями с учетом их кратностей. Это так называемая основная теорема алгебры [7]. Другим распространением понятия «действительное число» [8, с. 20–23] стало введение множества дуальных чисел, т.е. чисел вида $a + bi$, в которых a, b – действительные числа, а мнимая единица $i^2 = 0$, причем $i \notin R$ (здесь и всюду далее R обозначает совокупность действительных чисел). Такое множество, как выяснилось совсем недавно, позволяет достаточно точно математически смоделировать физическое пространство-время [1].

Дальнейшее распространение теории комплексных чисел нашло свое отражение во введенном В. Гамильтоном в 1843 г. понятии кватерниона [8, с. 28]

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – действительные числа;

$i, j, k \notin R$ – базисные (кватернионные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \quad kj = -i, \quad ji = -k.$$

Такие числа, а также последующие их обобщения, и стали в дальнейшем носить название *гиперкомплексные числа*. Позднее оказалось, что кватернионы являются не просто отдельным теоретическим объектом математики, но хорошим алгебраическим средством для описания вращений в трех- и четырехмерном векторном пространстве [2, 4], которые, в свою очередь, широко используются [9, 10] в электродинамике, квантовой и теоретической физиках, теории управления [2], компьютерном моделировании 3D-объектов [4] и других областях знаний.

Иным обобщением множества комплексных чисел явилось введенное в 1997 г. Б. Розенфельдом в работе «Геометрия групп Ли» [5] понятие полукватерниона как обобщения комплексного числа, являющееся своего рода синтезом дуальных и комплексных чисел. Позднее, в 2013 г., иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари были определены [6] арифметические операции во множестве полукватернионов и изучены свойства этих операций, а также получены решения отдельных классов уравнений над полукватернионами.

Определение 1 [5]. Действительным полукватернионом (или просто полукватернионом) назовем формальное выражение

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, \quad (1)$$

в котором a_0, a_1, a_2, a_3 – действительные числа; $i, j, k \notin \mathbb{R}$ – кватернионные (базисные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = 0, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad ki = j, \quad jk = 0, \quad kj = 0.$$

Множество всех полукватернионов обозначим через H_s .

Определение 2 [6]. Суммой полукватернионов $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ будем называть полукватернион $q = q_1q_2 \in H_s$, определяемый равенством

$$q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k. \quad (2)$$

Определение 3. [6] Произведением полукватернионов $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ назовем полукватернион $q = q_1q_2 \in H_s$, определяемый следующим равенством:

$$q = (a_0b_0 - a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)i + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k. \quad (3)$$

Операцию произведения полукватернионов можно представить [6] в матрично-векторной форме, т.е. в виде произведения матрицы с элементами (некоторыми коэффициентами первого полукватерниона) на вектор, элементами которого являются числа, стоящие при действительной и мнимых единицах второго сомножителя

$$q = q_1q_2 = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Последнее представление, а также операции над полукватернионами, было предложены иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари в статье [6], в которой кроме того были введены определения нормы и сопряженного полукватерниона и установлены нижеприведенные теоремы 1 и 2.

Теорема 1 [6]. Операция произведения замкнута во множестве полукватернионов и обладает свойствами ассоциативности, некоммутативности и дистрибутивности относительно операции сложения полукватернионов.

Пример 1. Пусть даны полукватернионы

$$q_1 = 4 - 6i + 5j - 3k \quad \text{и} \quad q_2 = -2 + 6i + 9j + k.$$

Тогда их произведением будет полукватернион

$$q_1q_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 14 \\ -74 \end{pmatrix} = 28 + 36i + 14j - 74k.$$

Определение 4. [6] Сопряженным полукватернионом для $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ назовем полукватернион

$$\bar{q} = a_0 - (a_1i + a_2j + a_3k) \in H_s. \quad (5)$$

Пример 1 (продолжение). Сопряженным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$\bar{q}_1 = 4 + 6i - 5j + 3k. \quad (6)$$

Определение 5. [6] *Нормой полукватерниона* $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ назовем действительное число, равное

$$N_q = q \cdot \bar{q} = a_0^2 + a_1^2. \quad (7)$$

Пример 1 (продолжение). Норма полукватерниона q_1 равна

$$N_{q_1} = 4^2 + (-6)^2 = 52. \quad (8)$$

Определение 6. [6] *Обратным для полукватерниона* $q \in H_s$ назовем полукватернион $q^{-1} \in H_s$, вычисляемый по формуле

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}, \quad (9)$$

где $N_t \neq 0$.

Пример 1 (продолжение). В силу **определения 6** с учетом формул (6) и (8) обратным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$q_1^{-1} = \frac{1}{52}(4 + 6i - 5j + 3k).$$

Теорема 2 [6]. *При всяких* $q, q_1, q_2 \in H_s$ *и* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *для операции сопряжения полукватернионов имеют место следующие свойства:*

$$1) \bar{\bar{q}} = q; \quad 2) \overline{c_1q_1 + c_2q_2} = c_1\bar{q}_1 + c_2\bar{q}_2; \quad 3) N_{cq} = c^2N_q; \quad 4) N_{q_1q_2} = N_{q_1} \cdot N_{q_2}; \quad 5) N_{\bar{q}} = N_q.$$

Основная часть. В настоящей работе введено преобразование подобия для множества полукватернионов и доказано, что в общем случае оно, как и для случая кватернионов, изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Кроме того, предложены формула вычисления преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие.

Определение 7. *Левым (правым) преобразованием подобия* $\Pi_t^l(q)$ ($\Pi_t^r(q)$) *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t , *для которого* $N_t \neq 0$, *назовем следующее преобразование*

$$\Pi_t^l(q) = t(qt^{-1}) \quad \left(\Pi_t^r(q) = (tq)t^{-1} \right). \quad (10)$$

Замечание 1. В силу **теоремы 1** операция умножения полукватернионов является замкнутой во множестве полукватернионов, поэтому справедливо включение

$$\Pi_t^l(q) \in H_s \quad \left(\Pi_t^r(q) \in H_s \right).$$

Кроме того, ввиду той же теоремы операция умножения полукватернионов ассоциативна, а значит, левое и правое преобразование подобия совпадают, т.е. для любых $q \in H_s$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$, имеют место равенства

$$\Pi_t^l(q) = t(qt^{-1}) = (tq)t^{-1} = \Pi_t^r(q).$$

Таким образом, скобки в формуле (10) не играют никакой роли и, следовательно, можно говорить в целом о преобразовании подобия на множестве полукватернионов. Итак,

Определение 8. *Преобразованием подобия* $\Pi_t(q)$ *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t , *где* $N_t \neq 0$, *будем называть преобразование вида*

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1}. \quad (11)$$

Теорема 2 (формула преобразования подобия). Пусть даны $q \in H_s$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$. Тогда формула для преобразования подобия $\Pi_t(q)$ полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть даны произвольные полукватернионы $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$, причем $N_t \neq 0$. Тогда в силу **определения 6** для полукватерниона t найдется ему обратный, для которого верны равенства

$$t^{-1} = \frac{\bar{t}}{N_t} = \frac{1}{b_0^2 + b_1^2} (b_0 - b_1i - b_2j - b_3k). \quad (13)$$

Найдем вначале произведение qt^{-1} , а затем полученное выражение умножим слева на число t . При нахождении этих произведений будем пользоваться матрично-векторным представлением умножения полукватернионов (4), а также формулой (13). Имеем равенства

$$qt^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_0}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_2}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}$$

и, далее

$$t(qt^{-1}) = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия $\Pi_t(q)$ полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид

$$\Pi_t(q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Отсюда с учетом равенства $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_t(q) &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_2 \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - 2a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{(-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - 2a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \\ &= q + \frac{2}{b_0^2 + b_1^2} \left((a_1b_3b_0 - a_3b_1b_0 + a_1b_1b_2 - a_2b_1^2)j + (-a_1b_2b_0 + a_2b_0b_1 + a_1b_1b_3 - a_3b_1^2)k \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках в последней формуле, используя известное свойство разложения определителя

$$\begin{aligned} &(a_1b_0b_3 - a_3b_0b_1 + a_1b_1b_2 - a_2b_1^2)j + (-a_1b_0b_2 + a_2b_0b_1 + a_1b_1b_3 - a_3b_1^2)k = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_1 \\ a_3 & b_3 & -b_0 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда отсюда и из формулы (14) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ получим требуемое соотношение (12).

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. В силу формулы (12) и **определения 1** легко видеть, что при преобразовании подобия изменяется лишь часть полукватерниона при базисных единицах, квадрат которых равен нулю.

Пример 2. Рассмотрим преобразование подобия полукватерниона $q = 1 + 2i - 3j + 4k$ с помощью полукватерниона $t = 2 - i + 7j - 5k$, для которого очевидно справедливо неравенство $N_t = 2^2 + (-1)^2 = 5 \neq 0$.

Из формул (8) и (9) следует, что обратным для полукватерниона t является полукватернион

$$t^{-1} = \frac{\bar{t}}{N_t} = \frac{1}{5}(2 + i - 7j + 5k).$$

Найдем преобразование подобия $\Pi_t(q)$, для чего вычислим вначале произведение qt^{-1} , а затем полученное выражение умножим слева на число $t = 2 - i + 7j - 5k$. При вычислении указанных произведений будем использовать матрично-векторную запись произведения полукватернионов (4). Получим равенства

$$qt^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{19}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и, далее, } t(qt^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 2 & 1 \\ -5 & -7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{19}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{61}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия полукватерниона $q = 1 + 2i - 3j + 4k$ с помощью полукватерниона $t = 2 - i + 7j - 5k$ равно

$$\Pi_t(q) = 1 + 2i - \frac{61}{5}j - \frac{12}{5}k. \quad (15)$$

Воспользуемся теперь для рассматриваемых полукватернионов указанной в **теореме 2** формулой (12). Тогда, используя вначале разложение определителя по первой строке, а далее – правило вычисления определителя третьего порядка, получим соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_t(q) &= q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = (1 + 2i - 3j + 4k) + \frac{2}{5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (1 + 2i - 3j + 4k) + \frac{2}{5} \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ j & -3 & 7 & -2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 1 + 2i + \left(-3 + \frac{2}{5}(-14 + 0 + 8 - 0 + 3 - 20) \right) j + \left(4 - \frac{2}{5}(28 + 0 + 4 - 0 - 6 - 10) \right) k = \\ &= 1 + 2i + \left(-3 + \frac{2}{5} \cdot (-23) \right) j + \left(4 - \frac{2}{5} \cdot 16 \right) k = 1 + 2i - \frac{61}{5}j - \frac{12}{5}k. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство правых частей соотношений (15) и (16) подтверждает справедливость полученной в **теореме 2** формулы для вычисления преобразования подобия полукватернионов.

Поскольку очевидно, что совокупность полукватернионов включает в себя множество действительных, а также комплексных чисел, то рассмотрим следующие частные случаи преобразования подобия, которые описаны в нижеприведенных следствиях 1–5.

Следствие 1. Пусть $q \in \mathbb{R}$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$. Тогда имеет место равенство $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Возьмем любые числа $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in H_s$, где $N_t \neq 0$, и $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{R}$. Тогда очевидно, что справедливы равенства $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ и выполняется **теорема 2**, на основании которой имеем формулу

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то выполняется требуемое равенство $\Pi_t(q) = q$. **Следствие 1** доказано.

Следствие 2. Пусть $q \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$. Тогда справедливо равенство $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Зафиксируем любые числа $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$, и $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{C}$. Тогда имеют место равенства $a_2 = a_3 = 0$ и $b_2 = b_3 = 0$. Отсюда, ввиду справедливости для зафиксированных чисел **теоремы 2**, выполняется равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Поскольку в определителе, стоящем в формуле (17), первый и второй столбцы пропорциональны, то он равен нулю. Отсюда и из равенства (17) вытекает требуемое соотношение $\Pi_t(q) = q$. **Следствие 2** доказано.

Замечание 3. **Следствие 2** описывает известный и легко устанавливаемый факт о том, что на множестве комплексных чисел преобразование подобия не изменяет преобразуемое комплексное число.

Следствие 3. Для любых чисел $q \in H_s$ и $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется соотношение $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы соотношения

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ и } N_t = b_0^2 + b_1^2 = b_0^2 \neq 0. \quad (18)$$

Следовательно, для выбранных чисел q и t имеет место **теорема 2**, пользуясь которой, а также первым соотношением в формуле (18), установим равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то в силу последней формулы выполняется требуемое равенство $\Pi_t(q) = q \in H_s$. **Следствие 3** доказано.

Следствие 4. Для произвольных чисел $q \in \mathbb{C}$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$, справедливо равенство

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2a_1}{b_0^2 + b_1^2} ((b_1b_2 + b_0b_3)j + (b_1b_3 - b_0b_2)k) \in H_s. \quad (19)$$

Доказательство. Возьмем любые числа $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{C}$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in H_s$, где $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$.

Тогда выполняются соотношения

$$a_2 = a_3 = 0 \text{ и } b_0 \neq 0 \text{ или } b_1 \neq 0. \quad (20)$$

Очевидно, что выбранные числа удовлетворяют **теореме 2**. Тогда на основании этой теоремы, а также первой из формул (20) имеет место равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Разлагая определитель в равенстве (21) по первому столбцу, а далее – по первой строке, получим равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ b_2 & b_1 & -b_0 \\ b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \left(-j \begin{vmatrix} b_2 & -b_0 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) = \\ = a_1(b_1b_2 + b_0b_3)j + a_1(b_1b_3 - b_0b_2)k.$$

Отсюда и из формулы (21) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$, вынося a_1 за скобки, получим требуемую формулу (19). При этом отметим, что в силу справедливости хотя бы одного из неравенств (20) верны соотношения $\mathbb{C} \ni q \neq \Pi_t(q) \in H_s$. **Следствие 4** доказано.

Замечание 4. Следствие 4 показывает, что преобразование подобия комплексного числа с помощью полукватерниона в результате дает число, являющееся полукватернионом.

Следствие 5. При всяких числах $q \in H_s$ и $t \in \mathbb{C}$, для которого $N_t \neq 0$, выполняется равенство

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2} \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right) \in H_s. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$. Тогда справедливы равенства $b_2 = b_3 = 0$ и существует число $t^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому выполняется теорема 2, а значит, с учетом последних равенств имеет место соотношение

$$\Pi_t(q) = tq t^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Разложим определитель из формулы (23) вначале по второму столбцу, а затем полученный определитель третьего порядка – по первой строке. Имеем равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ a_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \left(-j \begin{vmatrix} a_2 & -b_0 \\ a_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ a_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) = \\ = b_1 \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right).$$

Отсюда и из формулы (23) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$ следует требуемое соотношение

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2} \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right) \in H_s.$$

Следствие 5 доказано.

Замечание 5. Следствие 5 показывает, что при преобразовании подобия полукватерниона даже при помощи комплексного числа вид преобразуемого числа, вообще говоря, не сохраняется (изменяются коэффициенты при мнимых единицах j и k).

Заключение. В настоящей работе для множества полукватернионов введено понятие преобразования подобия и изучены отдельные ее свойства, предложен достаточно простой явный вид формулы нахождения преобразованного кватерниона. Полученные результаты в дальнейшем будут использованы при изучении геометрического смысла введенного преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, Д.Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – Т. 7. – № 2 (14). – С. 11–37.
2. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Петров, А.М. Кватернионное представление вихревых движений / А.М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
4. Дегтярев, М.Ю. Алгоритмы моделирования поверхностей с применением методов ориентации твердого тела: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.13.12 / М.Ю. Дегтярев. – СПб., 2006. – 18 л.
5. Rosenfeld, B. Geometry of Lie groups / B. Rosenfeld. — Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 336 p.
6. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences And Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1. – № 2. – P. 20–27.
7. Тихомиров, В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В.М. Тихомиров, В.В. Успенский // Математическое просвещение. — МЦНМО, 1997. — № 1. — С. 50—70.
8. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. — М. : Физматлит, 1963. — 192 с.
9. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время" (в 2-х тт.) / Р. Пенроуз, В. Риндлер. — М. : Мир, 1987, 1988 — 528 с., 572 с.
10. Кубышкин, Е.И. "Нелинейная алгебра пространства-времени" / Е.И. Кубышкин. — М. : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. — 304 с.

Поступила 27.03.2019

THE SIMILARITY TRANSFORMATION IN THE SET OF SEMI-QUATERNIONS

A. KOZLOV, K. SURAVNEVA, N. ZHALEIKO

In this paper, the definition of a similarity transformation for semi-quaternion's is proposed and it is proved that, generally speaking, this transformation (as in the case of quaternion's [2, p. 29]) changes the form of the hypercomplex number being transformed. A formula is obtained for the transformation of the similarity of semi-quaternion's and some consequences that follow from it. In the future we plan to establish the geometric meaning of this transformation.

Keywords: semi-quaternion, hypercomplex numbers, similarity transformation.