МАТЕМАТИКА

УДК 511.8

МНОЖЕСТВО ПОЛУОКТАВ. I

канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. КОЗЛОВ
(Полоцкий государственный университет)

На основании подхода, аналогичного предложенному Х. Мортазашлом и М. Джафари, нами введено понятие полуоктав и операций над ними, установлены свойства этих операций. Полученные в данной работе результаты будут в дальнейшем использованы при решении линейных уравнений над полуоктавами, а также для установления формул Эйлера и Муавра для полуоктав.

Ключевые слова*: полуоктавы, гиперкомплексные числа.*

Введение. В настоящее время теория гиперкомплексных чисел представляет собой достаточно сильный математический аппарат для описания различных фундаментальных процессов и явлений, изучаемых в рамках специальной теории относительности. Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространства-время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности. В связи с чем интерес к гиперкомплексным числам, как со стороны математиков, так и со стороны физиков-теоретиков, только усиливается с каждым годом, порождая все новые и новые открытия в этой области математических знаний.

Сама́ теория гиперкомплексных чисел появилась как обобщение теории действительных чисел. Первым таким обобщением стало *множество комплексных чисел*, т.е. чисел вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Необходимость введения этой числовой совокупности была обусловлена тем, что во множестве действительных чисел не каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имело решение. Во введенном же множестве комплексных чисел, как выяснилось, всякое алгебраическое уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами обладает ровно n корнями с учетом их кратностей. Это так называемая основная теорема алгебры [1]. Другим распространением понятия «действительное число» [2, с. 20–23] стало введение *множества дуальных чисел*, т.е. чисел вида $a + bi$, в котором a, b – действительные числа, а мнимая единица удовлетворяет соотношениям $i^2 = 0$ и $i \notin \mathbb{R}$ (здесь и далее $\mathbb{R}$ обозначает совокупность действительных чисел). Такое множество, как недавно выяснилось, позволяет достаточно точно математически смоделировать физическое пространство-время [3].

Дальнейшее распространение теории комплексных чисел нашло свое отражение во введенном В. Гамильтоном в 1843 г. понятии «*кватернион*» [2, с. 28].

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – действительные числа, а i, j, $k \notin \mathbb{R}$ – базисные (кватернионные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \quad kj = -i, \quad ji = -k\ .$$

Такие числа, а также последующие их обобщения и стали в дальнейшем носить название «*гиперкомплексные числа*». Позднее оказалось, что кватернионы являются не просто отдельным теоретическим объектом математики, но хорошим алгебраическим средством для описания вращений в трех- и четырехмерном векторном пространстве [4], которые, в свою очередь, широко используются в электродинамике, квантовой и теоретической физиках [5, 6].

Следующим шагом по обобщению совокупности чисел явилось введение *множества октав* [2, с. 29], т.е. чисел вида

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 il + x_6 jl + x_7 kl$$

с действительными коэффициентами x_i и мнимыми (базисными) единицами i, j, k, l, il, jl, kl, для которых имеет место таблица умножения (табл. 1) [2, с. 29].

Такое множество впервые было рассмотрено в 1843 г. Дж. Грейвсом, а двумя годами позже независимо от него – А. Кэли. Поскольку введенная числовая совокупность была основательно изучена

А. Кэли, множество октав стало еще называться и *алгеброй Кэли*. В последнее время октавы (как и кватернионы) широко используются в теоретической и квантовой физиках, например, при решении задач электродинамики (уравнения Максвелла), в специальной теории относительности, а также в теории струн [6, 7].

Таблица 1. – Таблица умножения действительной и базисных единиц октавы

	1	***i***	***j***	***k***	***l***	***il***	***jl***	***kl***
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	$-k$	j
jl	jl	kl	l	$-il$	$-j$	k	-1	$-i$
kl	kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	i	-1

Иное обобщение множества комплексных чисел было предложено в 2013 г. иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари – в статье [8] введено понятие полукватерниона как обобщения комплексных чисел, основанного на своего рода синтезе дуальных и комплексных чисел. Данными учеными были также определены арифметические операции над полукватернионами и изучены свойства этих операций, получены решения некоторых классов уравнений над полукватернионами. Кроме того, ими было предложено обобщение на полукватернионы формул Эйлера и Муавра, установленных изначально для комплексных чисел.

Определение 1 [8]**.** *Действительным полукватернионом* (или просто *полукватернионом*) назовем формальное выражение

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ – действительные числа, а $i,\ j,\ k \notin \mathbb{R}$ – кватернионные (базисные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = -1,\quad j^2 = k^2 = 0,\quad ij = k,\quad ji = -k,\quad ik = -j,\quad ki = j,\quad jk = 0,\quad kj = 0.$$

В этой статье были введены арифметические операции над полукватернионами и изучены свойства этих операций, получены решения некоторых классов уравнений над полукватернионами. Кроме того, здесь же было дано обобщение на полукватернионы формул Эйлера и Муавра, изначально, как известно [9, с. 123], открытых для комплексных чисел.

Основная часть. В настоящей работе на основании подхода, аналогичного созданному Х. Мортазашлом и М. Джафари, введено понятие *полуоктав* и операций над ними, установлены свойства этих операций, необходимые в дальнейшем для решения линейных уравнений над полуоктавами, а также для установления формул Эйлера и Муавра для полуоктав.

Определение 2. *Действительной полуоктавой* (или просто *полуоктавой*) назовем формальное выражение вида

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$ – действительные числа;

$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4, i_5,\ i_6,\ i_7$ – базисные (мнимые) единицы, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$i_k^2 = -1 \text{ при } k = \overline{1,3} \text{ и } i_k^2 = 0 \text{ при } k = \overline{4,7},$$

$$i_k \cdot i_l = i_{k+l} = -i_l \cdot i_k \text{ при } k < l \text{ и } k + l \le 4,$$

$$i_k \cdot i_l = 0 \text{ при } k + l > 4.$$

Далее множество полуоктав будем обозначать через W. Введем на этом множестве операции суммы и произведения полуоктав, а также произведение действительного числа на полуоктаву.

Определение 3. *Суммой полуоктав*

$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \in W$ и $w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7 \in W$ назовем полуоктаву $w_1 + w_2 \in W$, определяемую следующим равенством:

$$w_1 + w_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3 + \\ +(a_4 + b_4) i_4 + (a_5 + b_5) i_5 + (a_6 + b_6) i_6 + (a_7 + b_7) i_7 .$$

Пример 1. Пусть даны полуоктавы

$$w_1 = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7 \text{ и } w_2 = 3 + i_1 + 4i_2 - i_3 + 5i_4 - 2i_5 + 4i_6 .$$

Тогда их суммой является полуоктава вида

$$w_1 + w_2 = 2 + 3i_1 + 7i_2 - 8i_3 + 6i_4 - 2i_5 + 8i_7 .$$

Следующая теорема устанавливает свойства операции суммы полуоктав.

Теорема 1. *Сумма полуоктав обладает свойствами ассоциативности и коммутативности.*

Доказательство. Пусть даны полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 ,$$
$$w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7 ,$$
$$w_3 = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 + c_4 i_4 + c_5 i_5 + c_6 i_6 + c_7 i_7 ,$$

где $a_k, b_k, c_k \in R$, $k = \overline{1,7}$. Тогда, пользуясь определением суммы полуоктав, а также свойствами ассоциативности и коммутативности операции сложения действительных чисел, получим равенства

$$w_1 + w_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3 + \\ +(a_4 + b_4) i_4 + (a_5 + b_5) i_5 + (a_6 + b_6) i_6 + (a_7 + b_7) i_7 = \\ = (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1) i_1 + (b_2 + a_2) i_2 + (b_3 + a_3) i_3 + \\ +(b_4 + a_4) i_4 + (b_5 + a_5) i_5 + (b_6 + a_6) i_6 + (b_7 + a_7) i_7 = w_2 + w_1 ,$$

$$(w_1 + w_2) + w_3 = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3 + \\ +(a_4 + b_4) i_4 + (a_5 + b_5) i_5 + (a_6 + b_6) i_6 + (a_7 + b_7) i_7) + \\ +c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 + c_4 i_4 + c_5 i_5 + c_6 i_6 + c_7 i_7 = \\ = ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1) i_1 + ((a_2 + b_2) + c_2) i_2 + ((a_3 + b_3) + c_3) i_3 + \\ +((a_4 + b_4) + c_4) i_4 + ((a_5 + b_5) + c_5) i_5 + ((a_6 + b_6) + c_6) i_6 + ((a_7 + b_7) + c_7) i_7 = \\ = (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1)) i_1 + (a_2 + (b_2 + c_2)) i_2 + (a_3 + (b_3 + c_3)) i_3 + \\ +(a_4 + (b_4 + c_4)) i_4 + (a_5 + (b_5 + c_5)) i_5 + (a_6 + (b_6 + c_6)) i_6 + (a_7 + (b_7 + c_7)) i_7 = \\ (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7) + \\ +((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) i_1 + (b_2 + c_2) i_2 + (b_3 + c_3) i_3 + \\ +(b_4 + c_4) i_4 + (b_5 + c_5) i_5 + (b_6 + c_6) i_6 + (b_7 + c_7) i_7) = w_1 + (w_2 + w_3).$$

Теорема 1 доказана.

Следующей операцией, которую определим на множестве полуоктав, будет произведение действительного числа на полуоктаву.

Определение 4. Пусть $c \in R$ и $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \in W$. *Произведением действительного числа* $c \in R$ *на полуоктаву* $w \in W$ назовем полуоктаву

$$cw = (ca_0) + (ca_1) i_1 + (ca_2) i_2 + (ca_3) i_3 + (ca_4) i_4 + (ca_5) i_5 + (ca_6) i_6 + (ca_7) i_7 \in W .$$

Свойства, введенной операции, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Операция произведения действительного числа на полуоктаву обладает следующими свойствами:*

1) $(c_1 + c_2) w = c_1 w + c_2 w$ *при всяких* $c_1, c_2 \in R$ и $w \in W$;

2) $(c_1 c_2) w_1 = c_1 (c_2 w_1)$ *при всяких* $c_1, c_2 \in R$ и $w_1 \in W$;

3) $c(w_1 + w_2) = cw_1 + cw_2$ *для произвольных* $c \in R$ и $w_1, w_2 \in W$;

Доказательство. Возьмем произвольные числа $c_1, c_2, c \in R$ и полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7, \quad w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7.$$

Тогда на основании определений произведения действительного числа на полуоктаву и суммы полуоктав, а также свойств коммутативности суммы и произведения и дистрибутивности произведения относительно суммы действительных чисел имеем равенства:

$$1)\ (c_1+c_2)w = ((c_1+c_2)a_0) + ((c_1+c_2)a_1)i_1 + ((c_1+c_2)a_2)i_2 + ((c_1+c_2)a_3)i_3 +$$
$$+((c_1+c_2)a_4)i_4 + ((c_1+c_2)a_5)i_5 + ((c_1+c_2)a_6)i_6 + ((c_1+c_2)a_7)i_7 =$$
$$= (c_1a_0 + c_2a_0) + (c_1a_1 + c_2a_1)i_1 + (c_1a_2 + c_2a_2)i_2 + (c_1a_3 + c_2a_3)i_3 +$$
$$+(c_1a_4 + c_2a_4)i_4 + (c_1a_5 + c_2a_5)i_5 + (c_1a_6 + c_2a_6)i_6 + (c_1a_7 + c_2a_7)i_7 =$$
$$= (c_2a_0 + c_1a_0) + (c_2a_1 + c_1a_1)i_1 + (c_2a_2 + c_1a_2)i_2 + (c_2a_3 + c_1a_3)i_3 +$$
$$+(c_2a_4 + c_1a_4)i_4 + (c_2a_5 + c_1a_5)i_5 + (c_2a_6 + c_1a_6)i_6 + (c_2a_7 + c_1a_7)i_7 =$$
$$= ((c_2+c_1)a_0) + ((c_2+c_1)a_1)i_1 + ((c_2+c_1)a_2)i_2 + ((c_2+c_1)a_3)i_3 +$$
$$+((c_2+c_1)a_4)i_4 + ((c_2+c_1)a_5)i_5 + ((c_2+c_1)a_6)i_6 + ((c_2+c_1)a_7)i_7 = (c_2+c_1)w,$$

$$2)\ (c_1c_2)w = ((c_1c_2)a_0) + ((c_1c_2)a_1)i_1 + ((c_1c_2)a_2)i_2 + ((c_1c_2)a_3)i_3 +$$
$$+((c_1c_2)a_4)i_4 + ((c_1c_2)a_5)i_5 + ((c_1c_2)a_6)i_6 + ((c_1c_2)a_7)i_7 =$$
$$= (c_1(c_2a_0)) + (c_1(c_2a_1))i_1 + (c_1(c_2a_2))i_2 + (c_1(c_2a_3))i_3 +$$
$$+(c_1(c_2a_4))i_4 + (c_1(c_2a_5))i_5 + (c_1(c_2a_6))i_6 + (c_1(c_2a_7))i_7 = c_1(c_2w),$$

$$3)\ c(w_1+w_2) = (c(a_0+b_0)) + (c(a_1+b_1))i_1 + (c(a_2+b_2))i_2 + (c(a_3+b_3))i_3 +$$
$$+(c(a_4+b_4))i_4 + (c(a_5+b_5))i_5 + (c(a_6+b_6))i_6 + (c(a_7+b_7))i_7 =$$
$$c(w_1+w_2) = (ca_0 + cb_0) + (ca_1 + cb_1)i_1 + (ca_2 + cb_2)i_2 + (ca_3 + cb_3)i_3 +$$
$$+(ca_4 + cb_4)i_4 + (ca_5 + cb_5)i_5 + (ca_6 + cb_6)i_6 + (ca_7 + cb_7)i_7 =$$
$$((ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7) +$$
$$((cb_0) + (cb_1)i_1 + (cb_2)i_2 + (cb_3)i_3 + (cb_4)i_4 + (cb_5)i_5 + (cb_6)i_6 + (cb_7)i_7) = cw_1 + cw_2,$$

устанавливающие справедливость формул 1)–3). **Теорема 2** доказана.

Пример 2. Пусть дана полуоктава $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7$. Тогда

$$3w = -3 + 6i_1 + 9i_2 - 21i_3 + 3i_4 - 12i_6 + 24i_7.$$

Прежде чем ввести следующую операцию – произведение полуоктав, пользуясь определением 2, построим таблицу умножения для действительной и мнимых единиц полуоктавы.

Таблица 2. – Таблица умножения действительной и базисных единиц полуоктавы

	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	-1	i_3	i_4	0	0	0	0
i_2	i_2	$-i_3$	-1	0	0	0	0	0
i_3	i_3	$-i_4$	0	-1	0	0	0	0
i_4	i_4	0	0	0	0	0	0	0
i_5	i_5	0	0	0	0	0	0	0
i_6	i_6	0	0	0	0	0	0	0
i_7	i_7	0	0	0	0	0	0	0

Теперь, исходя из свойств суммы и произведения действительных чисел, на основании таблицы 2 определим операцию произведения полуоктав.

Определение 5. *Произведением полуоктавы* $w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$ *на полуоктаву* $w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$ назовем полуоктаву $w_1 w_2 \in W$, определяемую следующим равенством:

$$w_1 w_2 = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 +$$
$$+ (a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 +$$
$$+ (a_0 b_4 + a_4 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1) i_4 + (a_5 b_0 + a_0 b_5) i_5 + (a_6 b_0 + a_0 b_6) i_6 + (a_7 b_0 + a_0 b_7) i_7.$$

Произвольное действительное число c является элементом множества полуоктав, поскольку оно представимо в виде $c = c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7$. Поэтому в случае корректного введения операции умножения полуоктав должно выполняться равенство

$$cw = (c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7)(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7).$$

Покажем, что это действительно так. На основании определений 5 и 4 с учетом свойств действительных чисел имеем равенства

$$(c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7)(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7) =$$
$$(ca_0 - 0a_1 - 0a_2 - 0a_3) + (0a_0 + ca_1) i_1 + (0a_0 + ca_2) i_2 + (ca_3 + 0a_0 + 0a_2 - 0a_1) i_3 +$$
$$+ (ca_4 + 0a_0 + 0a_3 - 0a_1) i_4 + (0a_0 + ca_5) i_5 + (0a_0 + ca_6) i_6 + (0a_0 + ca_7) i_7 =$$
$$= (ca_0) + (ca_1) i_1 + (ca_2) i_2 + (ca_3) i_3 + (ca_4) i_4 + (ca_5) i_5 + (ca_6) i_6 + (ca_7) i_7 = cw.$$

устанавливающие согласованность определения 5 произведения полуоктав и определения 4 умножения действительного числа на полуоктаву.

Пример 3. Пусть даны полуоктавы

$$w_1 = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7 \text{ и } w_2 = 3 + i_1 + 4i_2 - i_3 + 5i_4 - 2i_5 + 4i_6.$$

Тогда произведением полуоктав w_1 на w_2 будет являться полуоктава

$$w_1 w_2 = -24 + 5i_1 + 5i_2 - 17i_3 + 3i_4 + 2i_5 - 16i_6 + 24i_7.$$

Любую полуоктаву можно представить в векторной форме, т.е. в виде вектора с действительными коэффициентами следующим образом:

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 =$$
$$= (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)^T,$$

где ^{T} обозначает операцию транспонирования вектора.

Тогда, пользуясь определением произведения матриц, умножение полуоктавы

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$$

на полуоктаву

$$w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$$

можно представить в матрично-векторной форме, т.е. в виде произведения некоторой вполне определенной матрицы, элементы которой суть коэффициенты при действительной и мнимых единицах первого сомножителя и нули, на вектор, представляющий второй сомножитель-полуоктаву:

$$w_1 w_2 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Операция произведения полуоктав обладает следующими свойствами:*

1) $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$ при всяких $w_1, w_2 \in W$, $w_1, w_2 \notin \mathbb{R}$,

2) $w_1(w_2 w_3) \neq (w_1 w_2) w_3$ при всяких $w_1, w_2, w_3 \in W$, $w_1, w_2, w_3 \notin R$,

3) $w_1(w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3$ при всяких $w_1, w_2, w_3 \in W$, $w_1, w_2, w_3 \notin R$,

4) $(w_2 + w_3) w_1 = w_2 w_1 + w_3 w_1$ при всяких $w_1, w_2, w_3 \in W$, $w_1, w_2, w_3 \notin R$,

5) $cw = wc$ для произвольных $c \in R$ и $w \in W$;

6) $c(w_1 w_2) = (cw_1) w_2 = w_1(cw_2) = (w_1 w_2) c$ при всяких $c \in R$ и $w_1, w_2 \in W$.

Доказательство. Для доказательства формул 1)–3) воспользуемся векторно-матричным представлением произведения полуоктав. Пусть даны полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7, \quad w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7,$$

$$w_3 = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 + c_4 i_4 + c_5 i_5 + c_6 i_6 + c_7 i_7,$$

где $a_k, b_k, c_k \in R$, $k = \overline{1,7}$.

Тогда, исходя из векторно-матричного представления произведения полуоктав, имеем равенства:

$$w_1 w_2 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ a_2 b_0 + a_0 b_2 \\ a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_5 b_0 + a_0 b_5 \\ a_6 b_0 + a_0 b_6 \\ a_7 b_0 + a_0 b_7 \end{pmatrix}$$

и

$$w_2 w_1 = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 a_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3 \\ b_1 a_0 + b_0 a_1 \\ b_2 a_0 + b_0 a_2 \\ b_0 a_3 + b_3 a_0 + b_1 a_2 - b_2 a_1 \\ b_0 a_4 + a_0 b_4 + b_1 a_3 - b_3 a_1 \\ b_5 a_0 + b_0 a_5 \\ b_6 a_0 + b_0 a_6 \\ b_7 a_0 + b_0 a_7 \end{pmatrix}.$$

Поскольку четвертый и пятый элементы в векторах, стоящих в правой части последних двух равенств не совпадают, то неравенство 1) **теоремы 2** доказано.

Для установления формулы 2) воспользуемся предпоследним равенством. Обозначим

$$\alpha = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

$$\beta = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\gamma = a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1.$$

Тогда на основании векторного преставления полуоктав и векторно-матричного представления произведения полуоктав имеем равенства

$$(w_1 w_2) w_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ a_2 b_0 + a_0 b_2 \\ \beta \\ \gamma \\ a_5 b_0 + a_0 b_5 \\ a_6 b_0 + a_0 b_6 \\ a_7 b_0 + a_0 b_7 \end{pmatrix} w_3 =$$

$$
=\begin{bmatrix}
\alpha & -(a_1b_0+a_0b_1) & -(a_2b_0+a_0b_2) & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_1b_0+a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2b_0+a_0b_2 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta & -(a_2b_0+a_0b_2) & a_1b_0+a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\
\gamma & -\beta & 0 & a_1b_0+a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0\\
a_5b_0+a_0b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0\\
a_6b_0+a_0b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0\\
a_7b_0+a_0b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6\\ c_7 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\alpha c_0-(a_1b_0+a_0b_1)c_1-(a_2b_0+a_0b_2)c_2-\beta c_3\\
(a_1b_0+a_0b_1)c_0+\alpha c_1\\
(a_2b_0+a_0b_2)c_0+\alpha c_2\\
\alpha c_3+\beta c_0+(a_1b_0+a_0b_1)c_2-(a_2b_0+a_0b_2)c_1\\
\alpha c_4+c_0\gamma+(a_1b_0+a_0b_1)c_3-\beta c_1\\
(a_5b_0+a_0b_5)c_0+\alpha c_5\\
(a_6b_0+a_0b_6)c_0+\alpha c_6\\
(a_7b_0+a_0b_7)c_0+\alpha c_7
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_0-(a_1b_0+a_0b_1)c_1-(a_2b_0+a_0b_2)c_2-(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_3\\
(a_1b_0+a_0b_1)c_0+(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_1\\
(a_2b_0+a_0b_2)c_0+(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_2\\
(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_3+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_0+(a_1b_0+a_0b_1)c_2-(a_2b_0+a_0b_2)c_1\\
(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_4+c_0(a_0b_4+b_0a_4+a_1b_3-a_3b_1)+(a_1b_0+a_0b_1)c_3-(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_1\\
(a_5b_0+a_0b_5)c_0+(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_5\\
(a_6b_0+a_0b_6)c_0+(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_6\\
(a_7b_0+a_0b_7)c_0+(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_7
\end{pmatrix}.
$$

Аналогичным образом,

$$
w_1(w_2w_3)=w_1\left(\begin{bmatrix}
b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0\\
b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0\\
b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0\\
b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0
\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6\\ c_7 \end{pmatrix}\right)=w_1\begin{pmatrix}
b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3\\
b_1c_0+b_0c_1\\
b_2c_0+b_0c_2\\
b_3c_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1\\
b_4c_0+b_0c_4+b_1c_3-b_3c_1\\
b_5c_0+b_0c_5\\
b_6c_0+b_0c_6\\
b_7c_0+b_0c_7
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0\\
a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0\\
a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0\\
a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0
\end{bmatrix}_1
\begin{pmatrix}
b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3\\
b_1c_0+b_0c_1\\
b_2c_0+b_0c_2\\
b_3c_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1\\
b_4c_0+b_0c_4+b_1c_3-b_3c_1\\
b_5c_0+b_0c_5\\
b_6c_0+b_0c_6\\
b_7c_0+b_0c_7
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_0(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)-a_1(b_1c_0+b_0c_1)-a_2(b_2c_0+b_0c_2)-a_3(b_3c_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1)\\
a_1(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_1c_0+b_0c_1)\\
a_2(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_2c_0+b_0c_2)\\
a_3(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)-a_2(b_1c_0+b_0c_1)+a_1(b_2c_0+b_0c_2)+a_0(b_3c_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1)\\
a_4(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)-a_3(b_1c_0+b_0c_1)+a_1(b_3c_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1)+a_0(b_4c_0+b_0c_4+b_1c_3-b_3c_1)\\
a_5(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_5c_0+b_0c_5)\\
a_6(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_6c_0+b_0c_6)\\
a_7(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_7c_0+b_0c_7)
\end{pmatrix}.
$$

Сравнивая правые части произведений $(w_1w_2)w_3$ и $w_1(w_2w_3)$, убеждаемся, что первые элементы вектора (коэффициенты, стоящие при действительной единице) не совпадают (у одной из полуоктав отсутствует слагаемое $-a_3b_1c_2$), что означает выполнение неравенства 2).

Покажем теперь справедливость формулы 3). Используя определение и свойства операций сложения и произведения полуоктав, получим равенства

$$
w_1(w_2+w_3)=w_1((b_0+c_0)+(b_1+c_1)i_1+(b_2+c_2)i_2+(b_3+c_3)i_3+
$$

$$
+(b_4+c_4)i_4+(b_5+c_5)i_5+(b_6+c_6)i_6+(b_7+c_7)i_7)=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0\\
a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0\\
a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0\\
a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
b_0+c_0\\ b_1+c_1\\ b_2+c_2\\ b_3+c_3\\ b_4+c_4\\ b_5+c_5\\ b_6+c_6\\ b_7+c_7
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_0(b_0+c_0)-a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2)-a_3(b_3+c_3)\\
a_1(b_0+c_0)+a_0(b_1+c_1)\\
a_2(b_0+c_0)+a_0(b_2+c_2)\\
a_0(b_3+c_3)+a_3(b_0+c_0)+a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)\\
a_0(b_4+c_4)+(b_0+c_0)a_4+a_1(b_3+c_3)-a_3(b_1+c_1)\\
a_5(b_0+c_0)+a_0(b_5+c_5)\\
a_6(b_0+c_0)+a_0(b_6+c_6)\\
a_7(b_0+c_0)+a_0(b_7+c_7)
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3\\
a_1b_0+a_0b_1\\
a_2b_0+a_0b_2\\
a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1\\
a_0b_4+b_0a_4+a_1b_3-a_3b_1\\
a_5b_0+a_0b_5\\
a_6b_0+a_0b_6\\
a_7b_0+a_0b_7
\end{pmatrix}+
\begin{pmatrix}
a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_3\\
a_1c_0+a_0c_1\\
a_2c_0+a_0c_2\\
a_0c_3+a_3c_0+a_1c_2-a_2c_1\\
a_0c_4+c_0a_4+a_1c_3-a_3c_1\\
a_5c_0+a_0c_5\\
a_6c_0+a_0c_6\\
a_7c_0+a_0c_7
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix}= w_1 w_2 + w_1 w_2,
$$

устанавливающие справедливость формулы 3).

Перейдем теперь к доказательству формулы 4). На основании определений операции суммы и произведения полуоктав, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел имеем равенства

$$
(w_2+w_3)w_1 = ((b_0+c_0)+(b_1+c_1)i_1+(b_2+c_2)i_2+(b_3+c_3)i_3+
$$

$$
+(b_4+c_4)i_4+(b_5+c_5)i_5+(b_6+c_6)i_6+(b_7+c_7)i_7)w_1 =
$$

$$
=\begin{bmatrix} b_0+c_0 & -(b_1+c_1) & -(b_2+c_2) & -(b_3+c_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1+c_1 & b_0+c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2+c_2 & 0 & b_0+c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3+c_3 & -(b_2+c_2) & b_1+c_1 & b_0+c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4+c_4 & -(b_3+c_3) & 0 & b_1+c_1 & b_0+c_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5+c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0+c_0 & 0 & 0 \\ b_6+c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0+c_0 & 0 \\ b_7+c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0+c_0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} a_0(b_0+c_0)-a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2)-a_3(b_2+c_2) \\ a_0(b_1+c_1)+a_1(b_0+c_0) \\ a_0(b_2+c_2)+a_2(b_0+c_0) \\ a_0(b_3+c_3)-a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1)+a_3(b_0+c_0) \\ a_0(b_4+c_4)-a_1(b_3+c_3)+a_3(b_1+c_1)+a_4(b_0+c_0) \\ a_0(b_5+c_5)+a_5(b_0+c_0) \\ a_0(b_6+c_6)+a_6(b_0+c_0) \\ a_0(b_7+c_7)+a_7(b_0+c_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_2 \\ a_0b_1+a_1b_0 \\ a_0b_2+a_2b_0 \\ a_0b_3-a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0 \\ a_0b_4-a_1b_3+a_3b_1+a_4b_0 \\ a_0b_5+a_5b_0 \\ a_0b_6+a_6b_0 \\ a_0b_7+a_7b_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_2 \\ a_0c_1+a_1c_0 \\ a_0c_2+a_2c_0 \\ a_0c_3-a_1c_2+a_2c_1+a_3c_0 \\ a_0c_4-a_1c_3+a_3c_1+a_4c_0 \\ a_0c_5+a_5c_0 \\ a_0c_6+a_6c_0 \\ a_0c_7+a_7c_0 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & -c_3 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & 0 \\ c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}= w_2 w_1 + w_3 w_1.
$$

Докажем теперь формулу 5). Поскольку для произвольного числа $c \in R$ выполняется равенство $c = c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7$, то, пользуясь определением произведения полуоктав, свойством коммутативности произведения действительных чисел, а также определением произведения числа на полуоктаву, для всякого $w \in W$ получим соотношения

$$wc = (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7)(c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7) =$$
$$= (a_0 \cdot c - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0) + (a_1 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_1 + (a_2 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_2 + (a_0 \cdot 0 + a_3 \cdot c + a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0)i_3 +$$
$$+(a_0 \cdot 0 + a_4 \cdot c + a_1 \cdot 0 - a_3 \cdot 0)i_4 + (a_5 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_5 + (a_6 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_6 + (a_7 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_7) =$$
$$= a_0 c + (a_1 c)i_1 + (a_2 c)i_2 + (a_3 c)i_3 + (a_4 c)i_4 + (a_5 c)i_5 + (a_6 c)i_6 + (a_7 c)i_7 =$$
$$= ca_0 + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7 = cw.$$

Установим формулу 6). Из определения операций умножения действительного числа на полуоктаву и произведения полуоктав, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел вытекают равенства

$$c(w_1 w_2) = c((a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_1 b_0 + a_0 b_1)i_1 +$$
$$+(a_2 b_0 + a_0 b_2)i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)i_3 + (a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1)i_4 +$$
$$+(a_5 b_0 + a_0 b_5)i_5 + (a_6 b_0 + a_0 b_6)i_6 + (a_7 b_0 + a_0 b_7)i_7) =$$
$$= (c(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)) + (c(a_1 b_0 + a_0 b_1))i_1 + (c(a_2 b_0 + a_0 b_2))i_2 +$$
$$+(c(a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1))i_3 + (c(a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1)i_4 +$$
$$+(c(a_5 b_0 + a_0 b_5))i_5 + (c(a_6 b_0 + a_0 b_6))i_6 + (c(a_7 b_0 + a_0 b_7))i_7).$$

В силу последнего соотношения, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел и определения произведения полуоктав для полуоктавы $c(w_1 w_2)$ выполняются следующие равенства:

$$c(w_1 w_2) = ((ca_0)b_0 - (ca_1)b_1 - (ca_2)b_2 - (ca_3)b_3) + ((ca_1)b_0 + (ca_0)b_1)i_1 + ((ca_2)b_0 + (ca_0)b_2)i_2 +$$
$$+((ca_0)b_3 + (ca_3)b_0 + (ca_1)b_2 - (ca_2)b_1)i_3 + ((ca_0)b_4 + (ca_4)b_0 + (ca_1)b_3 - (ca_3)b_1)i_4 +$$
$$+((ca_5)b_0 + (ca_0)b_5)i_5 + ((ca_6)b_0 + (ca_0)b_6)i_6 + ((ca_7)b_0 + (ca_0)b_7)i_7 = (cw_1)w_2,$$
$$c(w_1 w_2) = (a_0(cb_0) - a_1(cb_1) - a_2(cb_2) - a_3(cb_3)) + (a_1(cb_0) + a_0(cb_1))i_1 + (a_2(cb_0) + a_0(cb_2))i_2 +$$
$$+(a_0(cb_3) + a_3(cb_0) + a_1(cb_2) - a_2(cb_1))i_3 + (a_0(cb_4) + a_4(cb_0) + a_1(cb_3 - a_3(cb_1))i_4 +$$
$$+(a_5(cb_0) + a_0(cb_5))i_5 + (a_6(cb_0) + a_0(cb_6))i_6 + (a_7(cb_0) + a_0(cb_7))i_7 = w_1(cw_2).$$

Последнее равенство в формуле 6) **теоремы 3** непосредственно следует из формулы 5) этой теоремы. **Теорема 3** доказана.

Таким образом, из теорем 1–3 следует

Теорема 4. *Множество полуоктав является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй* [10, с. 380–383].

Заключение. В данной работе введены множества полуоктав, а также арифметические операции в этом множестве, установлены основные свойства этих операций, на основании чего сделан вывод, что множество полуоктав является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй. Полученные результаты будут использованы в дальнейшем при введении понятий «уравнения над полуоктавами», «степень полуоктавы», а также при выводе формул Эйлера и Муавра для полуоктав.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров, В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В. М. Тихомиров, В. В. Успенский // Математическое просвещение. – МЦНМО, 1997. – № 1. – С. 50–70.
2. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Физматлит, 1963. – 192 с.

3. Павлов, Д. Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – Вып. 2 (14), Т. 7. – С. 11–37.
4. Петров, А. М. Кватернионное представление вихревых движений / А. М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
5. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – М. : Мир, 1987–1988. – Т. 1. – 1987. – 528 с. ; Т. 2. – 1988. –572 с.
6. Кубышкин, Е. И. Нелинейная алгебра пространства-времени / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 304 с.
7. Кубышкин, Е. И. Октавы и наш восьмимерный мир / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 256 с.
8. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences and Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1, № 2. – P. 20–27.
9. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 400 с.
10. Скорняков, Л. А. Общая алгебра / под общ. ред. Л. А. Скорнякова . – М. : Наука, 1990. – Т. 1. – 592 с.

Поступила 05.09.2016

THE SET OF SEMI-OCTAVE. I

A. KOZLOV

In the present work based on a similar approach introduced by X. Mortazaasl and M. Jafari, we introduced the concept of semi-octave and operations on them, set properties of these operations. Obtained in this paper results will be further used in solving linear equations over semi-octave, as well as to establish the formulas of Euler and de Moivre to semi-octave.

Keywords: *semi-octave, hypercomplex numbers.*