УДК 517.983

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. ПАПКОВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Изучено двухмерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространствах суммируемых функций по области $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$. *Построена* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*-теория рассматриваемого интегрального преобразования. Даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Представленные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.*

Ключевые слова: *двумерное интегральное G-преобразование, G-функция Мейера, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

1. Введение.

Рассматривается интегральное преобразование

$$(\mathrm{G} f)(\mathrm{x}) = \int\limits_0^\infty \mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x} > 0)\,, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2) \in R^2$; $\mathrm{t} = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы, R^2 – двумерное Евклидово пространство;

$\mathrm{x}\cdot\mathrm{t} = \sum\limits_{k=1}^{2} x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathrm{x}\cdot 1 = \sum\limits_{k=1}^{2} x_k$ для $1 = (1,1)$; $\mathrm{x} > \mathrm{t}$ означает

$x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int\limits_0^\infty := \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty$;

$N = \{1, 2, ...\}$ – пространство натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$,

$R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{\mathrm{x} \in R^2, \mathrm{x} > 0\}$ [1, §28.4];

$\mathrm{m} = (m_1, m_2) \in N_0^2$ и $m_1 = m_2$; $\mathrm{n} = (n_1, n_2) \in N_0^2$ и $n_1 = n_2$;

$\mathrm{p} = (p_1, p_2) \in N_0^2$ и $p_1 = p_2$; $\mathrm{q} = (q_1, q_2) \in N_0^2$ и $q_1 = q_2$; $(0 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{q}, 0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{p})$;

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$, $1 \leq i \leq \mathrm{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2} \in C$ $(1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2)$;

$\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$, $1 \leq j \leq \mathrm{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2} \in C$ $(1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2)$;

$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N$ $(k_1 \in N, k_2 \in N)$ – индекс с $k! = k_1!k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1}(\partial x_2)^{k_2}}$;

$d\,\mathrm{t} = d\,t_1 \cdot d\,t_2$; $f(\mathbf{t}) = (t_1, t_2)$; $\mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]$ – функция вида

$$\mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right] = \prod_{k=1}^{2} \mathrm{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[x_k t_k\left|\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right], \tag{1.2}$$

представляющая собой произведение G-*функций* Мейера $G_{p,q}^{m,n}[z]$ [2, глава 6].

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$, $\overline{2}=(2,2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2)$ на R_+^2, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}<\infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=\left\{\int\limits_{R_+^1} x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left[\int\limits_{R_+^1} x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1,x_2)|^2 dx_1\right]dx_2\right\}^{1/2}<\infty .$$

Даются условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1.1) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ в другие. Доказывается аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного G-преобразования [2, гл. 6].

2. Предварительные сведения. Для целых неотрицательных значений m, n, p, q $(0\le m\le q, 0\le n\le p)$, комплексных $a_i, b_j\in C$ $(1\le i\le p, 1\le n\le q)$ *G-функцией Мейера* называется функция, определяемая *интегралом Меллина – Барнса*:

$$G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds,\ z\ne 0, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\left.\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right|s\right]=\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\left.\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right|s\right]=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}. \tag{2.2}$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s=-b_j-k$ $(j=1,2,...,m;\ k=0,1,2,...)$ слева, полюса $s=1-a_j+k$ $(j=1,2,...,n;\ k=0,1,2,...)$ – справа, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией G-функции (2.1) можно ознакомиться в [2, гл. 6].

G-преобразованием называют интегральное преобразование [2, формула (6.1.1)]

$$(Gf)(x)=\int\limits_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[xt\left|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]f(t)dt, \tag{2.3}$$

содержащее G-функцию Мейера (2.1) в ядре.

Введем пространство $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathrm{R}_+=(0,\infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r}=\left(\int\limits_0^\infty \left|t^\nu f(t)\right|^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\quad(1\le r<\infty,\nu\in\mathrm{R}), \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\nu,r}}=\|f\|_{L_r(R_+^1,t^{\nu r-1})},\ (1\le r<\infty,\nu\in\mathrm{R}).$$

Для функции $f\in\mathfrak{L}_{\nu,r}$ $(1\le r\le 2)$ *преобразование Меллина* $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2, 3]

$$(\mathfrak{M}f)(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(e^\tau)e^{s\tau}d\tau\quad(s=\nu+it;\nu,t\in\mathrm{R}). \tag{2.5}$$

Если $f \in \mathfrak{L}_{\nu,r} \bigcap \mathfrak{L}_{\nu,1}$, $\mathrm{Re}(s) = \nu$, то (2.5) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt \ . \tag{2.6}$$

Двумерное преобразование Меллина функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2)$, $x_1 > 0, x_2 > 0$, определяется формулой [3, формула (1.4.42)]

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R_{++}^2} f(\mathrm{t}) \mathrm{t}^{\mathbf{s}-1} d\mathrm{t} \ , \tag{2.7}$$

$R_{++}^2 = \left\{ \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2 : t_j > 0 (j = 1, 2) \right\}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $s_j \in C$ $(j = 1, 2)$.

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x} = (x_1, x_2) \in R_{++}^2$ дается формулой [3, формула (1.4.43)]

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathrm{x}) = \mathfrak{M}^{-1}\left[g(\mathbf{s})\right](\mathrm{x}) \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} \mathrm{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \ , \ \gamma_j = \mathrm{Re}(s_j) \ (j = 1, 2) \ . \tag{2.8}$$

Формула преобразования Меллина от G-преобразования (2.3) для «достаточно хороших» функций *f* имеет вид [1, формула (6.1.2)]

$$(\mathfrak{M} \ Gf)(s) = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{array}{c|c} (a_i)_{1,p} & \\ & s \\ (b_j)_{1,q} & \end{array} \right] (\mathfrak{M}f)(1-s) \ , \tag{2.9}$$

где $\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается (2.2).

Нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры G-функции (2.1) [1, формулы (6.1.5) – (6.1.11)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min\limits_{1 \le j \le m} [\mathrm{Re}(b_j)], & m > 0, \\ -\infty, & m = 0, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 1 - \max\limits_{1 \le i \le n} [\mathrm{Re}(a_i)], & n > 0, \\ \infty, & n = 0; \end{cases} \tag{2.10}$$

$$a^* = 2(m+n) - p - q \, ; \tag{2.11}$$

$$\Delta = q - p \, ; \tag{2.12}$$

$$a_1^* = m + n - p \, ; \ a_2^* = m + n - q \, ; \tag{2.13}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2} \, . \tag{2.14}$$

Назовем *исключительным множеством* $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ для функции $\mathcal{G}(s)$, определенной в (2.2), множество вещественных чисел ν таких, что $\alpha < 1 - \nu < \beta$ и $\mathcal{G}(s)$ имеет нули на прямой $\mathrm{Re}(s) = 1 - \nu$.

3. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теория *G*-преобразования

Введем функцию

$$\overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s}) \equiv \overline{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}} \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}} & \\ & \mathbf{s} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}} & \end{array} \right] = \prod_{k=1}^{2} \mathcal{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k} \left[\begin{array}{c|c} (a_{i_k})_{1,p_k} & \\ & s_k \\ (b_{j_k})_{1,q_k} & \end{array} \right] , \tag{3.1}$$

где $\mathcal{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k} \left[\begin{array}{c|c} (a_{i_k})_{1,p_k} & \\ & s_k \\ (b_{j_k})_{1,q_k} & \end{array} \right]$, $k = 1, 2$, – функция вида (2.2).

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$ назовем множество векторов $\bar{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$ таких, что $\alpha_1<1-\nu_1<\beta_1$, $\alpha_2<1-\nu_2<\beta_2$, и функции вида (2.2) $\mathcal{G}_{p_1,q_1}^{m_1,n_1}(s_1)$, $\mathcal{G}_{p_2,q_2}^{m_2,n_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1)=1-\nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2)=1-\nu_2$, соответственно.

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.7) к G - преобразованию (1.1) и учитывая (2.9), получаем следующую формулу для “достаточно хороших” функций *f*:

$$\left(\mathfrak{M}\,\mathrm{G}\,f\right)(\mathbf{s})=\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\begin{array}{c|}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{array}\,\mathbf{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathbf{s}),\tag{3.2}$$

где $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$ дается (3.1).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ - теорию G-преобразования (1.1) нам понадобятся следующие двумерные аналоги постоянных (2.10) – (2.14):

$$\alpha_1=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\mathrm{Re}(b_{j_1})\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0,\end{cases}\quad \beta_1=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_1\le n_1}\left[\mathrm{Re}(a_{i_1})\right], & n_1>0,\\ \infty, & n_1=0,\end{cases}\tag{3.3}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\mathrm{Re}(b_{j_2})\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0,\end{cases}\quad \beta_2=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_2\le n_2}\left[\mathrm{Re}(a_{i_2})\right], & n_2>0,\\ \infty, & n_2=0,\end{cases}\tag{3.4}$$

$$a_1^*=2(m_1+n_1)-p_1-q_1,\ a_2^*=2(m_2-n_2)-p_2-q_2;\tag{3.5}$$

$$\Delta_1=q_1-p_1,\Delta_2=q_2-p_2;\tag{3.6}$$

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_1}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_1}+\frac{p_1-q_1}{2},\ \mu_2=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_2}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_2}+\frac{p_2-q_2}{2}.\tag{3.7}$$

Обозначим через [*X*, *Y*] множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства *X* в банахово пространство *Y*.

Из [2, теоремы 3.6 и 3.7, теоремы 6.1 и 6.2, замечания 6.1.1 и 6.2.1], представления (3.2) и непосредственной проверки получаем $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ -теорию G-преобразования (1.1).

Теорема 1. *Допустим, что*

$$\alpha_1<1-\nu_1<\beta_1,\ \alpha_2<1-\nu_2<\beta_2,\ \nu_1=\nu_2\tag{3.8}$$

и выполняется любое из условий:

$$a_1^*>0,a_2^*>0\tag{3.9}$$

или

$$a_1^*=0,\ a_2^*=0,\ \Delta_1\left[1-\nu_1\right]+\mathrm{Re}(\mu_1)\le0,\ \Delta_2\left[1-\nu_2\right]+\mathrm{Re}(\mu_2)\le0\,.\tag{3.10}$$

Тогда верны следующие утверждения:

а) существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}\in[\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}},\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$ *такое, что равенство* (3.2) *выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s})=1-\bar{\nu}$.

Если $a_1^*=0,\ a_2^*=0,\ \ \Delta_1\left[1-\nu_1\right]+\mathrm{Re}(\mu_1)=0,\ \ \Delta_2\left[1-\nu_2\right]+\mathrm{Re}(\mu_2)=0$ *и* $\bar{\nu}\notin\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$, *то* G *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$;

b) если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *,то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(x)\big(G\,g\big)(x)\,d\,x = \int_0^\infty \big(G\,f\big)(x)\,g(x)\,d\,x\,; \tag{3.11}$$

c) пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > -\overline{\nu}$, *то преобразование (1.1) представимо в виде*

$$(G\,f)(x) = x^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,x}x^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[xt\left|\begin{matrix}-\overline{\lambda},(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q},-\overline{\lambda}-1\end{matrix}\right.\right]f(t)\,d\,t\,, \tag{3.12}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < -\overline{\nu}$ *дается формулой*

$$(G\,f)(x) = -\,x^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,x}x^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[xt\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p},-\overline{\lambda}\\-\overline{\lambda}-1,(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]f(t)\,d\,t\,; \tag{3.13}$$

d) преобразование $G\,f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\overline{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют* (3.8) *и выполняются условия (3.9) или (3.10), и если преобразования* $G\,f$ *и* $\tilde{G}\,f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством* (3.2)*, то* $G\,f = \tilde{G}\,f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}} \cap \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$;

e) если $a_1^* > 0,\ a_2^* > 0$ *или если* $a_1^* = 0, a_2^* = 0,\ \ \Delta_1\left[1-\nu_1\right] + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0,\ \ \Delta_2\left[1-\nu_2\right] + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0$*, то для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *преобразование* $G\,f$ *дается формулой* (1.1).

Замечание 1. *Пусть* $\alpha_1 < \beta_1, \alpha_2 < \beta_2$ *и пусть выполняется одно из следующих условий:*

a) $a_1^* > 0,\ a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0$ *и* $\alpha_1 < -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_1)}{\Delta_1},\ \alpha_2 < -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_2)}{\Delta_2}$;

c) $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0$ *и* $\beta_1 > -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_1)}{\Delta_1},\ \beta_2 > -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_2)}{\Delta_2}$;

d) $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0$ *и* $\mathrm{Re}(\mu_1) \le 0,\ \mathrm{Re}(\mu_2) \le 0$.

Тогда G-преобразование определено в $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *с* $\alpha_1 < \nu_1 < \beta_1, \alpha_1 < \nu_2 < \beta_1,\ \nu_1 = \nu_2$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\alpha_1 < 1-\nu_1 < \beta_1,\ \ \alpha_2 < 1-\nu_2 < \beta_2,\ \ \nu_1 = \nu_2$$

и выполняется любое из условий:

a) $a_1^* > 0, a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0,\ \ a_2^* = 0,\ \ \Delta_1(1-\nu_1) + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0,\ \ \Delta_2(1-\nu_2) + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0$.

Тогда для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $x > 0$ $\big(G\,f\big)(x)$ *дается формулой (1.1).*

Замечание 2. *Пусть* $\alpha_1 < \beta_1, \alpha_2 < \beta_2$ *и пусть выполняется одно из следующих условий:*

a) $a_1^* > 0,\ \ a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0,\ \ a_2^* = 0,\ \ \Delta_1 > 0,\ \ \Delta_2 > 0$ *и* $\alpha_1 < -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_1)+1}{\Delta_1},\ \alpha_2 < -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_2)+1}{\Delta_2}$;

c) $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0$ *и* $\beta_1 > -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_1)+1}{\Delta_1},\ \beta_2 > -\dfrac{\mathrm{Re}(\mu_2)+1}{\Delta_2}$;

d) $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0,\ \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0$ *и* $\mathrm{Re}(\mu_1) \le 0,\ \mathrm{Re}(\mu_2) \le 0$.

Тогда G-преобразование может определяться формулой (1.1) в $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *с* $\alpha_1 < \nu_1 < \beta_1,\ \alpha_1 < \nu_2 < \beta_1,$ $\nu_1 = \nu_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688с.
2. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. North – Holland Mathematics Studies 204 / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – 523 p.

Поступила 27.03.2019

TWO-DIMENTIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE MEIJER G-FUNCTION IN THE KERNEL IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

M. PAPKOVICH, O. SKOROMNIK

Two-dimentional integral transform with the Meijer G-function in the kernel in the space of summable functions on a domain $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$ *was studied.* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*-theory of a considered integral transformation was constructed. Conditions for the boundedness and one-to-one operator of such a transformation from one* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*-space to another were given, an analogue of the integration formula in parts was proved, various integral representations for the transformation under consideration were established. The results generalize the well know findings for corresponding one-dimentional integral transform.*

Keywords: *two-dimensional integral G-transform, Meijer G-function, two-dimensional Mellin transform, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*