УДК 517.956.32

О РАЗРЫВАХ ПЕРВЫХ И ВТОРЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ФАКТОРИЗОВАННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ
(Белорусский государственный университет)

Изучается гладкость обобщенных решений одномерного волнового уравнения $(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\, u(x,t) = f(x,t)$ *и его правой части* f *в первой четверти плоскости. Цель работы – нахождение линий разрывов первых и вторых частных производных обобщенных решений этого волнового уравнения в случае существования этих производных и выявление необходимых требований гладкости на правую часть* f *для существования классических решений этого уравнения. Она достигается методом распространяющихся волн из курса уравнений математической физики и методами теории обобщенных функций. Доказано, что первые частные производные непрерывных решений этого уравнения могут терпеть разрыв только на кусках его характеристик:* $x - a_1t = C_1,\ x + a_2t = C_2$. *Вторые частные производные его непрерывно дифференцируемых решений могут иметь разрыв только на кусках этих характеристик и кусках прямых:* $x - \sqrt{a_2a_1}\,t = C_3,\ x + \sqrt{a_2a_1}\,t = C_4,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$. *С помощью этих результатов установлено, что любое классическое решение общего факторизованного линейного неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение, которое дважды непрерывно дифференцируемое и является его классическим решением в первой четверти плоскости. Это позволило нам вывести необходимость непрерывности* f *и соответствующих интегральных требований гладкости на* f *для существования классических решений исследуемого уравнения.*

Ключевые слова: *факторизованное уравнение колебаний струны, обобщенное решение неоднородного уравнения, носитель разрыва частной производной, необходимое требование гладкости.*

Введение. В настоящей работе показано, что в первой четверти плоскости кусочно-непрерывные первые частные производные от непрерывных решений общего линейного факторизованного уравнения колебаний струны имеют разрыв только на частях характеристик этого уравнения. Кусочно-непрерывные вторые частные производные от его непрерывно дифференцируемых решений терпят разрыв в первой четверти плоскости только на кусках его характеристик и/или на кусках двух указанных семейств прямых. Этим уравнением моделируются вынужденные колебания однородной упругой струны в движущейся упруго сопротивляющейся среде. Ранее носители разрывов первых частных производных непрерывных решений простейшего уравнения колебаний струны были установлены в [1, с. 83–85]. В качестве приложений полученных результатов доказано, что любое классическое решение общего факторизованного линейного неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого обобщенное решение данного неоднородного уравнения, которое дважды непрерывно дифференцируемое и является его классическим решением в первой четверти плоскости. Ранее автором была установлена единственность последних обобщенных (классических) решений с точностью до аддитивных обобщенных (классических) решений соответствующего факторизованного линейного однородного уравнения колебаний струны [2]. Затем нами выводятся необходимые требования гладкости на правую часть исследуемого уравнения для того, чтобы оно имело классические решения [3]. Эти результаты можно распространить на смешанные (начально-краевые) задачи для рассматриваемого нами общего уравнения колебаний струны в полуполосе плоскости методом работы [4]. Методом характеристик смешанные задачи для уравнения колебаний струны решаются в работах [5, 6].

1. Постановка задачи и методы исследования. В первой четверти плоскости $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ требуется найти линии разрывов первых и вторых частных производных решений волнового уравнения:

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\, u(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty, \tag{1}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t,\ \partial_x = \partial/\partial x$ – первые частные производные;

$a_1 > 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1,\ b_2$ – постоянные вещественные коэффициенты.

Сначала мы находим достаточно гладкие линии разрывов этих частных производных от обобщенных решений $u \in C(G_\infty)$ уравнения (1) методом распространяющихся волн из курса уравнений математической физики [1]. Затем с помощью этих результатов методами теории обобщенных функций доказываем [7], что каждое классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1) содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение F, которое дважды непрерывно дифференцируемое в первой четверти плоскости $F \in C^2(G_\infty)$ и является его классическим решением. Отсюда мы выводим необходимые требования гладкости на f для существования классических решений уравнения (1).

2. Основной результат. Сначала находим носители разрывов первых производных.

Теорема 1. Если первые частные производные $\partial_t u$ и $\partial_x u$ от непрерывных решений $u \in C(G_\infty)$ волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле в G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв, то линиями этого разрыва служат части характеристик уравнения (1):

$$x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2,\ \ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\ , \tag{2}$$

находящиеся в первой четверти G_∞ плоскости $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Обозначим символом $C^k(\Omega)$ множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω. Методом характеристик выводится общий интеграл классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ волнового уравнения (1) на множестве G_∞:

$$u(x,t) = e^{Bx-At}\left[g(x-a_1t) + h(x+a_2t) + \widehat{F}(x,t)\right],\ \ \widehat{F}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|,\tau)\,ds\,d\tau, \tag{3}$$

где g, h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных;

$\widehat{F}(x,t)$ –дважды непрерывно дифференцируемая функция на G_∞;

$A = (a_1b_2 + a_2b_1)/(a_1+a_2),\ \ B = (b_2 - b_1)/(a_1+a_2)$ – постоянные.

Для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ правая часть уравнения (1) является непрерывной функцией $f \in C(G_\infty)$. Предельным переходом общий интеграл (3) распространяется с классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ на обобщенные решения $u \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ уравнения (1). Здесь пространство Соболева $W^1_{2,loc}(G_\infty)$ всех локально интегрируемых функций в G_∞ – это множество всех таких измеримых вещественных функций v на G_∞, для которых ее сужение $v \in W^1_2(\Omega)$ на любое ограниченное множество $\Omega \subset G_\infty$. Функция $v \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1) для $f \in L_{2,loc}(G_\infty)$, если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\,v(x,t)\,(\partial_t - a_2\partial_x - b_2)\varphi(x,t)\,dxdt = -\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,t)\varphi(x,t)\,dxdt,\ \ \forall\varphi \in D^1(\dot{G}_\infty), \tag{4}$$

где множество $D^1(\dot{G}_\infty) = \{\varphi \in C^1(\dot{G}_\infty)$: *носитель* $\operatorname{supp}\varphi$ – *компакт в* $\dot{G}_\infty =]0,\infty[\times]0,\infty[$; $\varphi|_{x=+\infty} = 0$, $t \in [0,\infty[$, $\varphi|_{t=+\infty} = 0$, $x \in [0,\infty[\}$ [8].

Заметим, что мы будем использовать это понятие лишь для непрерывных, кусочно-дифференцируемых обобщенных решений в доказательстве теоремы 1 и для непрерывно дифференцируемых обобщенных решений с кусочно-непрерывными вторыми производными в доказательстве теоремы 2, и для непрерывно дифференцируемых обобщенных решений в следующем четвертом разделе при выявлении необходимых требований гладкости на f для существования классических решений уравнения (1) с непрерывной правой частью $f \in C(G_\infty)$.

В силу бесконечной дифференцируемости функции e^{Bx-At} исследование гладкости и разрывов частных производных от обобщенных решений $u \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ уравнения (1) эквивалентно исследованию гладкости и разрывов частных производных от обобщенных решений $\hat{u} = e^{At-Bx}u \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ уравнения

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\,\hat{u}(x,t) = \hat{f}(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty,\ a_1 > 0,\, a_2 \ge 0, \tag{5}$$

с правой частью $\hat{f}(x,t) = e^{At-Bx} f(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty$, где функция f – правая часть уравнения (1).

Обобщенные решения $\hat{u} \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ уравнения (5) удовлетворяют интегральному уравнению (4) при $b_1 = b_2 = 0$, $f = \hat{f}$ и представляются общим интегралом:

$$\hat{u}(x,t) = \hat{g}(x - a_1 t) + \hat{h}(x + a_2 t) + \widehat{F}(x,t), \tag{6}$$

где $\hat{g},\, \hat{h}$ – любые функции из пространства $W^1_{2,loc}$ своих переменных и $\widehat{F}(x,t) \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$.

Ввиду предположений теоремы 1 первые частные производные решений $\hat{u} \in W^1_{2,loc}(G_\infty) \cap C(G_\infty)$ уравнения (5) существуют в обычном смысле в G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв на некоторой непрерывно дифференцируемой кривой l уравнения $x = x(t),\, t \in [\alpha, \beta]$, из произвольного прямоугольника $ABCD$ в G_∞. Сначала для классических решений $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ интегрируем уравнение (5) по прямоугольнику $ABCD$ в G_∞, вершины которого B и D лежат на кривой $l \in C^1[\alpha, \beta]$ [1, рис. 20], и приходим к равенству

$$\iint\limits_{ABCD} (\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\,\hat{u}(x,t)dxdt = \iint\limits_{ABCD} \hat{f}(x,t)dxdt.$$

В левой части этого равенства применяем формулу Грина и получаем

$$\int\limits_{BA+DC} \left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dx + \int\limits_{AD+CB} a_2\left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dt = -\iint\limits_{ABCD} \hat{f}(x,t)dxdt, \tag{7}$$

в левой части которого интегрирование ведется в положительном направлении обхода периметра $AD + DC + CB + BA$ прямоугольника $ABCD$.

Затем равенство (7) распространяется предельным переходом с решений $\hat{u} \in C^2(ABCD)$ на соответствующее подмножество решений $\hat{u} \in \widehat{W}{}^1_2(ABCD)$ множества $W^1_2(ABCD) \cap C(\overline{ABCD})$ так, чтобы предел каждого интеграла существовал в силу предположения теоремы 1 о существовании в обычном смысле первых частных производных от решений $u \in C(G_\infty)$ уравнения (1) и, следовательно, уравнения (5) в G_∞. Согласно теореме 3.2 Лионса [8, с. 17] для функций $\hat{u} \in W^m_2(\Omega),\, \Omega \subset \mathbb{R}^n,\, n = 1, 2, \ldots,$ переменных $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ в точках достаточно гладкой границы $x' \in S = \partial\Omega$ однозначно определены значения ее частных производных $\partial^j u(x')/\partial\nu^j \in W_2^{m-j-1/2}(S)$, $j = \overline{0, m-1}$, вдоль внешней нормали $\nu = \nu(x')$ к границе S. И наоборот, по значениям этих всех граничных частных производных однозначно продолжаются функции с границы S внутрь области Ω. Интегрируя аналогичным образом уравнение (5) по криволинейным треугольникам ΔABD и ΔBCD, имеем соответственно равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_{BA} \left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dx + \int\limits_{AD} a_2\left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dt + \\ + \int\limits_{DB} a_2\left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dt + \left(\partial_t\hat{u}(x,t) + a_1\partial_x\hat{u}(x,t)\right) dx = -\iint\limits_{\Delta ABD} \hat{f}(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\int\limits_{DC} \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right) dx + \int\limits_{CB} a_2 \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right) dt +$$
$$+ \int\limits_{BD} a_2 \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right) dt + \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right) dx = - \iint\limits_{\Delta BCD} \hat{f}(x,t) dx dt. \tag{9}$$

Вычитая почленно равенство (7) из суммы равенств (8) и (9), получаем

$$\int\limits_{DB} \{a_2 \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right)_1 dt + \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right)_1 dx -$$
$$- a_2 \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right)_2 dt - \left(\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)\right)_2 dx\} = 0, \tag{10}$$

где нижние индексы 1 и 2 указывают на то, что под интегралом предельные значения производных берутся соответственно изнутри треугольников ΔABD и ΔBCD.

Ввиду произвольности кривой l из равенства (10) следует уравнение для разрывов первых производных

$$a_2 \left([\partial_t \hat{u}(x,t)] + a_1 [\partial_x \hat{u}(x,t)]\right) + x'(t) \left([\partial_t \hat{u}(x,t)] + a_1 [\partial_x \hat{u}(x,t)]\right) = 0,\ t \in [\alpha, \beta], \tag{11}$$

в котором символом $[g] = (g)_1 - (g)_2$ обозначена величина разрыва функции g на дуге DB и производная $x'(t)$ из дифференциала $dx = x'(t)dt$. Производная по t вдоль непрерывно дифференцируемой линии $l \in C^1[\alpha, \beta]$ по двум взаимно противоположным направлениям 1 и 2 от решения уравнения (5) принимает значения

$$d\hat{u}(x(t),t)/dt = \left(\partial_x \hat{u}(x,t)\right)_i x'(t) + \left(\partial_t \hat{u}(x,t)\right)_i,\ i = 1, 2,$$

разность которых дает другое уравнение для разрывов первых производных

$$[\partial_t \hat{u}(x,t)] + x'(t) [\partial_x \hat{u}(x,t)] = 0, \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{12}$$

Однородная система двух уравнений (11) и (12) имеет нетривиальные решения, т.е. по крайней мере, одна из первых частных производных от решения $\hat{u} \in C(G_\infty)$ уравнения (5) имеет разрыв на линии l тогда и только тогда, когда определитель этой системы уравнений тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x'(t) + a_2 & a_1 (x'(t) + a_2) \\ 1 & x'(t) \end{vmatrix} = x'^2(t) + (a_2 - a_1) x'(t) - a_1 a_2 = 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Это квадратное уравнение имеет два решения $x'(t) = a_1$ и $x'(t) = -a_2$, которым соответствуют характеристики (2) уравнения (5) и, следовательно, уравнения (1). Теорема 1 доказана.

Потом находим носители разрывов вторых частных производных.

Теорема 2. Если вторые частные производные $\partial_{tt} u,\ \partial_{xt} u = \partial_{tx} u,\ \partial_{xx} u$ от непрерывно дифференцируемых решений $u \in C^1(G_\infty)$ волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле в G_∞ и хотя бы одна из них терпит разрыв, то в G_∞ линиями этого разрыва служат части характеристик (2) и прямых

$$x - \sqrt{a_2 a_1}\, t = C_3,\ x + \sqrt{a_2 a_1}\, t = C_4,\ C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Доказательство. Как и теорему 1 утверждение теоремы 2 достаточно обосновать для решений уравнения (5). Сначала для решений $\hat{u} \in C^3(G_\infty)$ и, следовательно, правой части $\hat{f} \in C^1(G_\infty)$ дифференцируем по t уравнение (5) и получим

$$(\partial_t - a_2 \partial_x)(\partial_t + a_1 \partial_x)\, \partial_t \hat{u}(x,t) = \partial_t \hat{f}(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty. \tag{14}$$

Интегрируем уравнение (14) по прямоугольнику $ABCD$ в G_∞ с вершинами B и D на кривой $l \in C^2[\alpha,\beta]$, в левой части полученного равенства применяем формулу Грина и находим

$$\int\limits_{BA+DC} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dx + \int\limits_{AD+CB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dt = -\iint\limits_{ABCD} \partial_t\,\hat{f}(x,t)dxdt, \quad (15)$$

которое, как и выше, потом распространяется предельным переходом с решений $\hat{u} \in C^3(ABCD)$ на соответствующее подмножество решений $\hat{u} \in \widehat{W}_2^2(ABCD)$ множества $W_2^2(ABCD)\bigcap C^1(\overline{ABCD})$ так, чтобы предел каждого интеграла существовал в силу предположения теоремы 2 о существовании в обычном смысле вторых частных производных от непрерывно дифференцируемых решений уравнения (1) и, следовательно, уравнения (5) в G_∞. Интегрируем уравнение (14) по криволинейным треугольникам ΔABD, ΔBCD и тем же путем соответственно приходим к равенствам

$$\begin{gathered}\int\limits_{BA} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dx + \int\limits_{AD} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dt + \\ + \int\limits_{DB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dt + (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta ABD} \partial_t\,\hat{f}(x,t)dxdt,\end{gathered} \quad (16)$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{DC} (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\,dx + \int\limits_{CB} a_2\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\,dt + \\ + \int\limits_{BD} a_2(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dt + (\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)dx = -\iint\limits_{\Delta BCD} \partial_t\,\hat{f}(x,t)dxdt.\end{gathered} \quad (17)$$

Вычитаем почленно равенство (15) из суммы равенств (16) и (17) и получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{DB} \{a_2\big(\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\big)_1\,dt + \big(\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\big)_1 dx - \\ - a_2\big(\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\big)_2\,dt - \big(\,(\partial_t + a_1\partial_x)\,\partial_t\hat{u}(x,t)\big)_2\,dx\} = 0,\end{gathered} \quad (18)$$

где нижние индексы 1 и 2 обозначают указанные выше предельные значения производных из треугольников ΔABD и ΔBCD.

Благодаря произвольности l из равенства (18) вытекает первое уравнение для разрывов вторых производных

$$a_2\big([\partial_{tt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xt}\hat{u}(x,t)]\big) + x'(t)\big([\partial_{tt}\hat{u}(x,t)] + a_1[\partial_{xt}\hat{u}(x,t)]\big) = 0,\ t \in [\alpha,\beta], \quad (19)$$

где $[\partial_{tt}\hat{u}(x,t)]$ и $[\partial_{xt}\hat{u}(x,t)]$ – разрывы соответственно вторых частных производных $\partial_{tt}\hat{u} = \partial^2\hat{u}/\partial t^2$ и $\partial_{xt}\hat{u} = \partial^2\hat{u}/\partial x\partial t = \partial^2\hat{u}/\partial t\partial x$ от непрерывно дифференцируемых решений $\hat{u}$.

Для решений $\hat{u} \in C^3(G_\infty)$ и функций $\hat{f} \in C^1(G_\infty)$ дифференцируем по x уравнение (5) и имеем

$$(\partial_t + a_1\partial_x)\,(\partial_t - a_2\partial_x)\,\partial_x\hat{u}(x,t) = \partial_x\,\hat{f}(x,t),\ \{x,t\} \in G_\infty. \quad (20)$$

Как и выше, интегрируем уравнение (20) по прямоугольнику $ABCD$ и треугольникам ΔABD, ΔBCD, применяем формулу Грина и аналогичным путем получаем второе уравнение разрывов

$$a_1\big([\partial_{xt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xx}\hat{u}(x,t)]\big) - x'(t)\big([\partial_{xt}\hat{u}(x,t)] - a_2[\partial_{xx}\hat{u}(x,t)]\big) = 0,\ t \in [\alpha,\beta], \quad (21)$$

где $[\partial_{xx}\hat{u}(x,t)]$ – разрыв второй частной производной $\partial_{xx}\hat{u} = \partial^2\hat{u}/\partial x^2$ от решений $\hat{u} \in C^1(G_\infty)$.

Вторая производная по t вдоль дважды непрерывно дифференцируемой линии разрыва l по двум взаимно противоположным направлениям 1 и 2 от $\hat{u}$ равна значениям

$$d^2\hat{u}(x(t),t)/dt^2 = \big(\partial_{xx}\hat{u}(x,t)\big)_i\,x'^2(t) + \big(\partial_x\hat{u}(x,t)\big)_i\,x''(t) + \big(\partial_{tt}\hat{u}(x,t)\big)_i,\ i = 1, 2,$$

которые при непрерывности первых $\partial_t \hat{u}$ и $\partial_x \hat{u}$ дают уравнение для разрывов вторых производных

$$[\partial_{tt}\hat{u}(x,t)] + x'^2(t)[\partial_{xx}\hat{u}(x,t)] = 0, \ t \in [\alpha, \beta]. \tag{22}$$

Однородная система уравнений (19), (21) и (22) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x'(t)+a_2 & a_1(x'(t)+a_2) & 0 \\ 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) \\ 1 & 0 & x'^2(t) \end{vmatrix} = (a_1 - x'(t))(x'(t)+a_2)(x'^2(t) - a_2 a_1) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Это уравнение при всех $a_1 > 0, \ a_2 \geq 0$ имеет решения $x'(t) = a_1, \ x'(t) = -a_2, \ x'(t) = \pm\sqrt{a_2 a_1}$, которым соответствуют характеристики (2) и прямые (13). Теорема 2 доказана.

3. Приложение результатов работы к поиску необходимых требований гладкости на правую часть f уравнения (1) для существования его классических решений в первой четверти плоскости.

Следствие. Если $u \in C^2(G_\infty)$ – классическое решение неоднородного уравнения (1), то правая часть уравнения (1) непрерывна на $f \in C(G_\infty)$, функция $F(x,t) = e^{Bx-At}\hat{F}(x,t) \in C^2(G_\infty)$ удовлетворяет уравнению (1) и

$$\int_0^t e^{b_i \tau} f(\left|x + (-1)^i a_i (t-\tau)\right|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \ i = 1, 2. \tag{23}$$

Доказательство. Утверждение этого следствия для уравнения (1) достаточно обосновать для уравнения (5). Для решений $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ необходимость непрерывности правой части $f \in C(G_\infty)$ непосредственно вытекает из уравнения (5), для которых функция $\hat{F}$ лишь непрерывно дифференцируема, т.е. $\hat{F} \in C^1(G_\infty)$ при любых $a_1 > 0, a_2 \geq 0.$ Согласно общему интегралу (6) множество всех обобщенных решений уравнения (5) представляется общим интегралом

$$\hat{u}(x,t) = \hat{u}_0(x,t) + \hat{F}(x,t), \tag{24}$$

где функции $\hat{u}, \hat{F} \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ и $\hat{u}_0 \in W^1_{2,loc}(G_\infty)$ удовлетворяют соответственно интегральному уравнению (4) при $\hat{f} \neq 0$ и $\hat{f} = 0.$

Классические решения $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ неоднородного уравнения (5) являются его обобщенными решениями. Обратное утверждение не верно. Но все обобщенные решения неоднородного уравнения (5), которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями на G_∞, как известно, будут классическими решениями этого уравнения [7].

Функция $\hat{F}$ не зависит от $x - a_1 t, \ x + a_2 t$ и не содержит слагаемых, зависящих от $x - a_1 t$ и/или $x + a_2 t.$ Если бы функция $\hat{F}$ зависела от $x - a_1 t$ и/или $x + a_2 t,$ то она бы не была обобщенным решением неоднородного уравнения (5) при $\hat{f} \neq 0.$ Если бы функция $\hat{F}$ содержала слагаемые, зависящие от $x - a_1 t$ и/или $x + a_2 t,$ то это противоречило бы ее единственности среди всех остальных обобщенных решений неоднородного уравнения (5), в которых присутствуют нетривиальные слагаемые вида $\hat{u}_0$ [2]. Поэтому в сумме (6) негладкие слагаемые не могут сократиться и, следовательно, функция $\hat{F}$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на $G_\infty,$ т.е. $\hat{F} \in C^2(G_\infty).$ Итак, очевидность этого включения вытекает из общего интеграла (6), свойства аддитивной единственности решения $\hat{F},$ которые, в свою очередь, следуют из линейности и гиперболичности дифференциального уравнения (1).

Это можно доказать и с помощью теорем 1 и 2. В равенстве (24) негладкие слагаемые из $\widehat{F}$ не могут сократиться с негладкими слагаемыми из $\hat{u}_0$ для того, чтобы их сумма $\hat{u}$ стала дважды непрерывно дифференцируемой на G_∞. Поскольку в силу доказанных выше теорем 1 и 2 возможны разрывы первых частных производных только на характеристиках (2) и вторых частных производных решений $\hat{u}$ уравнения (5) только на прямых (2) и/или (13), то не зависящая от $x+(-1)^i a_i t$, $x+(-1)^i\sqrt{a_2 a_1}\,t$, $i=1,2$, функция $\widehat{F}$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на G_∞, т.е. $\widehat{F}\in C^2(G_\infty)$. Действительно, если бы функция $\widehat{F}$ зависела от $x-a_1 t$ и/или $x+a_2 t$, то она была бы обобщенным решением уравнения (5) при $\hat{f}=0$, а не при $\hat{f}\neq 0$. Если бы в функции $\widehat{F}$ присутствовали слагаемые, зависящие от $x-a_1 t$ и/или $x+a_2 t$, то это противоречило бы единственности обобщенного решения $\widehat{F}$ до аддитивных нетривиальных обобщенных решений вида $\hat{u}_0$ однородного уравнения (5) при $\hat{f}=0$. Если бы функция $\widehat{F}$ зависела от $x-\sqrt{a_2 a_1}\,t$ и/или $x+\sqrt{a_2 a_1}\,t$, то она была бы обобщенным решением интегрального уравнения типа (4), соответствующего однородному дифференциальному уравнению

$$\partial_{tt} w(x,t) - a_2 a_1 \partial_{xx} w(x,t) = 0, \tag{25}$$

характеристиками которого служат прямые (13) при $a_2 > 0$.

Однако уже известно, что для всех $a_1, a_2 > 0$ функция $\widehat{F}\in C^1(G_\infty)$ – обобщенное решение неоднородного уравнения (5), а не однородного уравнения (25), т.к. $(a_1-a_2)\partial_{xt}\widehat{F}\neq\hat{f}$ для $\hat{f}\neq 0$. Причем при $a_2=0$ прямые $x=C_3$, $x=C_4$ из (13) совпадают с характеристиками $x=C_2$ из (2). Если в функции $\widehat{F}$ присутствуют негладкие слагаемые, зависящие от $x-\sqrt{a_2 a_1}\,t$ и/или $x+\sqrt{a_2 a_1}\,t$, то они при $a_1\neq a_2$ не сократятся с какими-то обобщенными решениями вида $\hat{u}_0$, т.к. при $a_1\neq a_2$ последние решения не могут одновременно удовлетворять интегральному уравнению (4) при $b_1=b_2=0$, $f=0$ и в обобщенном смысле однородному уравнению (25).

Поскольку функция $\widehat{F}\in C^2(G_\infty)$, то в уравнении (4) при $b_1=b_2=0$, $f=\hat{f}$ и $v=\widehat{F}$ можно проинтегрировать один раз по частям и получить тождество

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\,\widehat{F}(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt = \int_0^\infty\int_0^\infty \hat{f}(x,t)\varphi(x,t)\,dxdt,\ \ \forall\varphi\in D^1(\dot{G}_\infty),$$

из которого с помощью леммы дю Буа-Реймонда стандартным образом выводится, что $\widehat{F}$ удовлетворяет уравнению (5), т.е. $\widehat{F}$ – его классическое решение [7, с. 26].

Функция $\widehat{F}\in C^2(G_\infty)$ должна иметь непрерывно дифференцируемые производные вдоль характеристик (2) уравнения (1):

$$\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t} - (-1)^i a_i \frac{\partial\widehat{F}}{\partial t} = e^{-B[x-(-1)^i a_{3-i} t]}\int_0^t e^{b_{3-i}\tau} f\left(\left|x-(-1)^i a_{3-i}(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau\in C^1(G_\infty),\ i=1,2.$$

Отсюда следует необходимость гладкости (23). Следствие доказано.

Заключение. В работе показано, что при любых $a_1>0$, $a_2\geq 0$ первые частные производные непрерывных решений одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения могут терпеть разрыв лишь на кусках характеристик $x-a_1 t=C_1$, $x+a_2 t=C_2$, а вторые частные производные его непрерывно дифференцируемых решений – лишь на кусках этих характеристик и кусках прямых $x-\sqrt{a_2 a_1}\,t=C_3$, $x+\sqrt{a_2 a_1}\,t=C_4$, $i=\overline{1,4}$. Эти результаты применены к обоснованию того, что каждое классическое решение этого неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение, которое в действительности является его классическим решением в первой четверти плоскости. Последний результат позволил нам вывести необходимость непрерывности f и интегральных требований гладкости (23) на правую часть f для существования классических решений одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения. Это можно использовать для нахождения необходимых требований гладкости на f для однозначной корректной (устойчивой) везде разрешимости различных вспомогательных смешанных задач для этого уравнения в первой четверти плоскости. В дальнейшем, имея все необходимые условия на f в четверти плоскости, можно выводить все необходимые условия на f для смешанных задач с уравнением колебаний ограниченной струны вида (1) в полуполосе плоскости методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // М. : Наука, 2004. – 798 с.
2. Ломовцев, Ф. Е. Единственность частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений, не содержащих нетривиальные частные решения их однородных уравнений / Ф. Е. Ломовцев // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл., Минск, 5-10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Белорус. гос. ун-т ; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 71–72.
3. Ломовцев, Ф. Е. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4 (88). – С. 5–11.
4. Ломовцев, Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : матер. Междунар. мат. конф. Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т ; ред. С.Г. Красовский. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
5. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2011. – 459 с.
6. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Весн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.
7. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
8. Lions, J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites / J.-L. Lions // Berlin : Springer, 1961. – 292 p.

Поступила 24.09.2016

ABOUT RUPTURE ALONG THE CHARACTERISTICS OF THE FIRST AND SECOND PARTIAL DERIVATIVES OF SOLUTIONS OF THE GENERAL FACTORIZED ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A QUARTER OF THE PLANE

F. LOMOVTSEV

In this paper we study the smoothness of generalized solutions of one-dimensional wave equation $(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)\,u(x,t) = f(x,t)$ *and its right-hand side* f *in the first quadrant. The purpose of the article – finding breaks the lines of the first and second partial derivatives of the generalized solutions of the wave equation in the case of the existence of these derivatives and the identification of necessary smoothness requirements on the right-hand side for the existence of classical solutions of this equation. The purpose of the article is achieved by propagating waves from the course of the equations of mathematical physics and methods of the theory of generalized functions. It is proved that the first partial derivatives of the continuous solutions of this equation can have a break only on pieces of its characteristics:* $x - a_1t = C_1,\ x + a_2t = C_2$. *The second partial derivatives of its continuously differentiable solutions can have a break only on the pieces of these characteristics and to pieces of the direct:* $x - \sqrt{a_2a_1}\,t = C_3,\quad x + \sqrt{a_2a_1}\,t = C_4,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$. *With these results it is established that any classical solution of the total factored linear inhomogeneous wave equation string contains a term of its unique (up to addition of classical solutions of the corresponding factored homogeneous equation) generalized solution which is twice continuously differentiable and is its classical solution in the first quadrant. This allowed us to bring the need for continuity of* f *and the corresponding integral requirements for the smoothness on* f *to the existence of classical solutions of this equation.*

Keywords: *the factorized equation of string vibrations, a generalized solution of the inhomogeneous equation, the gap support of the partial derivative, a necessary smoothness requirement.*