УДК 514

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно-импульсном и расслоенном пространстве скоростей. Основным полученным результатом является утверждение – в случае локальной невырожденности матрицы Гессе от функции Гамильтона по импульсам максимального порядка (матрицы Гессе от функции Лагранжа по скоростям максимального порядка) указанные матрицы Гессе взаимно обратны. Получен ряд вспомогательных результатов, например, о квазилинейной форме временной производной порядка k от обобщенной координаты по скоростям расслоенного пространства порядка k для невырожденной замены координат. Получены неожиданные тождества в координатно-импульсном пространстве q-p для частной производной между координатами расслоенного пространства (координата-координата, импульс-импульс). Получены формулы, связывающие частные производные в координатно-импульсном пространстве q-p для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным.

Ключевые слова: *функция Гамильтона, вариационная задача, расслоенное пространство скоростей, уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.*

Введение. У.Р. Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем – канонические уравнения Гамильтона. В 1848 году М.В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона – Остроградского. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа – второго).

Академик В.И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряда задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.).

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Д. Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915).

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения, 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия – учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М. Голубицким, В. Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10, 13, 16–20].

Определения и постановка задачи. Введем обозначения для дифференциально-геометрических структур, используемых в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка *n* с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Пусть $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$ – *функция Гамильтона с* $2mn$ независимыми переменными

$$(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1}) \;\; j1 = \overline{1,m},\; l1 = \overline{1,n},\; j2 = \overline{1,m},\; l2 = \overline{1,n},$$

где $$p = \overline{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, ..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \quad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n};$$

$$q = \overline{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, ..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1,m} \quad l2 = \overline{1,n}.$$

Далее, $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ – функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона.

Определение 1. Система функций $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \Big),\; k = \overline{0,n},\; i = \overline{1,m},$$

называется обобщенным импульсом ранга *n* для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (*x*) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \overset{\bullet}{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ – *k*-я компонента обобщенного импульса P_n ранга n по *i*-й координате или импульс порядка k (*k*-импульс) по *i*-й координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Постановка задачи. Исследуем свойства функции Гамильтона $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m},\; l1 = \overline{1,n},\; j2 = \overline{1,m},\; l2 = \overline{1,n}$ и функции Лагранжа, двойственной к функции Гамильтона $L(q,p) = -H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$, а также связи между этими функциями $H(q,p): \Re^{2mn} \to \Re$, $L(p,q)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$, здесь $S: (x) \to (\overline{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \geq \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\overline{x}) = x^{(k)i}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{\overline{x}} + f(\overline{x}, \overset{\bullet}{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}}) \;\; k \geq 1, \tag{1}$$

где $f(\overline{x}, \overset{\bullet}{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}})$ – некоторая гладкая функция, аргументы которой $\overline{x}, \overset{\bullet}{\overline{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\overline{x}}$, $\overset{(s)}{\overline{x}} = (\overset{(s)1}{\overline{x}}, ..., \overset{(s)m}{\overline{x}})$, $\overset{(s)j}{\overline{x}} = D_t^s \overline{x}^j$, $s = \overline{0, k-1}$.

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k=1$, тогда

$$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\bullet j}{\bar{x}} .$$

Доказано.

Рассмотрим утверждение **теоремы 1** для $k = 2$

$$D_t^2 x^i(\bar{x}) = x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1 (\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1 (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{\bullet j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \overset{\bullet j}{\bar{x}} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\bullet l}{\bar{x}} \overset{\bullet j}{\bar{x}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\bullet\bullet j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\bullet\bullet j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}), \quad f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\bullet l}{\bar{x}} \overset{\bullet j}{\bar{x}}.$$ Доказано для $k = 2$.

Индуктивный переход.

Пусть $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})$. Тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t (\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})) = \sum_{j=1}^{m} D_t (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}}) + D_t (f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_t (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t (\overset{(k)j}{\bar{x}}) + D_t (f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})). \tag{2}$$

Поскольку $D_t (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{\bullet l}{\bar{x}} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\bullet l}{\bar{x}}$ и $D_t (\overset{(k)j}{\bar{x}}) = \overset{(k+1)j}{\bar{x}}$, то сумма (2) равна

$$\sum_{j=1}^{m} D_t (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t (\overset{(k)j}{\bar{x}}) + D_t (f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{.l}{\bar{x}}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}), \; 0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k. \tag{3}$$

В формуле (3) сгруппируем члены $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}), \; 0+1 \le s+1 \le k-1+1 = k$, где

$$f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\bullet l}{\bar{x}}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} .$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$, $S : (\bar{x}) \to (x)$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \overset{\bullet}{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p} \left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), \; C_k^p = \dfrac{k!}{p!\,(k-p)!}, \; k! = \prod_{j=1}^{k} j, \; k \ge p \\ 0, \; k < p. \end{cases}$$

Доказательство. При $k < p$ по **Теореме 1** имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \geq 1, \text{ поэтому}$$

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) = 0.$$

При $k \geq p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$.

Тогда по **Теореме 1** имеем $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \dfrac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})\Big) =$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \overset{(k)l}{\bar{x}}}{\partial \overset{(k)j}{\bar{x}}}\Big) + \frac{\partial f(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{\bar{x}}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\delta^l_j = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j},\ \delta^l_j = \begin{cases}1, & j = l\\ 0, & j \neq l\end{cases} - \text{символ Кронекера.}$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход: пусть утверждение **теоремы 2** справедливо при $k \geq p$.

Введем функции $F^i_k(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}}) = x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})$, $\overset{(k+1)i}{\bar{x}} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F^i_k = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\dfrac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F^i_k}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}} + \frac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F^i_k}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\delta^{s+1}_p\delta^l_j = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(p-1)j}{\bar{x}}}. \tag{4}$$

По предположению индукции $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \dfrac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = C^p_k D^{k-p}_t\Big(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)$. Значит, сумма (4) равна

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\Big(\frac{\partial^2 F^i_k}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\overset{(s+1)l}{\bar{x}}\Big) + \frac{\partial F^i_k}{\partial \overset{(p-1)j}{\bar{x}}} = C^p_k\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D^{k-p}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\Big) + C^{p-1}_k D^{k-(p-1)}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big) =$$

$$= C^p_k\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D^{k-p}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\Big)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\Big) + C^{p-1}_k D^{k-(p-1)}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big). \tag{5}$$

Известно, что

$$C^p_k + C^{p-1}_k = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!}\Big(1 + \frac{p}{k-p+1}\Big) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C^p_{k+1}. \tag{6}$$

Тогда

$$D^{k-p}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-p)}{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\Big(D^{k-p}_t\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\Big)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\Big). \tag{7}$$

Учитывая формулы (6) и (7), получим выражение для суммы (5):

$$C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\right)D_t\overset{(s)l}{\bar{x}}\right)+C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)=$$

$$=C_k^pD_t\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)+C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)=(C_k^p+C_k^{p-1})D_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)=C_{k+1}^pD_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $H(q,p)$ – функция Гамильтона зависит от $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1}),\ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$, при этом нижние индексы меняются от 1 до n, верхние индексы меняются от 1 до m

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},\dots,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2\dots p_1^m,p_2^1p_2^2\dots p_2^m,\dots,p_n^1,\dots,p_n^m)=(p_{l1}^{j1}),\ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n};$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},\dots,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2\dots q_1^m,q_2^1q_2^2\dots q_2^m,\dots,q_n^1,\dots,q_n^m)=(q_{l2}^{j2}),\quad j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}.$$

Теорема 3. Пусть $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$. Тогда

1) $$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(8)$$

2) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(9)$$

3) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\delta_i^j\delta_s^k,\qquad(10)$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\0,\ \alpha\ne\beta\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Прибавим 1 к обеим частям двойного неравенства $1\le k\le n-1\Rightarrow 2\le k+1\le n$, $1\le s\le n$, поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=0=1-1=1-\delta_s^1=(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ i,j=\overline{1,m},$$

где $\delta_s^1=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ne1\end{cases}=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ge2\end{cases}$ – символ Кронекера.

То есть при $s=1$ проверена справедливость формулы (7),

где $\delta_j^i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\ne j\end{cases}$, $\delta_s^{k+1}=\begin{cases}1,s=k+1\\0,s\ne k+1\end{cases}$ – символ Кронекера.

При $2\le s\le n$ $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}1,(i=j)\wedge(s=k+1)\\0,(i\ne j)\vee(s\ne k+1)\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ i,j=\overline{1,m}$ или

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}.$$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, $s, k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m}$, так как переменные p, q независимы;

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1, (i = j) \wedge (k = s) \\ 0, (i \neq j) \vee (k \neq s) \end{cases} = \delta_i^j \delta_s^k$, условие во второй строке очевидно является отрицанием условия в первой: $\overline{(i = j) \wedge (k = s)} = \overline{(i = j)} \vee \overline{(k = s)} = (i \neq j) \vee (k \neq s)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть (q, p) – $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m},\ l1 = \overline{1,n},\ j2 = \overline{1,m},$ $l2 = \overline{1,n}$. Тогда при $s = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m}$ и произвольных $p_k^j \in \Re$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} (p_k^j (1-\delta_s^1)\delta_j^i\, \delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\, \delta_j^i\, \delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i (1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i (1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1), \tag{11}$$

где $\delta_s^1 = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \geq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_s^{k+1} = \begin{cases} 1, s = k+1 \\ 0, s \neq k+1 \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Так как $(1-\delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k, j, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} (p_k^j (1-\delta_s^1)\delta_j^i\, \delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\, \delta_j^i\, \delta_s^{k+1}.$$

При $s = 1$ $(1-\delta_s^1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\, \delta_j^i\, \delta_s^{k+1} = 0$ $p_{s-1}^i (1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i \cdot 0 = 0$ и утверждение **теоремы 4** выполнено.

При $n \geq s \geq 2 \Rightarrow s - 1 \geq 1$ $\delta_s^1 = 0,\ 1-\delta_s^1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i (1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i$ – правая часть;

$p_k^j\, \delta_j^i\, \delta_s^{k+1} = \begin{cases} p_{k=s-1}^{j=i} = p_{s-1}^i,\ (j = i) \wedge (k+1 = s) \\ 0,\ (j \neq i) \vee (k+1 \neq s) \end{cases} \Rightarrow (1-\delta_s^1) p_{s-1}^i = (1-0) p_{s-1}^i = p_{s-1}^i$ – левая часть утверждения.

При $n = 1 \Rightarrow s = 1\ (s = \overline{1,n}) \Rightarrow \delta_n^1 = \delta_s^1 = 1$, поэтому

$$p_{s-1}^i (1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1) = p_{1-1}^i (1-\delta_1^1)(1-\delta_1^1) = 0 = p_{1-1}^i (1-\delta_1^1).$$

При $n > 1 \Rightarrow \delta_n^1 = 0 \Rightarrow (1-\delta_n^1) = (1-0) = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i (1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i (1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)$.

Формула (11) проверена. **Теорема 4** доказана.

Рассмотрим функцию $L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}$.

Теорема 5. Пусть $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$, тогда имеют место следующие равенства:

1. $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}, \qquad (12)$$

2. $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s) q_{s+1}^i + \delta_n^s \frac{\partial H}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}, \qquad (13)$$

где $\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство: $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}\right).$$

По **теореме 3**, $\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, так как переменные p, q независимы, перепишем равенства:

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1-\delta_s^1)\delta_j^i \delta_s^{k+1}, \ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i \delta_s^{k+1}, \ 2 \le s \le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \end{cases} = \delta_j^i\, \delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m},$$

поэтому $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}\right).$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(p_k^j (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) p_{s-1}^i + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}.$$

По **теореме 4**, $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}.$$

Формула (12) проверена. Первая часть **теоремы 5** доказана.

$$L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} = -H(p,q) + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}\right).$$

Так как $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1,\ (s=k)\wedge(i=j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\ 0,\ (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ и $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}=0$, то

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}\Big)+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}\Big)=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^k\ q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}\Big(\delta_i^j\delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}\Big)=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j+\delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}.$$

Формула (13) проверена. **Теорема 5** доказана.

Теорема 6. Пусть $f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})$ – локальная запись гладкой функции $f:T^nX_m\to\Re$ в локальных координатах в базе X_m расслоения T^nX_m. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}),\ p\geq 1.$$

Доказательство проведем по индукции по индексу p. База индукции $p=1$.

$$D_t^1 f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=D_t f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

При $s\leq k-1\Rightarrow s+1\leq k$, поэтому $\dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение $\dfrac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма

$$a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+1-1)}{x})=a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}$$

также зависит от производных порядка не выше k. Значит,

$$D_t^1 f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}x^{(s+1)j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}=a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}}x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для p, то есть

$$D_t^p f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p)j}{x}+a(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p+1-1)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\cdot\overset{(k+p+1)j}{x}+\bar{a}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(k+p)}{x}).$$

По предположению индукции имеем

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x}) = D_t(D_t^p f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})) = D_t(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})) =$$

$$= (\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} D_t(\overset{(k+p)j}{x})) + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}).$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы $\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен $\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \ge 1$. По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок производных в $D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в $D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$ равен $k+p-1+1 = k+p$. Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x})$ зависит от производных порядка не выше $k+p$. Следовательно получим

$$\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},\dots,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(k+p)}{x}).$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (линейность обобщенного импульса по старшим производным). Пусть $P_n = \left\{ p_k^i(n) \right\} = \left\{ p_{k,n}^i \right\}$ – импульс ранга *n* для функции $L : T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (*x*) базы X_m расслоения $T^p X_m$. Обозначим $b(n,p,k)$ – максимальный порядок скорости в аргументах обобщенного импульса; $b(n,p,k) = \max(2\min(p,n) - k, p)$, $\max v = 2\min(n,p) - k$, $\min v = \min(n,p)$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{b(n,p,k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big),$$

где $k = \overline{0, \min v - 1}$, $i = \overline{1,m}$ – компоненты импульса ранга *n*.

Тогда

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(\min v)j} \partial x^{(\min v)i}} x^{(\max v)j} + g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(\max v-1)}{x}),\ i = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Доказательство. По **теореме 6** максимальная степень координат по t, которые войдут в производную $D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ по порядкам скоростей при выполнении дифференцирования, равна $\max(l+k+l = 2l+k) = \max(2l+k)$ при условии, что $l \le n-k,\ l+k \le p \Leftrightarrow l \le p-k \Rightarrow l \le n-k$, $l \le p-k \Leftrightarrow l \le \min(n-k, p-k) = \min(n,p) - k$, $\max\limits_{l \le \min(n,p)-k} (2l+k) = 2(\min(n,p)-k) + k = 2\min(n,p) - k = \max v.$

Значит, значение наибольшего порядка скорости, которое войдет в выражение $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)$, равно $\max(p,\max\limits_{l\le\min(n,p)-k}(2l+k))=\max(p,2\min(n,p)-k))=b(n,p,k)$.

При условии $\max v=2\min(n,p)-k>p$ выражение (14) будет линейно по скоростям старшего порядка.

Теорема 7 доказана.

Замечание. Ясно, что $\max\nu=2\min(n,p)-k\ \ge\ \min\nu=\min(n,p)$ при $k\le\min(n,p)$ и $\max\nu=2\min(n,p)-k\ >\ \min\nu=\min(n,p)$ при $k<\min(n,p))$.

Условие $k\le n$ следует из определения импульса ранга n, а при $k>p$ компоненты импульса $p_{k,n}^i(x,\dot x,\ldots,\overset{b(n,p,k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)\equiv 0$ (тривиальны), поэтому условие $k\le n,\ k\le p\Leftrightarrow k\le\min(n,p)$ определяет нетривиальные компоненты импульса ранга n.

Теорема 8. При $p=n$ $\max\nu=2\min(n,p)-k=2\min(n,n)-k=2n-k$, $\min\nu=\min(n,p)=\min(n,n)=n$, $b(n,p=n,k)=\max(2\min(p=n,n)-k,p)=\max(2\min(n,n)-k,n)=\max(2n-k,n)=2n-k$, так как $k\le\min(n,p)=\min(n,n)=n$, $p_k^i(n)=\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)j}{x}+g_i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2n-k-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$ при $0\le k\le n-1$ $2n-k\ge n+1>n$ и выражение

$$p_k^i(n)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)j}{x}+g_i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2n-k-1)}{x}),\ i=\overline{1,m} \tag{15}$$

линейно зависят от скоростей старшего порядка $\overset{(2n-k)j}{x}$.

Формула (15) доказана**. Теорема 8** доказана.

Теорема 9. Пусть $\det\left(\dfrac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)\ne 0$ в точке $\pi_n^{2n-k}X_0^{2n-k}=X_0^n=(x_0,\dot x_0,\ddot x_0,\ldots,\overset{(n)}{x_0})$, $X_0^{2n-k}=(x_0,\dot x_0,\ddot x_0,\ldots,\overset{(2n-k)}{x_0})$, $0\le k\le n-1$, $\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m\to T^nX_m$ – каноническая проекция. Тогда существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k}, такая что в ее окрестности выполнены условия:

1) $$\det\left(\frac{\partial p_k^i(n)(X^{2n-k})}{\partial\overset{(2n-k)j}{x}}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\right)\ne 0\quad X^n=\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}); \tag{16}$$

2) $$x^{(2n-k)j}=x^{(2n-k)j}(x,\dot x,\ldots,\overset{(2n-k-1)}{x},p_k^i(n)). \tag{17}$$

Доказательство:

$$\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial\overset{(2n-k)j}{x}}=\frac{\partial}{\partial\overset{(2n-k)j}{x}}\left(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)s}{x}+g_i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2n-k-1)}{x})\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial\overset{(2n-k)j}{x}}\left(\frac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\overset{(2n-k)s}{x}\right)+\frac{\partial}{\partial\overset{(2n-k)j}{x}}\left(g_i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2n-k-1)}{x})\right)\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\overset{(2n-k)s}{x}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)i}}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\big(\overset{(2n-k)s}{x}\big)+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\big(g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k-1)}{x})\big))=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\overset{(2n-k)s}{x}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)i}}\delta_j^s=\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}$$

где $\delta_j^s=\begin{cases}1,\ s=j\\ 0\ ,\ s\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера.

Так как при $0\le k\le n-1\Rightarrow 2n-k\ge n+1>n$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\equiv 0\Rightarrow\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\overset{(2n-k)s}{x}=0.$$

Поскольку $2n-k\ge 2n-k-1$ при любых целых *n* и *k*, следовательно $\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\big(g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k-1)}{x})\big)=0$.

Первое равенство в формуле (16) доказано, первая часть **теоремы 9** доказана.

В силу условий первой части **теоремы** 9 (формула (16) имеем

$$\det\Big(\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big)(X_0^{2n-k})=\det\Big(\frac{\partial^2 L(X_0^n)}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\Big)=\det\Big(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X_0^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\Big)\neq 0,$$

то из гладкости функций $\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m\to T^nX_m$, $L:T^nX_m\to\Re$ и гладкости композиции $L\circ\pi_n^{2n-k}:T^{2n-k}X_m\to\Re$ следует, что существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$, точки X_0^{2n-k}, такая что $\det\Big(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)i}}\Big)\neq 0\ \ \forall X^{2n-k}\in U(X_0^{2n-k})$, $X^{2n-k}=(x,\dot{x},\ddot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$, по теореме о неявной функции в окрестности $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k} $x^{(2n-k)j}=x^{(2n-k)j}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k-1)}{x},p_k^i(n))$.

Формула (17) и **теорема 9** доказана.

Замечание. В теореме 8 условие $0\le k\le n-1$ было существенно, так как из неравенства $0\le k\le n-1\Rightarrow 2n-k\ge n+1>n$ следует равенство 0:

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\equiv 0\Rightarrow\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(2n-k)j}{x}}\Big(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}\Big)\overset{(2n-k)s}{x}=0.$$

Для $k=n$ этого утверждать уже нельзя. Но тем не менее, аналогичное утверждение справедливо и для $k=n$.

Теорема 10. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det\Big(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^i}\Big)\neq 0,\ i,j=\overline{1,m}\ \text{ в окрестности } U(q_0,p_0) \text{ точки } (q_0,p_0).$$

Тогда

1) замена переменных $p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $i=\overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0) и справедливо

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}; \tag{18}$$

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}); \tag{19}$$

3) имеет место формула свертки

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases} - \text{символ Кронекера}\ . \tag{20}$$

Доказательство. $x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\dfrac{\partial}{\partial p_n^j}(\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$

Выражение (18) проверено.

Так как $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i})\neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}), \tag{21}$$

и значит, первые 2 части утверждения доказаны.

Продифференцируем соотношения

$$x^{n(i)}(q_1,...,q_n,p_1,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)}\ ,\ i,l,j=\overline{1,m}\,.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l}=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i};\dfrac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}=0\ s=\overline{1,n}\ ;\dfrac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}=0\ s=\overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}}=\delta_j^i=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}\,.$$

Что доказывает формулу (20) и **теорему 10**.

Теорема 11. Пусть $H(q,p)$ – функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\quad l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$. И пусть функция Гамильтона в уравнении связи $L(p,q)=-H(p,q)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum\limits_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ невырождена $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^i})\neq 0,\ i,j=\overline{1,m}$, где $U(q_0,p_0)$ – окрестность точки (q_0,p_0).

Тогда справедливы следующие результаты:

1) формула замена переменных – это переход от

$$p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i},\ i=\overline{1,m}, \tag{22}$$

является невырожденным в окрестности точки (q_0,p_0);

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}); \tag{23}$$

3) $$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,...,}q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n^i. \tag{24}$$

Доказательство. По **теореме 10**, первые 2 части **теоремы 11** доказаны:

$$x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}\left(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\right) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}.$$

Так как $\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}\right) \neq 0$, благодаря теореме об обратной функции существует обратная замена переменных $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})$.

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\left(-H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\left(p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right) = \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j\right) q_{k+1}^j + p_k^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j\right)\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right). \quad (26)$$

Учтем тождества $\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} = 0;\ k = \overline{1,n};\ \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j = 0;\ k = \overline{1,n-1};\ \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j = 0$, поэтому формулу (26) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j\right) q_{k+1}^j +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right). \quad (27)$$

С учетом **теоремы 3** $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} \cdot \delta_n^k = \begin{cases} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$, $\delta_n^k = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера (28)

(переменные $q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}$ независимы), тогда выражение (27) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j\right)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\right)\right) =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}), \quad (29)$$

так как $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}+\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}=0$.

Преобразуем выражение (29), получим

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}). \quad (30)$$

Зная, что $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}=0,\ k=\overline{1,n},\ i,l=\overline{1,m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$, где $\delta_n^l=\begin{cases}1,\ l=n\\0,\ l\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера, то выражение (30) можно преобразовать:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}})=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}. \quad (31)$$

По пункту 3 **теоремы 10,** $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера, перепишем формулу (31) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m}p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}=\sum_{j=1}^{m}p_n^j\delta_i^j=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}p_n^j\delta_i^j+p_n^{j=i}\delta_i^{j=i}=0+p_n^i\cdot 1=p_n^i.$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть

1) $H(q,p)$ – функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$. Введем сокращенные обозначения

$$q=(q_1,q_{2,\dots,}q_n,),\ p=(p_1,p_2,\dots,p_n),\ P_{n-1}=(p_1,p_2,\dots,p_{n-1}),\ \ p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)});$$

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0).

Тогда

1) $$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}=$$

$$=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\text{– символ Кронекера} \quad (32)$$

(матрицы $\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}$ и $\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}$ – взаимно-обратные);

2) $$\frac{\partial^2 H(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\neq 0\Leftrightarrow\frac{\partial^2 L(q,P_{n-1},p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}\neq 0. \quad (33)$$

Доказательство. По пункту 2 **теоремы 10**, $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,}q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)}) = p_n^i(q, P_{n-1}, x^{(n)})$.
Значит, $L(q,p) = L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))$, $H(q,p) = H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))$.

По **теореме 11** $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i$, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))\right) = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_n^i(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}}. \quad (34)$$

Равенство (34) – это аналог матрицы Якоби $\frac{\partial p_n^i(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}}$ – локальной записи импульсов n-го порядка по старшим скоростям порядка n для функции Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$, и оно может быть получено по-другому:

$$p_k^i(n)(x, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n^i(n) = p_{k=n}^i(n)(x, ..., \overset{(2n-n)}{x}) = p_n^i(n)(x, ..., \overset{(n)}{x}) = (-1)^{l=0} D_t^{l=0}\left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(0+n)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(n)j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}.$$

По третьему пункту **теоремы 10**, имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} - \text{символ Кронекера.} \quad (35)$$

Подставим $\frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)s}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}}$ (прямое следствие из выражения (34) в (35):

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} - \text{символ Кронекера.} \quad (36)$$

Вторая часть теоремы

$$\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} = \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s}\partial x^{(n)j}} \neq 0$$

следует из равенства (36).

Теорема 12 доказана.

Заключение. В работе получены основные результаты:

1. Оператор k кратного дифференцирования расслоения скоростей по времени (старых координат, выраженных через новые) квазилинеен относительно k-го дифференцирования по времени новых координат и якобиану перехода (теорема 1).
2. Получена формула первой частной производной порядка k от расслоения скоростей в старых координатах по скоростям в новых координатах порядка p. Показано, что она пропорциональна производной по времени от якобиана перехода порядка k-p (теорема 2).
3. Выявлена связь частных производных первого порядка обобщенных координат по координатам и импульсов по обобщенным импульсам и с произвольными нижними и верхними индексами. Рассматриваемые производные можно выразить через функции дельта Кронекера (теорема 3).

4. Теорема 4 – формула свертки обобщенных импульсов в двойной сумме по верхнему и нижнему индексам.

5. В теореме 5 показано, что частные производные по обобщенным координатам с индексами (i,s) в функциях Гамильтона и Лагранжа пропорциональны с точностью до слагаемого по сопряженной координате (нижний индекс для производной по координате понижается на 1, для производной по импульсу нижний индекс – повышается на 1), а также с точностью до суммы со вторыми частными производными функции Гамильтона и умноженные на обобщенный импульс максимального порядка.

6. В теореме 6 доказано, что формула временной производной порядка p от гладкой функции с аргументом старшей скорости порядка k выражается квазилинейно через скорость максимального порядка $k + p$.

7. Теорема 7 – формула связи обобщенного импульса с индексами (i,k) со вторыми частными производными функции Лагранжа по скоростям минимального порядка, умноженными на скорость максимального порядка в расслоенном пространстве скоростей.

8. Теорема 8 – частный случай теоремы 7 (порядок временной производной равен рангу обобщенного импульса).

9. В теореме 9 показана эквивалентность частной временной производной порядка $2n - k$ от обобщенного импульса $p_k^i(n)$ по координате расслоенного пространства скоростей и гессиана от функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства с максимальным порядком n производных по времени (локально невырожденного). И в силу теоремы о неявной функции можно выразить координату расслоенного пространства скоростей с временной производной максимального порядка через обобщенный импульс.

10. В случае невырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам (старшего порядка n) его можно выразить через частную производную скорости порядка n по обобщенным импульсам порядка n (максимален).

11. В случае локальной невырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам старшего порядка n существует равенство частной производной первого порядка от Лагранжиана по скорости порядка n расслоенного пространства обобщенному импульсу того же порядка. Аналогично, скорость порядка n равна частной производной функции Гамильтона по обобщенному импульсу порядка n.

12. Матрица Гессе для функции Гамильтона по импульсу старшего порядка n и матрица Гессе от функции Лагранжа по скоростям порядка n являются взаимно обратными, то есть их свертка по индексу пространственной переменной равна символу Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”. Фундаментальная и прикладная математика. 7:1(2001), 285–288.
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

Поступила 12.03.2019

PROPERTIES OF THE HAMILTON FUNCTION IN VARIATION TASKS WITH HIGHER DERIVATIVE DERIVATIVES

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The Considered characteristic function Hamilton and Lagranzha in coordinate-pulsed and stratified space of the velocities. The Main got by result is a statement - in the event of local absence of degeneracy of the matrix Gesse from function Hamilton on pulse of the maximum order (the matrixes Gesse from function Lagranzha on velocity of the maximum order) specified matrixes Gesse mutually inverse. It Is Received row auxiliary result, for instance, about quasi linear form of the time derived order k from generalised coordinates on velocity stratified space of the order k for change the coordinates with nonzero finder Yakobi. Unexpected identity are Received in coordinate-pulsed space q-p for quotient derived between coordinate is stratified space (the coordinate-coordinate, pulse-pulse). They Are Received formulas, linking quotient derived in coordinate-pulsed space q-p for function Lagranzha and Hamilton on one and same variable.

Keywords: *function Hamilton, variational problem, stratified space of the velocities, equations Eylera – Lagranzha, smooth of the variety, tensor of the generalised pulse, nonzero finder of the matrix Gesse.*