УДК 514.765+512.812.4

АВТОПОДОБИЯ И АВТОИЗОМЕТРИИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ VI ТИПА БИАНКИ

канд. физ.-мат. наук, доц. М.Н. ПОДОКСЕНОВ, Ф. С. ГАДЖИЕВА
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Беларусь)

Рассматривается четырехмерная алгебра Ли $\mathcal{G}$, являющаяся прямой суммой трехмерой алгебры Ли группы Гейзенберга и одномерной алгебры Ли. Предполагается, что эта алгебра Ли снабжена лоренцевым скалярным произведением сигнатуры $(+,+,+,-)$. Рассматривается вопрос: в каком случае алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает однопараметрическую группу преобразований подобия, являющихся одновременно автоморфизмами алгебры Ли. Рассмотрено пять возможных случаев задания лоренцева скалярного произведения и в трех из них такая однопараметрическая группа существует. Выписаны формулы, по которым действует эта однопараметрическая группа преобразований, и матрица Грама канонического базиса. Доказано, что при любом возможном способе задания лоренцева скалярного произведения алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает однопараметрическую группу изометрий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли.

Ключевые слова: *алгебра Ли, автоморфизм, лоренцево скалярное произведение, подобие.*

Введение. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли, в которой задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Преобразование $f\colon\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки Ли, т.е. выполняется

$$[fX, fY] = f([X, Y]) \quad \forall\, X,\ Y \in \mathcal{G}.$$

Это преобразование называется подобием с коэффициентом e^{μ}, если

$$\langle fX, fY\rangle = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle \quad \forall\, X,\ Y \in \mathcal{G}.$$

В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование алгебры Ли, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть *гомотетическим автоморфизмом* или *автоподобием* алгебры Ли. Преобразование, которое является одновременно автоморфизмом и изометрией, будем называть *автоизометрией*.

В работе [1] показано, что решение задачи о существовании автоподобий для однородных пространств групп Ли, снабженных левоинвариантной метрикой, тесно связано с решением задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли, снабженных скалярным произведением векторов. Алгебра Ли, снабженная невырожденным скалярным произведением, допускает однопараметрическую группу автоподобий тогда и только тогда, когда соответствующая ей связная односвязная экспоненциальная группа Ли, снабженная левоинвариантной метрикой, является самоподобным многообразием (необходимые определения можно найти в работе [2]).

Все автоподобия и автоизометрии для трехмерной алгебры Ли $\mathcal{H}s$ трехмерной группы Ли Гейзенберга $\mathcal{H}s$ были найдены в работе А.О. Кравченко [3]. Эти результаты были в дальнейшем использованы научным руководителем в работе [1], где были найдены все автоподобия и автоизометрии для однородного многообразия трехмерной группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Все автоподобия и автоизометрии для трехмерных разрешимых алгебр Ли были найдены в работе [4].

Матричное представление алгебры Ли $\mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$. В данной работе мы рассматриваем четырехмерную алгебру Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$, которая относится к подтипу VI_3 по классификации Бианки. Она состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с обычными операциями сложения и коммутатора матриц.

В алгебре Ли $\mathcal{G}$ можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4), состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством

$$[E_2, E_3] = E_1,$$

а остальные скобки Ли равны нулевому вектору. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ содержит двумерный центр $\mathcal{L}$, который является линейной оболочкой векторов E_1 и E_4, а также одномерный центр $\mathcal{Z}=\boldsymbol{R}E_1$, который равен $\mathcal{G}^{(2)} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$.

Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в $\mathcal{G}$, относительно которого коммутационные соотношения задаются одним равенством $[V_2, V_3] = V_1$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе верно, что $\mathcal{L} = \langle V_1, V_4\rangle$ и $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}V_1$.

Основные результаты. Доказательство существования автоподобий для алгебры Ли $\mathcal{G}$ не является сложной задачей. Достаточно ввести лоренцево скалярное произведение так, что идеалы $\mathcal{H}s$ и $\mathcal{R}$ ортогональны, и на $\mathcal{H}s$ индуцируется такое лоренцево скалярное произведение, при котором она допускает автоподобия.

Сложнее выяснить, существует ли еще какое-либо лоренцево скалярное произведение, при котором $\mathcal{G}$ допускает автоподобия. Это связано тем, что вложения $\mathcal{H}s$ и $\mathcal{R}$ в $\mathcal{G}$ не являются единственными.

Теорема. *Пусть на алгебре Ли* $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* $(+,+,+,-)$. *Тогда эта алгебра Ли допускает автоподобия в следующих трех случаях.*

Условие	Матрица Грама в каноническом базисе	Матрица, задающая однопараметрическую группу автоподобий
1. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\cos t & -e^{\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\sin t & e^{\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}.$
2. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}.$
3. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ неизотропен	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}.$

Лемма. Пусть (V_1, V_2, V_3, V_4) – канонический базис в алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$. Тогда полная группа автоморфизмов определяется матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \delta & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a_{44} \neq 0$ и $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Доказательство леммы. Любой автоморфизм $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ должен оставлять инвариантным двумерный центр $\mathcal{L}$ и производную алгебры Ли $\mathcal{Z} = \mathcal{G}^{(2)}$, поэтому ограничение f на $\mathcal{L}$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \; a_{11} \cdot a_{44} \neq 0.$$

Следовательно, автоморфизм f действует по формулам

$$\begin{cases} V_1' = a_{11} V_1, \\ V_2' = a_{12} V_1 + a_{22} V_2 + a_{32} V_3 + a_{42} V_4, \\ V_3' = a_{13} V_1 + a_{23} V_2 + a_{33} V_3 + a_{43} V_4, \\ V_4' = a_{14} V_1 + \qquad\qquad\qquad a_{44} V_4. \end{cases}$$

Имеем

$$[V_2', V_3'] = [a_{12} V_1 + a_{22} V_2 + a_{32} V_3 + a_{42} V_4, a_{13} V_1 + a_{23} V_2 + a_{33} V_3 + a_{43} V_4] =$$

$$= a_{22} a_{33} [V_2, V_3] + a_{32} a_{23} [V_3, V_2] = (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})[V_2, V_3] = \delta V_1 .$$

Преобразование будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда в результате этой операции получится вектор V_1'. Следовательно, $V_1' = \delta V_1$. Равенство всех остальных скобок Ли базисных векторов нулевому вектору сохраняется. ■

Заметим, что общий вид матрицы автоморфизма не изменится, если мы умножим базисный вектор V_1 на любое ненулевое число. То есть если в базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) операция скобки задается одним равенством $[V_2, V_3] = \lambda V_1$, $\lambda \neq 0$, то все автоморфизмы алгебры Ли будут задаваться матрицами вида (3).

Доказательство теоремы. Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$ задано лоренцево скалярное произведение. Вектор, скалярный квадрат которого равен –1, будем называть единичным.

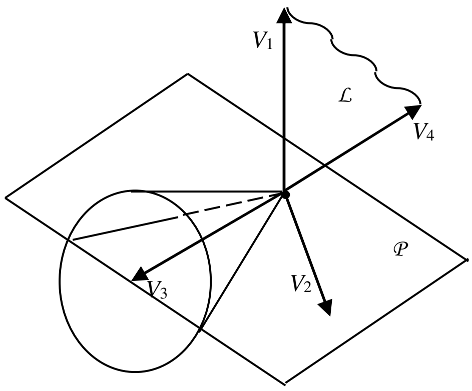

Рисунок 1

I случай. Пусть на двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется евклидово скалярное произведение. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ (рисунок 1). Тогда на $\mathcal{P}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение. Выберем в $\mathcal{P}$ ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$ ортогональный V_1 .

Любое автоподобие $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ должно оставлять инвариантным центр $\mathcal{L}$, а значит, должно оставлять инвариантным подпространство $\mathcal{P}$. Тогда ограничение f на $\mathcal{P}$ задается в базисе (V_2, V_3) одной из следующих матриц:

$$\pm e^{\mu t} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad \pm e^{\mu t} \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны $\pm e^{2\mu t}$. Следовательно, если f – автоморфизм, то

$$V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1.$$

Тогда $\langle V_1', V_1' \rangle = e^{4\mu t}$. Это означает, что f не является подобием. Однако в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий, действие которой задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}.$$

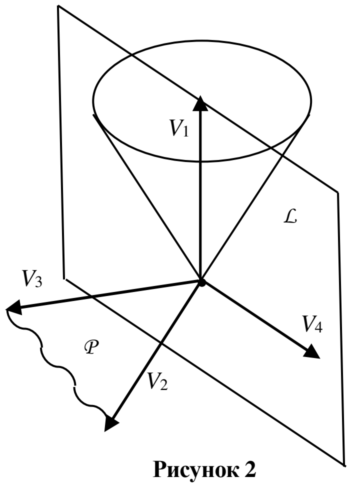

Рисунок 2

II случай. Пусть на двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ неизотропен. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ (рисунок 2). Тогда на $\mathcal{P}$ индуцируется евклидово скалярное произведение. Выберем в $\mathcal{P}$ ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$ ортогональный V_1 .

Так же как и в случае I, автоподобие $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ должно оставлять инвариантным центр $\mathcal{L}$, а значит, должно оставлять инвариантным подпространство $\mathcal{P}$. Тогда ограничение f на $\mathcal{P}$ задается в базисе (V_2, V_3) одной из следующих матриц:

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}. \qquad (4)$$

Определители этих матриц равны $e^{2\mu t}$ и $-e^{2\mu t}$. Следовательно, если f – автоморфизм, то

$$V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1.$$

Тогда $\langle V_1', V_1' \rangle = e^{4\mu t}$. Это означает, что f не является подобием. Однако в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий, действие которой задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}.$$

Заметим, что в данном рассуждении не имеет значения какой из векторов (V_1 или V_4) является временеподобным, а какой – пространственноподобным (т.е. на рисунке 2 векторы V_1 и V_4 можно поменять местами).

III случай. Пусть на двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ (рисунок 2). Тогда на $\mathcal{P}$ индуцируется евклидово скалярное произведение. Выберем в $\mathcal{P}$ ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем вектор $V_4 \in \mathcal{L}$, такой что $\langle V_1, V_4 \rangle = 1$.

В этом базисе матрица Грама имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничение f на $\mathcal{P}$ задается в базисе (V_2, V_3) одной из матриц (4).Поэтому должно выполняться $V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1$. Если при этом $V_4' = f(V_4) = \pm V_4$, то $\langle V_1', V_4' \rangle = e^{2\mu t}$. Итак, мы нашли, что преобразование $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, которое задается в выбранном каноническом базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) одной из следующих матриц:

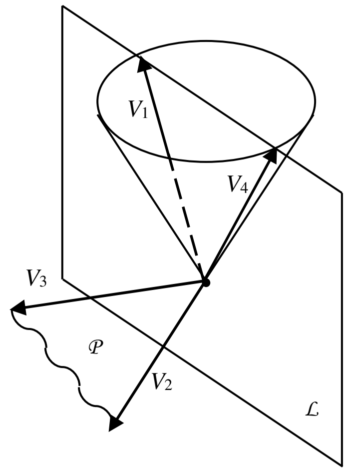

Рисунок 3

$$\begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\cos t & -e^{\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\sin t & e^{\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\cos t & e^{\mu t}\sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t}\sin t & -e^{\mu t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

является автоподобием рассматриваемой алгебры Ли.

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, которые задаются первой из матриц (5). При этом в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий.

IV случай. Пусть на двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен.

Предположим сначала, что $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ имеет еще одно инвариантное изотропное направление $\mathcal{J}$. Выберем вектор $V_2 \in \mathcal{J}$, затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$, ортогональный сразу двум одномерным подпространствам $\mathcal{J}$ и $\mathcal{Z}$ (рисунок 4). После этого выберем единичный вектор V_3, ортогональный $\mathcal{Z}$, V_2 и V_4.

Обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Одновременное умножение векторов V_1 и V_2 на любое ненулевое число не меняет операцию скобки, поэтому мы можем добиться, что $\langle V_1, V_2 \rangle = 1$. В выбранном базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) матрица Грама имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

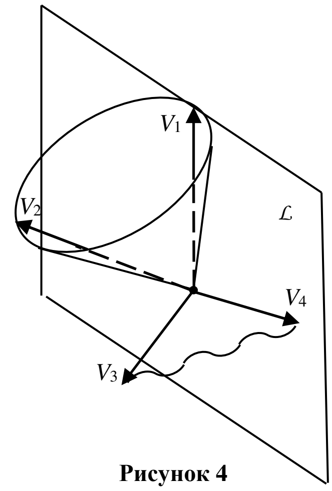

Рисунок 4

Все базисные векторы являются собственными для преобразования f. Значит матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}$$

(мы обозначили коэффициент подобия как $e^{2\mu t}$, с тем чтобы избежать дробных значений в результате). Наше преобразование будет автоморфизмом, если $\alpha = e^{2\mu t}\beta$, и оно будет подобием, если $\alpha\beta = e^{4\mu t}$. Решая последние два уравнения вместе, находим, что $\alpha = e^{3\mu t}$, $\beta = e^{\mu t}$. Итак, в рассмотренном случае алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает автоподобия, которые задаются в выбранном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, \ t \in \boldsymbol{R}.$$

Предположим теперь, что подобие $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ не имеет второго изотропного собственного вектора. Тогда, согласно [5], можно выбрать базис (V_1, V_2, V_3, V_4), такой как на рисунке 4, и матрица Грама будет иметь вид (6). При этом в базисе (V_1, V_4, V_2, V_3) подобие f будет задаваться матрицей

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} 1 & t & -t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к нашему порядку нумерации векторов получаем матрицу

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} 1 & -t^2/2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\mu = 0$. Таким образом, в данном случае алгебра Ли допускает автоизометрии, но не допускает автоподобий.

V случай. Пусть на двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ неизотропен.

Центр $\mathcal{L}$ содержит единственное изотропное направление, и оно должно быть инвариантным относительно действия подобия $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$; мы выберем вектор V_4, принадлежащий этому направлению. Ортогональное дополнение $\mathcal{H} = \mathcal{Z}^{\perp}$ тоже является инвариантным, и на нем индуцируется лоренцево скалярное произведение. Это подпространство содержит в себе вектор V_4.

Рассмотрим ограничение f на подпространство $\mathcal{H}$. Предположим, что $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ имеет еще одно инвариантное изотропное направление $\mathcal{J}$. Выберем вектор $V_2 \in \mathcal{J}$, затем выберем единичный вектор $V_3 \in \mathcal{H}$, ортогональный сразу V_4 и V_2. После этого умножим V_2 на число так, чтобы вектор $V_1 = [V_2, V_3]$ был единичным, а вектор V_4 умножим на такое число, чтобы выполнялось $\langle V_2, V_4 \rangle = 1$. Для того чтобы проиллюстрировать выбор базиса, на рисунке 4 достаточно поменять местами векторы V_1 и V_4.

В выбранном базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все базисные векторы являются собственными для преобразования f. Поэтому матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\alpha = 1$. Тогда f является подобием, если $\beta = e^{2\mu t}$.

Итак, в рассмотренном случае алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает автоподобия, которые задаются в выбранном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}.$$

Предположим, теперь что $f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ имеет только одно инвариантное изотропное направление. Тогда, согласно [5], можно выбрать базис (V_2, V_3, V_4) в $\mathcal{H}$, так что матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а подобие $f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ задается матрицей

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, подобие $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ задается относительно базиса (V_1, V_2, V_3, V_4) матрицей

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\mu = 0$. Таким образом, в данном случае алгебра Ли допускает автоизометрии, но не допускает автоподобий. ■

Попутно мы доказали следующее утверждение.

Следствие. *Алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$, снабженная лоренцевым скалярным произведением, всегда допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Матрицы, задающие эту подгруппу, в каждом из пяти возможных случаев, и матрицы Грама канонического базиса приведены в следующей таблице.*

Условие	Матрица Грама в каноническом базисе	Матрица, задающая однопараметрическую группу изометрий
1. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется положительно определенное скалярное произведение	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
2. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ неизотропен	$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$, или $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
3. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
4. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -t^2/2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
5. На двумерном центре $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал $\mathcal{Z}$ неизотропен	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$

Заключение. В данном исследовании мы нашли, что четырехмерная алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}s \oplus \mathcal{R}$, снабженная лоренцевым скалярным произведением, допускает автоподобия в трех различных случаях. Это доказывает, что существует три самоподобных однородных лоренцевых многообразия группы Ли $Hs \times \boldsymbol{R}$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Результаты этого исследования могут быть применены для построения таких однородных многообразий и для того, чтобы получить в явном виде формулы, по которым действуют однопараметрические группы гомотетий этих многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксёнов // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 5. – С. 10–15.
2. Подоксёнов, М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трехмерное лоренцевы многообразия / М.Н. Подоксёнов // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта ім. П.М. Машэрава. – 2018. – № 2 (99). – С. 14–19.
3. Кравченко, А.О. Гомотетические автоморфизмы трехмерной нильпотентной алгебры Ли / А.О. Кравченко // X (55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета, посвященная 90-летию со дня рождения П.М. Машерова : сб. ст. / УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – Витебск, 2008. – С. 16–17.
4. Подоксёнов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трехмерных алгебр Ли / М.Н. Подоксёнов // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова» : сб. науч. тр. / ВГУ им. П.М. Машерова. – Витебск, 2009. – Т. 8. – С. 203–211.
5. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global Anal. Geom. – 1985. – Vol. 3, No.1. – С. 59–84.

Поступила 15.03.2019

AUTOSIMILARITIES AND AUTOISOMETRIC TRANSFORMATIONS OF ONE FOUR-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA OF THE VI BIANCHI TYPE

M. PODOKSENOV, F. GADHIEVA

We consider four-dimensional Lie algebra $\mathcal{G}$, which is a direct sum of three-dimensional Lie algebra of Heisenberg group and one-dimensional Lie algebra. We suppose, that this algebra is supplied by Lorentzian scalar product of the signature $(+,+,+,-)$. The following problem is considered: in which cases Lie algebra $\mathcal{G}$ admits one-parameter group of similarities, which are automorphisms of Lie algebra. Five possible cases of establishing Lorentzian scalar product are considered. In three cases such one-parameter group exists. Formulas describing action of this one-parameter group and the Gram matrix of the canonical basis are specified. Also it is proved, that in each case of establishing Lorentzian scalar product Lie algebra $\mathcal{G}$ admits one-parameter group of isometric transformations, which are automorphisms of Lie algebra.

Keywords: *Lie algebra, automorphism, Lorentzian scalar product, similarity transformation.*