УДК 519.6:517.958

АППРОКСИМАЦИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВО ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА, д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.А. ГУРЬЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-го, 11-го, 15-го алгебраического порядка точности и 8-го, 12-го, 16-го порядка погрешности соответственно во внутренних краевых задачах математической физики. Найдены аналоги формул для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением такого же порядка погрешности, что и в одномерном случае. Построены линейные отображения обобщенных координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры в полярной и в сферической системах координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно. Доказана лемма, указывающая минимальное число узлов, достаточное для вычисления интеграла с двойной точностью. Приведены соответствующие алгоритмы.

Ключевые слова*: алгебраический порядок точности, порядок погрешности, шаблон весовых коэффициентов, метод медианной фильтрации, кольцо, шаровой слой, аппроксимация интегралов.*

Введение. В задачах математической физики обычно используют области: прямоугольник (параллелепипед), круг (шар). Например, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в шаре [1, 2]. В подобных задачах решение записывается в виде суммы ряда по собственным функциям выбранной области и уравнения в частных производных. Коэффициенты разложения ряда находят через двойные интегралы (в прямоугольнике, круге, кольце) и тройные интегралы (в параллелепипеде, шаре, шаровом слое). В программе коэффициенты разложения вычисляют по циклу, и их число может достигать несколько тысяч, что в свою очередь требует высокой точности расчета двойных и тройных интегралов в задачах математической физики.

Среди интегральных квадратурных формул наибольший алгебраический порядок точности имеют квадратурные формулы Гаусса [3, с. 44] при заданном числе узлов аппроксимации на отрезке. Для поиска узлов нужно построить ортогональный на отрезке $[a,b]$ многочлен степени n с весовой функцией $p(x)>0,\ x\in[a,b]$ (у многочлена все n корней расположены на отрезке $[a,b]$). Согласно теореме Абеля – Руффини произвольные многочлены степени больше четвертой имеют корни, для которых невозможно указать замкнутую формулу для решений, т.е. формулу, содержащую только арифметические операции и корни произвольной степени. По теореме Гаусса ортогональный многочлен степени n имеет квадратурную формулу Гаусса, точную для всех многочленов степени не выше $2n-1$ (алгебраический порядок точности) [3, с. 45]. Таким образом, интегральная формула Гаусса с узлами и весовыми коэффициентами, записанными через радикалы или рациональные дроби, может быть точна для всех многочленов степени не выше $2n-1=2\cdot 4-1=7$.

Следовательно, корни ортогональных многочленов, равные узлам квадратурной формулы Гаусса (с числом больше четырех), необходимо искать с двойной точностью [6], например с помощью формулы касательных Ньютона, что потребует не менее 250 итерации и более 1000 флопов [4]. В работе построены интегральные квадратурные формулы с равномерным шагом, рациональными узлами и весовыми коэффициентами, т.е. с двойной точностью. Найденные квадратурные формулы имеют алгебраический порядок точности соответственно $n\in\{7,11,15\}$. Полученные интегральные квадратурные формулы в одномерном случае легко могут быть перенесены на двойные и тройные интегралы с сохранением алгебраического порядка точности. В работе построено линейное отображение обобщенных координат с прямоугольника (параллелепипеда) на круг, кольцо, (шар, сферический слой), а квадратурные интегральные формулы в указанных областях имеют тот же алгебраический порядок точности, что и на отрезке.

Немецкая группа математиков из университета города Падерборна (Paderborn) создала пакет программ MuPad Pro 2.5.2, в котором интегралы вычисляются всего с 9 значащими цифрами, т.е. с точностью меньшей, чем точность, достигнутая в данной работе.

1. Составная формула для отрезка, алгебраический порядок точности.

Аппроксимация определенного интеграла квадратурной формулой с непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ имеет вид

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i) + r(f), \tag{1}$$

где $x_i, i = \overline{0,n}$ – узлы квадратурной формулы;

C_i – весовые коэффициенты;

$r(f)$ – погрешность аппроксимации.

Из формулы (1) следует, что $r(f) = \int_a^b f(z)dz - \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$ является линейным оператором относительно функции f как разность линейных операторов. Поэтому если формула (1) точна для всех степенных функций вида $x^j : r\left(x^j\right) = 0,\ j = \overline{0,m}$, то $r(P_m(x)) = 0$ для всех многочленов степени не выше m.

Определение 1. Пусть квадратурная формула (1) точна для всех степенных функций x^k, $k = \overline{0,m}$ включительно, т.е. $r(x^k) = 0,\ k = \overline{0,m}$, тогда говорят, что алгебраический порядок точности интегральной квадратурной формулы (1) равен m.

Определение 2. Пусть алгебраический порядок точности квадратурной формулы (1) равен m, а погрешность $r(f)$ формулы (1) отлична от нуля для степенной функции x^l, $l \ge m+1$, тогда говорят, что порядок погрешности формулы (1) равен l. Другими словами, порядок погрешности формулы (1) – минимальная степень многочлена l, такая, что выполняется неравенство $r(P_l(x)) \ne 0$.

Рассмотрим канонический отрезок [–1,1], на котором в силу симметрии узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля, а весовые коэффициенты симметричных узлов имеют равные значения. Выберем четное число интервалов разбиения $n_0 = 2l$ и нечетное число узлов $2n_0 + 1$ во всех квадратурных формулах $\left(n_0 \in \{6,10,14\}\right)$. В данной работе отрезок [–1,1] разбивается на $n_0 \in \{6,10,14\}$ число равных частей.

Пользуясь формулой (1), определением 1, найдем условия на весовые коэффициенты C_k в квадратурной формуле с равномерным шагом на отрезке [–1,1] (с учетом симметрии):

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_0 + 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k; \\ \int_{-1}^{1} z^{2s} dz = 2/(2s+1) = 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \left(2k/n_0\right)^{2s},\ s = \overline{1, n_0/2}. \end{cases} \tag{2}$$

Решение системы уравнений (2) подставим в квадратурную формулу (1), имеем

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx C_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \left(f(-2k/n_0) + f(2k/n_0) \right),\ x_k = \pm 2k/n_0,\ k = \overline{0, n_0/2}. \tag{3}$$

Сначала разделим отрезок [–1,1] на 6 равных частей, т.е. используем 7 равноотстоящих узлов:

$$x_1 = -1,\ x_2 = -2/3,\ x_3 = -1/3,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1/3,\ x_6 = 2/3,\ x_7 = 1,\ n_0 = 6$$

–1 –2/3 –1/3 0 1/3 2/3 1

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7

C_3 C_2 C_1 C_0 C_1 C_2 C_3

Согласно симметрии и квадратурной формуле (3) ($n_0 = 6$) получим

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx C_0 f(0) + C_1\left(f(-1/3) + f(1/3)\right) + C_2\left(f(-2/3) + f(2/3)\right) + C_3\left(f(-1) + f(1)\right).$$

Подставляя в систему уравнений (2) степенные функции, начиная с нулевой степени, используя только четные степени (для нечетных степеней имеем тривиальные тождества $0 = 0$), запишем следующую систему уравнений:

$$f(z) \equiv 1:\ \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3;$$

$$f(z) = z^2:\ \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3} = \frac{2}{9}C_1 + \frac{8}{9}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 3 = C_1 + 4C_2 + 9C_3;$$

$$f(z) = z^4:\ \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^4 dz = \frac{2}{5} = \frac{2}{81}C_1 + \frac{32}{81}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 81 = 5C_1 + 80C_2 + 405C_3;$$

$$f(z) = z^6:\ \int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} z^6 dz = \frac{2}{7} = \frac{2}{729}C_1 + \frac{128}{729}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 729 = 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3.$$

Значит необходимо решить неоднородную систему 4 линейных уравнений с 4 неизвестными.

$$\begin{cases} C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 3 \\ 5C_1 + 80C_2 + 405C_3 = 81 \\ 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3 = 729 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = \frac{68}{105},\ C_1 = \frac{9}{140},\ C_2 = \frac{18}{35},\ C_3 = \frac{41}{420}. \quad (4)$$

Из формул (3) ($n_0 = 6$) и (4) получим формулу (5)

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx S_f = \frac{68}{105} f(0) + \frac{9}{140}\left(f(-1/3) + f(1/3)\right) + \frac{18}{35}\left(f(-2/3) + f(2/3)\right) + \frac{41}{420}\left(f(-1) + f(1)\right). \quad (5)$$

Проверкой убеждаемся, что коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3 являются решением системы уравнений (4), т.е. по определению 1 для квадратурной формулы (5) алгебраический порядок точности равен семи (с учетом (4) и $\int_{-1}^{1} z^7 dz = 0 = \sum_{k=-3}^{3} C_k \left(2k/6\right)^7 = 0$), следовательно, по определению 2 порядок погрешности для формулы (5) равен 8. В частности, если $f(z) \equiv 1:\ \int_{-1}^{1} f(z)dz = 2 = \frac{68}{105} + 2\left(\frac{9}{140} + \frac{18}{35} + \frac{41}{420}\right)$, то интеграл равен длине отрезка [–1,1]. Учитывая шаг $h = 1/3$, перепишем формулу (5) в виде $\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 3h\sum_{i=0}^{6} C_i f(x_i)$ или в общем случае

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0}. \quad (6)$$

Рассмотрим составную квадратурную формулу для вычисления определенного интеграла, т.е. формула (6) используется k раз на отрезке $[a,b]$, $b - a = kn_0 h$. Шаблон весовых коэффициентов для составной формулы получим из (4) (коэффициенты в смежных узлах удваиваются), например:

$$\left\{\frac{41}{420}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{210}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{420}\right\} \ (n = 12,\ k = 2,\ n_0 = 6).$$

А определенный интеграл на отрезке $[a,b]$ отличается от выражения (6) длиной интервала в $k = n/n_0$ раз.

$$\int_a^b f(z)dz \approx \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0 * k} C_i f(x_i),\ h=\frac{b-a}{n},\ x_i = a+ih,\ i=\overline{0,n}\quad \left(\sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2\right). \tag{7}$$

Для функции $f(z)\equiv 1: \int_a^b f(z)dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0 * k} C_i = \frac{hn_0}{2}2k = hkn_0 = b-a$, т.е. составная формула (7) применима в общем случае. В частности для $n_0 = 6$ коэффициенты C_i для составной формулы определяются алгоритмом

$$\begin{cases} \text{если } j=0 \text{ или } j=n: C_j = \dfrac{41}{420}; \\ \text{если } j\equiv 1 \bmod 6 \text{ или } j \equiv 5 \bmod 6: C_j = \dfrac{18}{35}; \\ \text{если } j\equiv 2 \bmod 6 \text{ или } j \equiv 4 \bmod 6: C_j = \dfrac{9}{140}; \\ \text{если } j\equiv 3 \bmod 6: C_j = \dfrac{68}{105}; \\ \text{если } j\equiv 0 \bmod 6,\ j>0,\ j<n: C_j = \dfrac{41}{210}. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогично формуле (5) можно разбить канонический отрезок [–1,1] на $n_0 = 10$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, и получить решение системы уравнений (2) (для $n_0 = 10$), в которой 6 неизвестных коэффициентов C_0, C_1, C_2, C_3 C_4, C_5 являются решением неоднородной системы $n_0/2+1=6$ линейных уравнений 11-го алгебраического порядка точности:

$$C_0 = \frac{17807}{12474},\ C_1 = -\frac{4825}{5544},\ C_2 = \frac{5675}{6237},\ C_3 = -\frac{16175}{99792},\ C_4 = \frac{26575}{74844},\ C_5 = \frac{16067}{299376}. \tag{9}$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (9) (символьное решение системы (2) для $n_0 = 10$) удовлетворяет (2) с двойной точностью (16 значащих цифр). Занесем в таблицу 1 полученные значения. В левой части таблицы 1 указано точное значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^{1} z^s dz,\ s=\overline{0,12}$, а справа – численное значение правой части системы уравнений (2) – $b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (8) (s – показатель степенной функции).

Таблица 1

$a(0)$ = 2,0000000000000000	$b(0)$ = 2,0000000000000004
$a(1)$ = 0,0000000000000000	$b(1)$ = 0,0000000000000000
$a(2)$ = 0,6666666666666666	$b(2)$ = 0,6666666666666669
$a(3)$ = 0,0000000000000000	$b(3)$ = – 0,0000000000000000
$a(4)$ = 0,4000000000000000	$b(4)$ = 0,4000000000000001
$a(5)$ = 0,0000000000000000	$b(5)$ = – 0,0000000000000000
$a(6)$ = 0,2857142857142857	$b(6)$ = 0,2857142857142858
$a(7)$ = 0,0000000000000000	$b(7)$ = 0,0000000000000000
$a(8)$ = 0,2222222222222222	$b(8)$ = 0,2222222222222223
$a(9)$ = 0,0000000000000000	$b(9)$ = – 0,0000000000000000
$a(10)$ = 0,1818181818181818	$b(10)$ = 0,1818181818181819
$a(11)$ = 0,0000000000000000	$b(11)$ = –0,0000000000000000
$a(12)$ = 0,1538461538461539	$b(12)$ = 0,1554621683809524

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (2) при $n_0 = 10$ равен 11, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 5h\sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i)$, где $5h = 1$, $\sum_{i=0}^{10} C_i = 2$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0,10}$, равен 12 (C_i определяются с помощью (9)).

Из выражения (7) для $n_0 = 10$ получим составную формулу

$$\int_a^b f(z)dz \approx 5h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i),\ h = \frac{(b-a)}{n},\ \ x_i = a + ih,\ n = 10k\ \ \left(\sum_{i=0}^{10} C_i = 2\right), \tag{10}$$

в которой весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом (11)

$$\begin{cases} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n: C_j = \dfrac{16067}{299376}; \\ \text{если } j \equiv 1 \bmod 10 \text{ или } j \equiv 9 \bmod 10: C_j = \dfrac{26575}{74844}; \\ \text{если } j \equiv 2 \bmod 10 \text{ или } j \equiv 8 \bmod 10: C_j = -\dfrac{16175}{99792}; \\ \text{если } j \equiv 3 \bmod 10 \text{ или } j \equiv 7 \bmod 10: C_j = \dfrac{5675}{6237}; \\ \text{если } j \equiv 4 \bmod 10 \text{ или } j \equiv 6 \bmod 10: C_j = -\dfrac{4825}{5544}; \\ \text{если } j \equiv 5 \bmod 10: C_j = \dfrac{17807}{12474}; \\ \text{если } j \equiv 0 \bmod 10,\ j > 0,\ j < n: C_j = \dfrac{16067}{149688}. \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы уравнений (2) (для $n_0 = 14$), соответствующее делению канонического отрезка [–1,1] на 14 равных частей есть

$$\begin{gathered} C_0 = \frac{101741867}{13030875};\ C_1 = -\frac{5600756791}{833976000};\ C_2 = \frac{789382601}{156370500};\ C_3 = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ C_4 = \frac{109420087}{78185250};\ C_5 = -\frac{770720657}{2501928000};\ C_6 = \frac{44436679}{156370500};\ C_7 = \frac{90241897}{2501928000}. \end{gathered} \tag{12}$$

Численно проверим, что весовые коэффициенты (12) – символьное решение системы (2) (для $n_0 = 14$), выполняется с двойной точностью (16 значащих цифр). Значения занесем в таблицу 2.

Таблица 2

a(0) = 2,0000000000000000	b(0) = 2,0000000000000009
a(1) = 0,0000000000000000	b(1) = 0,0000000000000001
a(2) = 0,6666666666666666	b(2) = 0,6666666666666665
a(3) = 0,0000000000000000	b(3) = 0,0000000000000000
a(4) = 0,4000000000000000	b(4) = 0,4000000000000000
a(5) = 0,0000000000000000	b(5) = 0,0000000000000000
a(6) = 0,2857142857142857	b(6) = 0,2857142857142856
a(7) = 0,0000000000000000	b(7) = 0,0000000000000000
a(8) = 0,2222222222222222	b(8) = 0,2222222222222221
a(9) = 0,0000000000000000	b(9) = 0,0000000000000000
a(10) = 0,1818181818181818	b(10) = 0,1818181818181817
a(11) = 0,0000000000000000	b(11) = 0,0000000000000000
a(12) = 0,1538461538461539	b(12) = 0,1538461538461538
a(13) = 0,0000000000000000	b(13) = 0,0000000000000000
a(14) = 0,1333333333333333	b(14) = 0,1333333333333333
a(15) = 0,0000000000000000	b(15) = 0,0000000000000000
a(16) = 0,1176470588235294	b(16) = 0,1179107308149041

Из таблицы 2 видно, что формула $\int_{-1}^{1} f(z)dz \approx 7h\sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i)$, где $7h=1$, $\sum_{i=0}^{14} C_i = 2$, $x_i = -1+ih$, $i=\overline{0,14}$, имеет 15 алгебраический порядок точности и 16 порядок погрешности. Используя формулу (7) для $n_0 = 14$, получим составную формулу при делении отрезка $[a,b]$ на число частей кратное 14:

$$\int_a^b f(z)dz \approx 7h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i),\ h=\frac{(b-a)}{n},\ x_i = a+ih,\ n=14k\ \left(\sum_{i=0}^{14} C_i = 2\right). \tag{13}$$

Весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом:

$$\begin{cases} \text{если } j=0 \text{ или } j=n: C_j = \dfrac{90241897}{2501928000}; \\ \text{если } j\equiv 1\bmod 14 \text{ или } j\equiv 13\bmod 14: C_j = \dfrac{44436679}{156370500}; \\ \text{если } j\equiv 2\bmod 14 \text{ или } j\equiv 12\bmod 14: C_j = -\dfrac{770720657}{2501928000}; \\ \text{если } j\equiv 3\bmod 14 \text{ или } j\equiv 11\bmod 14: C_j = \dfrac{109420087}{78185250}; \\ \text{если } j\equiv 4\bmod 14 \text{ или } j\equiv 10\bmod 14: C_j = -\dfrac{6625093363}{2501928000}; \\ \text{если } j\equiv 5\bmod 14 \text{ или } j\equiv 9\bmod 14: C_j = \dfrac{789382601}{156370500}; \\ \text{если } j\equiv 6\bmod 14 \text{ или } j\equiv 8\bmod 14: C_j = -\dfrac{5600756791}{833976000}; \\ \text{если } j\equiv 7\bmod 14: C_j = \dfrac{101741867}{13030875}; \\ \text{если } j\equiv 0\bmod 14,\ j>0,\ j<n: C_j = \dfrac{90241897}{1250964000}. \end{cases} \tag{14}$$

Докажем следующее утверждение:

Лемма. Пусть дана функция $f(x)\in C^{(n_0+2)}[a,b]$ и составная квадратурная формула (1) с равномерным шагом точна для всех многочленов степени равной $n_0 \in \{6,10,14\}$, то есть выполнено условие (формула (7)):

$$\int_{-H}^{H} z^t dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{\,t},\ t=\overline{0,n_0}\ , \tag{15}$$

$$c=(a+b)/2,\ x=z+c,\ dx=dz,\ h=(b-a)/n,\ H=(b-a)/2,\ x\in[a,b],\ z\in[-H,H]$$

$$x_i = c+z_i,\ x_i = a+i(b-a)/n = a+ih,\ i=\overline{0,n}.$$

где c – середина отрезка $[a,b]$;

Тогда порядок погрешности $r(f)$ составной формулы равен (n_0+2), другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0+1\in\{7,11,15\}$.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$, $f(x)\in C^{(n_0+2)}[a,b]$, в ряд Тейлора с центром в точке $x=c$:

$$f(c+z) = \sum_{k=0}^{n_0}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}z^k + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!}z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!}z^{n_0+2} + O\left(z^{n_0+3}\right),\ |z|\le H.$$

Покажем, что из условия (15) следует

$$\int_a^b x^t dx = \left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^{\,t} = \left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^{\,t},\ t=\overline{0,n_0}.$$

$$\int_a^b x^t dx - \left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^{\,t} = \int_{-H}^{H}(z+c)^t dz - \left(\frac{hn_0}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} C_i\,(c+z_i)^t = \sum_{s=0}^{t} C_t^s c^{t-s}\left(\int_{-H}^{H} z^s dz - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{\,s}\right) = 0,$$

$\forall t=\overline{0,n_0},\ \forall s=\overline{0,t},$

т.е. из системы уравнений (14) следует $\int_a^b x^t dx = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^{\,t},\ t=\overline{0,n_0}$ (параллельный перенос системы координат не изменяет алгебраического порядка точности квадратурной формулы), где $C_t^s = t!/s!(t-s)!$ – биноминальный коэффициент.

$$\left|r(f)\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)\right| = \left|\int_{-H}^{H}\left(\sum_{t=0}^{n_0}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}z^t + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!}z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!}z^{n_0+2} + O\left(H^{n_0+4}\right)\right)dz - \right.$$

$$\left. - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i\left(\sum_{t=0}^{n_0}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}z_i^{\,t} + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!}z_i^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!}z_i^{n_0+2} + O\left(H^{n_0+4}\right)\right)\right| = \left|\sum_{t=0}^{n_0}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}\left(\int_{-H}^{H} z^t dz - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{\,t}\right) + \right.$$

$$\left. - \sum_{t=n_0+1}^{n_0+2}\frac{f^{(t)}(c)}{t!}\left(\int_{-H}^{H} z^t dz - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{\,t} + O\left(H^{n_0+4}\right)\right)\right| = \frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!}\left|\frac{2H^{n_0+3}}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{n_0+2} + O\left(H^{n_0+4}\right)\right|.$$

$$\left|r(f)\right| \le \frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!}H^{n_0+3}\left|\frac{2}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2H}\sum_{i=0}^{n} C_i\left(\frac{z_i}{H}\right)^{n_0+2} + O(H)\right|,\quad \left|\frac{z_i}{H}\right| \le 1. \qquad (16)$$

В формуле (16) учтены равенства в силу соотношений:

$$\int_{-H}^{H} z^{n_0+1}dz = 0,\ \sum_{i=0}^{n} C_i z_i^{n_0+1} = 0,\ C_{n/2-j} = C_{n/2+j},\ z_{n/2-j} = -z_{n/2+j},\ z_{n/2} = 0,\ j = \overline{-n/2, n/2}$$

$$z_i = \left(\frac{i-n/2}{n/2}\right)H = \frac{2j}{n}H,\ i=\overline{0,n},\ j = i-n/2,\ j=\overline{-n/2,n/2},\ i=\overline{0,n},\ \left|z_i\right| \le H.$$

В формуле (16) последний множитель представляет собой многочлен степени n_0+2, которая определяет порядок погрешности $\left|r(f)\right|$ составной формулы согласно определению 2, другими словами, алгебраический порядок точности равен $n_0+1 = 7,\ 11,\ 15$ согласно определению 1.

Лемма доказана.

Формулу (16) можно преобразовать и упростить, поскольку выражение

$$\frac{2}{n_0+3} \approx \sum_{i=0}^{n_0} C_i\left(\frac{z_i}{H}\right)^{n_0+2}\ (k=1)$$

справедливо с точностью до 3 знаков (как видно из таблицы 2 в случае $s=16$ $a(16)$ и $b(16)$ отличаются в четвертой значащей цифре, а из таблицы 1 в случае $s=12$ $a(12)$ и $b(12)$ – в третьей значащей цифре). Поэтому для (16) справедливо

$$\left|r(f)\right| \le \frac{\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+2)!}H^{n_0+3}\left|\frac{2}{n_0+3} + O(H)\right| = \frac{2\left|f^{(n_0+2)}(c)\right|}{(n_0+3)!}H^{n_0+3} + O\left(H^{n_0+4}\right).$$

С другой стороны, суммирование на $n = kn_0$ узлах эквивалентно взятию k интегралов на интервалах длиной $b_j - a_j = \dfrac{b-a}{k}$, $j = \overline{1,k}$. Обозначим среднее значение производной $\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|} = \dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f^{(n_0+2)}\left(\dfrac{a_j+b_j}{2}\right) \approx \left(\dfrac{1}{b-a}\right)\int_a^b f^{(n_0+2)}(x)dx$. Тогда имеет место оценка

$$\left|r(f)\right|^{[a,b]} \le k\left|r(f)\right|^{[a_j,b_j]} \le \frac{k}{(n_0+2)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|}\frac{2}{(n_0+3)}\left(\frac{b-a}{2k}\right)^{n_0+3} = \frac{1}{k^{n_0+2}}\frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|}. \quad (17)$$

Нас будет интересовать порядок погрешности составной квадратурной формулы и двойная точность относительной погрешности результата интегрирования (16 значащих цифр).

Вычислим определенный интеграл:

$$\int_0^2 \exp(2x)dx = (\exp(4)-1)/2 = 26.79907501657212 \ .$$

При $N = 28$, $k = 2$ написанная нами программа с использованием формул (13), (14) возвращает значения ($epsilon \equiv (\text{int}1 - exact)/exact$):

$int1$ = 26.79907501657214 $exact$ = 26.79907501657212 $delta$ = – 0.00000000000002 = $-2\cdot 10^{-14}$
$epsilon$ = – 0,0000000000000008.

Снова оценим погрешность составной интегральной квадратуры по формуле (17), в которой $n_0 = 14,\ k = 2,\ a = 0,\ b = 2,\ n = kn_0 = 28,\ h = (b-a)/n = 2/28 = 1/14$ для интеграла $\int_0^2 \exp(2x)dx$:

$$\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|} = \left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f^{(n_0+2)}(x)dx = \left(\frac{1}{2-0}\right)\int_0^2 \left(\exp(2x)\right)2^{(16)}dx = \frac{\left(\exp(4)-1\right)}{4}2^{16},$$

$$\left|r(f)\right| \le \frac{1}{k^{n_0+2}}\frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!}\overline{\left|f^{(n_0+2)}\right|} = \frac{2^{17}}{2^{16}17!}\frac{\left(\exp(4)-1\right)}{4} = 7{,}5\cdot 10^{-14}.$$

Видно, что $\left|r(f)\right|$ дает хорошее приближение $\left|delta\right|$ с избытком. Поэтому имея двойную точность с помощью (17), тем более будет достигнуто численное значение интеграла с двойной точностью. Программой также получена двойная точность, т.к. $\left|epsilon\right| = 8\cdot 10^{-16}$.

2. Построение двумерных и трехмерных алгоритмов

Для построения двумерных и трехмерных квадратурных интегральных формул рассмотрим сначала случай функций с разделяющимися переменными.

1) Пусть $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, воспользуемся дважды составной формулой (7) для определенного интеграла функции одной переменной:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy \approx \frac{h_1 n_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0*k} C_i f_1(x_i)\frac{h_2 n_0}{2}\sum_{j=0}^{n_0*k} C_j f_2(y_j) =$$

$$= \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k} C_i C_j f_1(x_i)f_2(x_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0\cdot k} C_{i,j} f\left(x_i, y_j\right). \quad (18)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j,\ f\left(x_i,y_j\right) = f_1\left(x_i\right)f_2\left(y_j\right),\ x_i = a + ih_1,\ y_j = c + jh_2,\ h_1 = \frac{b-a}{n},\ h_2 = \frac{d-c}{n},\ i,j = \overline{0,n}.$$

2) Пусть $(x,y,z)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, воспользуемся трижды составной формулой (7) для определенного интеграла функции одной переменной:

$$f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z),\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_e^f f_3(z)dz\approx$$

$$\approx\frac{h_1n_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}C_i f_1(x_i)\frac{h_2n_0}{2}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k}C_j f_2(y_j)\frac{h_3n_0}{2}\sum_{s=0}^{n_0\cdot k}C_s f_3(z_s)=\frac{h_1h_2h_3n_0^3}{8}\sum_{i=0}^{n_0\cdot k}\sum_{j=0}^{n_0\cdot k}\sum_{s=0}^{n_0\cdot k}C_iC_jC_s f_1(x_i)f_2(y_j)f_3(z_s)=$$

$$=\frac{h_1h_2h_3n_0^3}{8}\sum_{i,j,s=0}^{n_0\cdot k}C_{i,j,s}f(x_i,y_j,z_s) \qquad (19)$$

где $C_{i,j,s}=C_iC_jC_s$;

$$f\left(x_i,y_j,z_s\right)=f_1\left(x_i\right)f_2\left(y_j\right)f_3\left(z_s\right),\ x_i=a+ih_1,\ y_j=c+jh_2,\ z_s=e+sh_3,\ h_1=\frac{b-a}{n},\ h_2=\frac{d-c}{n},$$

$i,h_3=\dfrac{d-c}{n},\ i,j,s=\overline{0,n}.$

Формулы (20) – (22) получим подстановкой в (18) n_0 = 6, 10, 14 соответственно:

1) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 9h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right), \qquad (20)$$

где C_i, C_j – весовые коэффициенты, определяемые формулой (8); $C_{i,j}=C_iC_j$; $x_i=a+h_1\cdot i$,

$y_j=c+h_2\cdot j$; $i,j=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$;

2) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 25h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right), \qquad (21)$$

где C_i,C_j – весовые коэффициенты, определяемые формулой (11); $C_{i,j}=C_iC_j$; $x_i=a+h_1\cdot i$,

$y_j=c+h_2\cdot j$; $i,j=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$;

3) $$I_2=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\approx 49h_1h_2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}f\left(x_iy_j\right), \qquad (22)$$

где C_i,C_j – весовые коэффициенты, определяемые формулой (14); $C_{i,j}=C_iC_j$; $x_i=a+h_1\cdot i$,

$y_j=c+h_2\cdot j$; $i,j=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$;

Формулы (23) – (25)получим подстановкой в (19) n_0 = 6, 10, 14 соответственно:

4) $$I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz\approx 27h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}f\left(x_iy_jz_k\right), \qquad (23)$$

где C_i,C_j,C_k – весовые коэффициенты, определяемые формулой (8); $C_{i,j,k}=C_iC_jC_k$; $x_i=a+h_1\cdot i$,

$y_j=c+h_2\cdot j$, $z_k=c+h_3\cdot k$; $i,j,k=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$, $h_3=\dfrac{(f-e)}{n}$;

5) $$I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \approx 125 h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}\,f\left(x_iy_jz_k\right), \quad (24)$$

где C_i, C_j, C_k – весовые коэффициенты, определяемые формулой (11); $C_{i,j,k}=C_iC_jC_k$; $x_i=a+h_1\cdot i$, $y_j=c+h_2\cdot j$, $z_k=c+h_3\cdot k$; $i,j,k=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$, $h_3=\dfrac{(f-e)}{n}$;

6) $$I_3=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \approx 343 h_1h_2h_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{i,j,k}\,f\left(x_iy_jz_k\right), \quad (25)$$

где C_i, C_j, C_k – весовые коэффициенты, определяемые формулой (14) $C_{i,j,k}=C_iC_jC_k$; $x_i=a+h_1\cdot i$, $y_j=c+h_2\cdot j$, $z_k=c+h_3\cdot k$; $i,j,k=\overline{0,n}$; $h_1=\dfrac{(b-a)}{n}$, $h_2=\dfrac{(d-c)}{n}$, $h_3=\dfrac{(f-e)}{n}$.

Теорема 1. Формульные пары (20)–(8); (21)–(11); (22)–(14); (23)–(8); (24)–(11); (25)–(14) справедливы для любой функции $f(x,y)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])$ $\left(f(x,y,z)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])\times[-1,1]\right)$, необязательно с разделяющимися переменными. Порядок погрешности двумерной (трехмерной) интегральной квадратурной формулы совпадает с порядком погрешности одномерной квадратурной формулы (равен 7, 11, 15 соответственно для алгоритмов (8), (11), (14)).

Доказательство проведем в два этапа:

Утверждение 1. Для двойного интеграла на каноническом квадрате и $\forall f(x,y)\in C([-1,1]\times[-1,1])$ и тройного интеграла на каноническом кубе для $\forall f(x,y,z)\in C([-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1])$ равноудаленные от центра точки имеют равные весовые коэффициенты.

Не теряя общности, доказательство рассмотрим для двумерного случая. Выберем каноническую область – квадрат $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ со стороной 2.

1.1. Сделаем линейную замену переменных $x'\Big|_{-1}^{1}=y\Big|_{-1}^{1}$, $y'\Big|_{-1}^{1}=x\Big|_{-1}^{1}$; $dx'=dy$; $dy'=dx$ в интеграле

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(y',x')dy'dx'=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(y',x')dx'dy'\approx\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}\,f\left(x_i,y_j\right)=\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{j,i}\,f\left(y_j,x_i\right).$$

Последняя формула означает инвариантность интеграла от произвольной функции при зеркальном отражении канонического квадрата относительно прямой $y=x$. Что в свою очередь для $f\left(x_i,y_j\right)\equiv1$ приводит к симметрии (равенству) весовых коэффициентов $C_{j,i}=C_{i,j}, i,j=\overline{0,n_0}$.

1.2. Рассмотрим инверсию канонического квадрата относительно центра (поворот на 180°), сделав следующую линейную замену переменных : $x'\Big|_{-1}^{1}=-x\Big|_{1}^{-1}$, $y'\Big|_{-1}^{1}=-y\Big|_{1}^{-1}$; $dx'=-dx$; $dy'=-dy$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-x',-y')d(-x')d(-y')=\int_{1}^{-1}\int_{1}^{-1}f(-x',-y')dx'dy'=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(-x',-y')dx'dy'\approx\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}\,f\left(x_i,y_j\right)=\frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0}C_{n_0-i,n_0-j}\,f\left(x_{n_0-i},y_{n_0-j}\right).$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на 180° (преобразование инверсии), а в случае $f\left(x_i,y_j\right)\equiv1$ для интегральных сумм $C_{i,j}=C_{n_0-i,n_0-j}$, $i,j=\overline{0,n_0}$.

1.3. Рассмотрим поворот канонического квадрата на 90° при линейной замене переменных: $x'\Big|_{-1}^{1} = y\Big|_{-1}^{1}$, $y'\Big|_{1}^{-1} = -x\Big|_{-1}^{1}$; $dx' = dy$; $dy' = -dx$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(-y',x')d\left(-y'\right)dx' = -\int_{1}^{-1}\int_{-1}^{1} f(-y',x')dy'dx' = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(-y',x')dy'dx' =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(-y',x')d\left(x'\right)dy' \approx \frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f\left(x_i,y_j\right) = \frac{h_1h_2n_0^2}{4}\sum_{i,j=0}^{n_0} C_{n_0-j,i} f\left(y_{n_0-j},x_i\right).$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на 90°, а в случае $f\left(x_i,y_j\right)\equiv 1$ для интегральных сумм $C_{i,j} = C_{n_0-j,i}$, $i,j=\overline{0,n_0}$.

На целочисленной решетке с координатами $\left(x_i,y_j\right)$ квадрат с фиксированным расстоянием до центра есть $x_i^2+y_j^2=\text{const}$, поэтому решением этого же уравнения будут пары чисел:

$$\left(x_i,y_j\right),\left(-x_i,y_j\right),\left(x_i,-y_j\right),\left(-x_i,-y_j\right),\left(y_j,x_i\right),\left(y_j,-x_i\right),\left(-y_j,x_i\right),\left(-y_j,-x_i\right).$$

Последние 4 пары отличаются от первых четырех преобразованием симметрии **1.1**. Первая и четвертая пары, а также вторая и третья отличаются друг от друга преобразованием инверсии **1.2**. Наконец, первая и шестая пары совмещаются поворотом относительно центра на 90° (преобразование **1.3**). Следовательно, в силу преобразований **1.1 – 1.3** весовые коэффициенты на всех восьми (или четырех) указанных точках имеют равные значения.

Доказанное **утверждение 1** справедливо независимо от вида алгоритма построения весовых коэффициентов (8), (11), (14).

Утверждение 2. Квадратурные интегральные формулы (18) для двойного интеграла и (19) для тройного интеграла справедливы для произвольной функции $f\left(x,y\right)\in C^{n_0+2}\left([-1,1]\times[-1,1]\right)$ (не обязательно с разделяющимися переменными). Порядок погрешности в двойной интегральной квадратурной формуле (18) и в тройной (19) тот же, что и в одномерной квадратурной формуле (7).

Доказательство, например, проведем для двойного интеграла в простейшем случае $n_0=6$.

На каноническом квадрате $\left(x,y\right)\in[-1,1]\times[-1,1]$ с равномерной сеткой для случая $n_0=6$ имеем $\left(n_0+1\right)^2=49$ узлов (соответственно 49 весовых коэффициентов $C_{i,j}, i,j=\overline{0,n_0}$). Квадратурная формула для двойного интеграла (аналог (6)) имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \overline{C_0} f\left(0,0\right) + \overline{C_1}\left(f\left(-\frac{1}{3},0\right) + f\left(\frac{1}{3},0\right) + f\left(0,-\frac{1}{3}\right) + f\left(0,\frac{1}{3}\right)\right) + \overline{C_2}\left(f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) +\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right) + \overline{C_3}\left(f\left(-\frac{2}{3},0\right) + f\left(\frac{2}{3},0\right) + f\left(0,-\frac{2}{3}\right) + f\left(0,\frac{2}{3}\right)\right) + \overline{C_4}\left(f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) +\right.$$
$$+ f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) + \left. f\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right) + \overline{C_5}\left(f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) +\right. \qquad (26)$$
$$\left. + f\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right) + \overline{C_6}\left(f\left(0,1\right) + f\left(0,-1\right) + f\left(-1,0\right) + f\left(1,0\right)\right) + \overline{C_7}\left(f\left(\frac{1}{3},1\right) + f\left(1,\frac{1}{3}\right) + f\left(1,-\frac{1}{3}\right) +\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{1}{3},-1\right) + f\left(-\frac{1}{3},-1\right) + f\left(-1,-\frac{1}{3}\right) + f\left(-1,\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3},1\right)\right) + \overline{C_8}\left(f\left(\frac{2}{3},1\right) + f\left(1,\frac{2}{3}\right) + f\left(1,-\frac{2}{3}\right) +\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{2}{3},-1\right) + f\left(-1,-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3},-1\right) + f\left(-\frac{2}{3},1\right) + f\left(-1,\frac{2}{3}\right)\right) + \overline{C_9}\left(f(1,1) + f(1,-1) + f(-1,-1) + f(-1,1)\right).$$

В формуле (26) согласно **утверждению 1** сгруппированы с одинаковым весом все узлы, равноудаленные от центра канонического квадрата $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ (как видно из формулы (26), число таких узлов 4 либо 8, за исключением центра).

Аналогично одномерной интерполяционной задаче (2) можно поставить двумерную на каноническом квадрате и трехмерную на каноническом кубе задачи интерполяции:

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}dxdy=\sum\limits_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}=4;\\ \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^{2s}y^{2l}dxdy=\sum\limits_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}x_i^{2s}y_j^{2l},2s+2l\in\overline{0,n_0}.\end{cases}\qquad(27)$$

В формуле (27) $f(x,y)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])$ используется множество линейно независимых степенных функций двух переменных $\left\{1,x,y,x^2,xy,y^2,...,x^{n_0},x^{n_0-1}y,...,xy^{n_0-1},y^{n_0}\right\}$. Здесь n_0 – алгебраический порядок точности квадратурной формулы (27). Из-за симметрии, как и в задаче (2), нетривиальные условия для коэффициентов выполняются, если степени x,y четные. Используя формулу (26), запишем их:

1) $f(x,y)\equiv 1$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}dxdy=4=\sum\limits_{i,j=0}^{n_0}C_{i,j}=\overline{C_0}+4\overline{C_1}+4\overline{C_2}+4\overline{C_3}+8\overline{C_4}+4\overline{C_5}+4\overline{C_6}+8\overline{C_7}+8\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

2) $f(x,y)=x^2$ (для $f(x,y)=x^2$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^2dxdy=\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\overline{C_1}+\frac{4}{9}\overline{C_2}+\frac{8}{9}\overline{C_3}+\frac{20}{9}\overline{C_4}+\frac{16}{9}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{40}{9}\overline{C_7}+\frac{52}{9}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

3) $f(x,y)=x^4$ (для $f(x,y)=y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^4dxdy=\frac{4}{5}=\frac{2}{81}\overline{C_1}+\frac{4}{81}\overline{C_2}+\frac{32}{81}\overline{C_3}+\frac{68}{81}\overline{C_4}+\frac{64}{81}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{328}{81}\overline{C_7}+\frac{388}{81}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

4) $f(x,y)=x^2y^2$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^2y^2dxdy=\frac{4}{9}=\frac{4}{81}\overline{C_2}+\frac{32}{81}\overline{C_4}+\frac{64}{81}\overline{C_5}+\frac{8}{9}\overline{C_7}+\frac{32}{9}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

5) $f(x,y)=x^6$ (для $f(x,y)=y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^6dxdy=\frac{4}{7}=\frac{2}{3^6}\overline{C_1}+\frac{4}{3^6}\overline{C_2}+\frac{128}{3^6}\overline{C_3}+\frac{260}{3^6}\overline{C_4}+\frac{256}{3^6}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{2920}{3^6}\overline{C_7}+\frac{3172}{3^6}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

6) $f(x,y)=x^4y^2$ (для $f(x,y)=x^2y^4$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^4y^2dxdy=\frac{4}{15}=\frac{4}{3^6}\overline{C_2}+\frac{80}{3^6}\overline{C_4}+\frac{256}{3^6}\overline{C_5}+\frac{360}{3^6}\overline{C_7}+\frac{1872}{3^6}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

7) $f(x,y)=x^8$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}x^8dxdy=\frac{4}{9}=\frac{2}{3^8}\overline{C_1}+\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{512}{3^8}\overline{C_3}+\frac{1028}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+2\overline{C_6}+\frac{26248}{3^8}\overline{C_7}+\frac{27268}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

8) $f(x,y)=x^6y^2$ (для $f(x,y)=x^2y^6$ в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^6y^2dxdy=\frac{4}{21}=\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{272}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+\frac{2952}{3^8}\overline{C_7}+\frac{13968}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9};$$

9) $f(x,y)=x^4y^4$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4y^4dxdy=\frac{4}{25}=\frac{4}{3^8}\overline{C_2}+\frac{128}{3^8}\overline{C_4}+\frac{1024}{3^8}\overline{C_5}+\frac{648}{3^8}\overline{C_7}+\frac{1296}{3^8}\overline{C_8}+4\overline{C_9}.$$

Если верно **утверждение 2** с формулой весов $C_{i,j}=C_iC_j$, $i,j=\overline{0,n_0}$ и сохранением алгебраического порядка точности, таким же как и в одномерном случае (равен 7 для $n_0=6$), то условия 1) – 6) должны выполняться тождественно, а условия 7) – 9) имеют погрешность. Учитывая (8), получим

$$\begin{gathered}\overline{C_0}=C_3C_3=\left(\frac{68}{105}\right)^2=\frac{4624}{11025};\ \overline{C_1}=C_3C_4=\frac{68}{105}\frac{9}{140}=\frac{612}{14700};\ \overline{C_2}=C_4C_4=\left(\frac{9}{140}\right)^2=\frac{81}{19600};\\ \overline{C_3}=C_3C_5=\frac{68}{105}\frac{18}{35}=\frac{1224}{3850};\ \overline{C_4}=C_4C_5=\frac{9}{140}\frac{18}{35}=\frac{162}{4900};\ \overline{C_5}=C_5C_5=\left(\frac{18}{35}\right)^2=\frac{324}{1225};\\ \overline{C_6}=C_3C_6=\frac{68}{105}\frac{41}{420}=\frac{2788}{44100};\ \overline{C_7}=C_4C_6=\frac{9}{140}\frac{41}{420}=\frac{369}{58800};\\ \overline{C_8}=C_5C_6=\frac{18}{35}\frac{41}{420}=\frac{738}{14700};\ \overline{C_9}=C_6C_6=\left(\frac{41}{420}\right)^2=\frac{1681}{176400}.\end{gathered}\tag{28}$$

Подставим весовые коэффициенты (28) $\overline{C_i}$, $i=\overline{0,9}$ в интегральную квадратурную формулу (26) для двойного интеграла от произвольной непрерывной функции $f(x,y)$, проверяя справедливость $C_{i,j}=C_iC_j$, $i,j=\overline{0,n_0}$. Результаты проверки собраны в таблице 3.

Таблица 3

$f(x,y)\equiv 1$	num(1) = 3,9999999999999996	exact(1) = 4,0000000000000000
$f(x,y)=x^2$	num(2) = 1,3333333333333333	exact(2) = 1,3333333333333333
$f(x,y)=x^4$	num(3) = 0,4444444444444444	exact(3) = 0,4444444444444444
$f(x,y)=x^2y^2$	num(4) = 0,7999999999999999	exact(4) = 0,8000000000000000
$f(x,y)=x^6$	num(5) = 0,5714285714285714	exact(5) = 0,5714285714285714
$f(x,y)=x^4y^2$	num(6) = 0,2666666666666666	exact(6) = 0,2666666666666667
$f(x,y)=x^8$	num(7) = 0,4707818930041152	exact(7) = 0,4444444444444444
$f(x,y)=x^6y^2$	num(8) = 0,1904761904761905	exact(8) = 0,1904761904761905
$f(x,y)=x^4y^4$	num(9) = 0,0905820105820106	exact(9) = 0,1600000000000000

В первом столбце указана функция, во втором – численное значение правой части (26), в третьем – точное значение интеграла от указанной функции (левая часть формулы (26)). Из таблицы 3 видно, что квадратурная интегральная формула (26) имеет *седьмой алгебраический порядок точности* по **определению 2** (учитывая тривиальное тождество 0 = 0 для функции $f(x,y)=x^ly^s$, $l+s=7$ (27)).

Нами показано на пересечении пространств $f(x,y)\in C^{n_0+2}([-1,1]\times[-1,1])$, что с использованием тождества $C_{i,j}=C_iC_j$, $i,j=\overline{0,n_0}$ ($n_0=6$) двухмерная квадратурная формула (26) имеет седьмой алгебраический порядок точности для произвольной функции и этот порядок совпадает с порядком одномерной формулы.

Замечание. Из квадратурных формул для двойных (18) и тройных (19) интегралов и функций с разделяющимися переменными следует равенство алгебраических порядков точности квадратурных формул с учетом $C_{i,j} = C_i C_j (C_{i,j,s} = C_i C_j C_s)$, $i, j, s = \overline{0, n_0}$ алгебраическому порядку точности одномерной квадратурной формулы (7).

Действительно, перемножая интегральные суммы, точные для многочленов степени m, получим двойные или тройные интегральные суммы точные для многочленов того же порядка.

Проверим численно, что алгоритмы 1) – 6) для кратных интегралов сохраняют такой же алгебраический порядок точности, как и в однократном интеграле, используя в программе формулы (20), (8) для тройного интеграла:

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 e^x y^4 z^5 dxdydz = \frac{y^5 z^6}{30}\left(e^x - 1\right)\Big|_0^2 = \left(e^2 - 1\right)\frac{2^{11}}{30} = 436{,}1595630203324 \text{ (16 значащих цифр).}$$

Для небольших N численно получим:

1) если $N = 18$, программа возвращает значение *epsilon* = 0,0000000000245057,

int 3 = 436,1595630310208100, *exact* = 436,1595630203324300, *delta* = 0,0000000106883;

2) если $N = 36$, программа возвращает значение *epsilon* = 0,0000000000000989,

int 3 = 436,1595630203755700, *exact* = 436,1595630203324300, *delta* = 0,0000000000431.

Определим порядок погрешности формул (20), (8). При уменьшении шага сетки в 2 раза погрешность уменьшится в 256 раз, т.к.

$$\left|\frac{delta_2}{delta_1}\right| = \frac{0{,}0000000106883}{0{,}0000000000431} = 248 \approx 256 = 2^8,$$

т.е. порядок погрешности равен 8 (согласно определению 2).

3. Интерполяция интегралов в полярной и сферической системах координат.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщенных координат – полярных в кольце (круге) на прямоугольник в декартовой системе координат, сохраняющее площади фигур и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$b = r_2 - r_1,\ a = \pi\left(r_2 + r_1\right),$$

где r_2, r_1 – внешний и внутренний радиусы кольца;

a, b – стороны прямоугольника.

Тогда площадь кольца $S = ab = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$, где $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$,

$$\frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi},\quad y = r - r_1,\ dx = \frac{a}{2\pi}d\varphi,\ dy = dr,\ h_1 = \frac{\pi\left(r_2 + r_1\right)}{n},\ h_2 = \frac{\left(r_2 - r_1\right)}{n}.$$

При таком отображении оба берега разреза кольца вдоль радиуса $\varphi = 0 \to x = 0;\ \varphi = 2\pi \to x = a$ переходят в вертикальные стороны прямоугольника, внутренняя и внешняя окружности $r_1 = \text{const} \to y = 0; r_2 = \text{const} \to y = r_2 - r_1$ переходят в горизонтальные стороны прямоугольника.

По теореме 4 [5, с. 282] отображение $\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right)$ должно обладать следующими свойствами:

якобиан замены координат $\dfrac{D\left(x, y\right)}{D\left(r,\varphi\right)} = \begin{vmatrix} x_r, x_\varphi \\ y_r, y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{a}{2\pi} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dfrac{a}{2\pi} \ne 0$ во всех точках рассматриваемой области;

частные производные $x_r, x_\varphi, y_r, y_\varphi$ непрерывны во всех точках области; отображение $\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right)$ взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщенных координат. Все требования выполнены, если область интегрирования – кольцо ($r_1 \ne 0$). В случае круга ($r_1 = 0$) удовлетворены первые 2 требования из трех. Третье – неоднозначность отображения в точке $r_1 = 0$ – не выполнено, что в данном интеграле несущественно, так как мера интеграла в полярных координатах в окрестности указанной точки $dI_2 = f\left(r,\varphi\right) r dr d\varphi = f\left(0,\varphi\right) 0 dr d\varphi = 0$.

$$I_2=\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)rdrd\varphi=\int_0^b\int_0^a f\left(y+r_1,\frac{2\pi}{a}x\right)(y+r_1)dy\frac{2\pi}{a}dx=\frac{2\pi}{a}\int_0^{(r_2-r_1)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(y+r_1,\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+y)dydx=$$

$$=\frac{2\pi}{\pi(r_2+r_1)}\int_0^{(r_2-r_1)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(y+r_1,\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+y)dydx=\frac{2}{(r_2+r_1)}\int_0^{(r_2-r_1)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(y+r_1,\frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+y)dydx\approx \quad (29)$$

$$\approx\frac{2}{(r_2+r_1)}\frac{n_0h_1}{2}\frac{n_0h_2}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}C_{i,j}\,f\left(r_1+y_j,\frac{2\pi}{a}x_i\right)(r_1+y_j)=\frac{n_0{}^2h_1h_2}{2(r_2+r_1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}C_{i,j}\,f\left(r_1+jh_2,\frac{2\pi}{a}ih_1\right)(r_1+jh_2).$$

Рассмотрим пример (ответ запишем 16 значащими цифрами):

$$\int_0^{10}\int_0^{2\pi} r^8\sin^2(\varphi)rdrd\varphi=\left.\frac{r^{10}}{10}\right|_0^{10}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=10^9\left(\pi-\left.\frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{2\pi}\right)=10^9\pi=3141592653{,}589793.$$

Программа для двойных интегралов в полярной системе координат с учетом формул (29), (14): при $n_1=5,\ r_1=0{,}0,\ r_2=10{,}0$ возвращает значения (в программе $N\equiv n$):

n = 14 *k* = 1 *numerical* = 3141521192,673302 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = 71460.916492 *n* = 14
epsilon (14) = 0,0000227467161950
n = 28 *k* = 2 numerical = 3141592655,167346 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = –1,577553 *n* = 28
epsilon (28) = –0,0000000005021507
n = 42 *k* = 3 *numerical* = 3141592653,589776 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = 0,000017 *n* = 42
epsilon (42) = 0,0000000000000055
n = 56 *k* = 4 *numerical* = 3141592653,589798 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = –0,000005 *n* = 56
epsilon (56) = –0,0000000000000015
n = 70 *k* = 5 *numerical* = 3141592653,589792 *exact* = 3141592653.589793 *delta* = 0.000001 *n* = 70
epsilon (70) = 0,0000000000000005
v (1) = 3141521192,673302
v (2) = 3141592653,589776
v (3) = 3141592653,589792
v (4) = 3141592653,589798
v (5) =3141592655,167346
result: *k* (*opt*) = 5 *epsilon* (5) = –0,0000000000000005
int (*polar*) = 3141592653,589792 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = –0,000001.

Мы видим, что значение интеграла в круге $r_1=0,\ r_2=10$ достигает двойной точности *epsilon* = $-5\cdot10^{-16}$ и $n=70$. Часто на практике неизвестно точное значение интеграла, например, оно не может быть выражено через элементарные функции. Поэтому в программе использован алгоритм медианной фильтрации, позволяющий из нескольких значений интеграла при малых параметрах $N=14k$ выбрать значение с наименьшей относительной ошибкой, соответствующее центральному элементу окна фильтра (элемент массива $v[(n_1+1)/2],\ n_1=5$), что видно по результату программы. Медианная фильтрация применима здесь благодаря знакопеременности относительной погрешности *epsilon* [7]. Получаемая численная погрешность не является случайной величиной и повторяет свое значение при запуске программы. Оптимальное значение числа узлов $k(opt)$ с наименьшей относительной ошибкой может быть найдено предварительно и фиксироваться в цикле при вычислении нескольких тысяч интегралов. В алгоритме (14) мы видим рациональные весовые коэффициенты с 10 значащими цифрами, тогда используя формулы (22), (25) получим произведение весовых коэффициентов с 20 и 30 значащими цифрами соответственно. Распространенные компиляторы обеспечивают только двойную точность (16 значащих цифр) относительной погрешности *epsilon*. Использование компиляторов с 32 значащими цифрами обеспечит эффективное применение алгоритма (14) без потери точности. Оценим порядок точности в (22), (14) по первым 2 значениям *delta*:

$$\left|\frac{delta(14)}{delta(28)}\right|=\left|\frac{71460{,}916492}{-1{,}577553}\right|=45300\approx 2^{16}=65536,\ ,$$

т.е. погрешность пары (25) и (13) имеет тот же 16-й порядок, что и порядок погрешности интегральных квадратур 15-го алгебраического порядка точности на отрезке и прямоугольнике, согласно замечанию 3 леммы, но примененным уже в полярной системе координат.

Рассмотрим пример (ответ запишем 16 значащими цифрами):

$$\int_5^{10}\int_0^{2\pi} r^8 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \pi \frac{r^{10}}{10}\Bigg|_5^{10} = \pi\left(10^{10} - 5^{10}\right)/10 = 3138524692{,}01402.$$

Для параметров $n_1 = 5, r_1 = 5{,}0, r_2 = 10{,}0$ программа возвращает значения:

result: $k\,(opt) = 4$ *epsilon* (4) = 0,0000000000000024

int(*polar*) = 3138524692,0140295 *exact* = 3138524692,014022 *delta* = 0,0000076

То есть в кольце формульная пара (29), (14) обеспечивает двойную точность относительной погрешности.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщенных координат – сферической системы в шаре (шаровом слое) на декартовую систему в параллелепипеде, сохраняющее объемы тел и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$a = \pi\left(r_2 + r_1\right),\ b = \frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1}\right),\ c = r_2 - r_1,$$

где r_2, r_1 – внешний и внутренний радиусы шарового слоя;

a, b, c – стороны параллелепипеда.

Тогда объем шарового слоя $V = abc = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)$, где $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, $\frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}$, $\frac{\theta}{\pi} = \frac{y}{b}$, $z = r - r_1$, $dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi$, $dy = \frac{b}{\pi} d\theta$, $dz = dr$, $z_k = kh_1$, $h_1 = \frac{c}{n}$; $y_j = h_2 j$, $h_2 = \frac{b}{n} j$; $x_i = h_3 i$, $h_3 = \frac{a}{n} i$; $i, j, k = \overline{0, n}.$

При отображении $x(r,\theta,\varphi)$, $y(r,\theta,\varphi)$, $z(r,\theta,\varphi)$ внутренняя и внешняя сфера переходят в нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда $r_1 = \text{const} \to z = 0$; $r_2 = \text{const} \to z = r_2 - r_1$. Сечения: $\varphi = 0 \to x = 0$; $\varphi = 2\pi \to x = a$; $\theta = 0 \to y = 0$, $\theta = \pi \to y = b$. По теореме 9 [5, с. 298] отображение $x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi)$ должно иметь свойства:

1) *якобиан перехода*

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} x_r, x_\theta, x_\phi \\ y_r, y_\theta, y_\phi \\ z_r, z_\theta, z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 0 & \frac{b}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ab}{2\pi^2} \ne 0$$

во всех точках рассматриваемой области;

2) частные производные $x_r, x_\theta, x_\phi, y_r, y_\theta, y_\phi, z_r, z_\theta, z_\phi$ непрерывны во всех точках области;

3) отображение $x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi)$ взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщенных координат.

Первые два требования выполняются всегда.

Если область – сферический слой или шар, то не выполнено третье условие в точке $r = 0$ и в 2-х азимутальных направлениях: $\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \pi$ (особые направления).

Можно проколоть сферический слой насквозь вдоль выбранных направлений, что топологически эквивалентно сфере с 1 ручкой. Сжать указанную область от полюсов к экватору так, что получится торообразный слой с плоскими боковыми гранями, разрезать его от оси симметрии плоскостью $\varphi = 0$ и разогнуть полученное тело в параллелепипед.

Вдоль особых направлений неоднозначность отображения нарушается, что, однако, не сказывается на мере интеграла в сферических координатах, так как во всех точках направлений $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $f(r,\theta,\varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = 0$.

Для шара имеем еще одну особую точку $r_1 = 0$, где также выполнены первые 2 требования гладкой замены переменных интегрирования, кроме третьего (неоднозначность отображения в точке $r_1 = 0$), что в данном интеграле несущественно, т.к. мера интеграла в сферических координатах в окрестности указанной точки $dI_3 = f(r,\theta,\varphi) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = f(0,\theta,\varphi) 0^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0$.

$$I_3 = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^c\int_0^b\int_0^a f\left(r_1+z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2 dz \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\frac{\pi}{b}dy\frac{2\pi}{a}dx =$$

$$= \frac{2\pi^2}{ab}\int_0^{r_2-r_1}\int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1+z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx =$$

$$= \frac{3\pi}{2\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\int_0^{r_2-r_1}\int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)}\int_0^{\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1+z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a}x\right)(r_1+z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx \approx \tag{30}$$

$$\approx \frac{3\pi}{2\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\frac{n_0h_1}{2}\frac{n_0h_2}{2}\frac{n_0h_3}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} C_{i,j,k} f\left(r_1+z_k, \frac{\pi y_j}{b}, \frac{2\pi}{a}x_i\right)(r_1+z_k)^2 \sin\left(\frac{\pi y_j}{b}\right) =$$

$$= \frac{3\pi n_0^3 h_1h_2h_3}{16\left(r_2^2+r_1r_2+r_1^2\right)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} C_{i,j,k} f\left(r_1+kh_1, \frac{\pi}{b}h_2 j, \frac{2\pi}{a}h_3 i\right)(r_1+kh_1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b}h_2 j\right).$$

Рассмотрим пример:

$$\int_5^{10}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(r^7\sin^2\varphi\sin\theta\right) r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = \left.\frac{r^{10}}{10}\right|_5^{10}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta = \left(10^{10}-5^{10}\right)\frac{\pi^2}{20}.$$

Программа для тройных интегралов в сферической системе координат с учетом формул (11) и (30) возвращает значения (в программе $N \equiv n$):
n = 10 k = 1 *numerical* = 4914074506,509758 *exact* = 4929983057,770709 *delta* = –15908551,260951
epsilon (10) = –0,0032373443340911
n = 20 k = 2 *numerical* = 4929989554,759921 *exact* = 4929983057,770709 *delta* = 6496,989212
epsilon (20) = 0,0000013178505025
n = 30 k = 3 *numerical* = 4929983057,770734 *exact* = 4929983057,770709 *delta* = 0,000025
epsilon (30) = 0,0000000000000050
v(1) = 4914074506,509758
v(2) = 4929983057,770734
v(3) = 4929989554,759921
result: *k* (*opt*) = 3 *epsilon* (3) = 0,0000000000000050
int = 4929983057,770734 *exact* = 4929983057,770709 *delta* = 0,000025

По первым 2 значениям *delta* при малых N оценим порядок погрешности формул (26) и (10):

$$2028 = 2^{11} < \left|\frac{delta(10)}{delta(20)}\right| = \left|\frac{-15908551,260951}{6496,989212}\right| = 2449 < 2^{12} = 4096,$$

что является хорошим подтверждением леммы для алгоритма (11) и квадратур с алгебраическим порядком точности равным 11, но примененным уже к тройному интегралу в сферической системе координат.

Выводы:

1. Получены пары формула–алгоритм ((7)–(8); (10)–(11); (13)–(14)) для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-м, 11-м, 15-м алгебраическим порядком точности соответственно.

2. Найдены аналоги пар формул (20) – (23), (21) – (24) для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением порядка погрешности, как и в одномерном случае.

3. Построены линейные отображения обобщенных координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры (29) в полярной системе координат и (30) в сферической системе координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2008.
2. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – М. : Наука, 1995.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
4. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / О. В. Голубева [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. –С. 119–131.
5. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов [и др.]. – М. : Физ.-мат. лит-ра, 2001. – 480 с.
6. Бартеньев, О. В. Математическая библиотека IMSL : в 3 ч. / О. В. Бартеньев. – М. : Диалог МИФИ, 2001. – Ч. 1. – 457 с.
7. Пастухов, Ю. Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вест. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 20.09.2016

THE APROXIMATION OF DOUBLE AND TRIPLE INTEGRAL IN THE INNER BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

O. GOLUBEVA, S. EHILEVSKI, N. GUREVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

Formulas and algorithms for component integral squarings with even at a walk with 7, 11, 15 algebraic rather accuracy and with 8, 12, 16 rather inaccuracy accordingly are received in the inner boundary value problems of mathematical physics. The analogues molded for double on rectangle and triple in parallelepiped integral with conservation such order to inaccuracy, as in univariate event are founded. The linear images of the generalised coordinates are built with layer of circle (the circle) on rectangle, with ball layer (the ball) on box, as well as integral squarings in arctic coordinate system and in spherical coordinate system with conservation of the algebraic order to accuracy that is checked numerically. The lemma, indicating minimum number of the nodes sufficient for calculation of the integral with double accuracy is proved. They are brought corresponding to algorithms.

Keywords: *algebraic order to accuracy, order to inaccuracy, pattern of factor, method of median to filtering, ring, ball layer, approximation integral.*