УДК 514

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА – ОСТРОГРАДСКОГО В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА, канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

В работе исследуются свойства инвариантного преобразования Остроградского $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ *в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка* $T^{2n-1}X_m$*, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа* $L: T^nX_m \to \Re$*. В явном виде получена производная импульсов k-го порядка:* $D_t p_k^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})$*, где* $p_k^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ *– импульс k-го порядка по i-й координате. Обобщена теорема Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа произвольного порядка* $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big) = 0$*, которая локально эквивалентна канонической системе уравнений Гамильтона.*

***Ключевые слова**: уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоение пространства скоростей, энергия и импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция, теорема Остроградского, система уравнений Гамильтона.*

Введение. Гамильтон в 1835 г. получил новую форму уравнений движения механических систем, названных впоследствии каноническими уравнениями Гамильтона.

В 1848 г. М.В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на системы с нестационарными голономными связями, после чего он стал называться принципом Гамильтона – Остроградского. Полученная система канонических уравнений первого порядка содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем в вариационной задаче в постановке Лагранжа. Высоко отозвался о работах по динамике Гамильтона член-корреспондент АН СССР Л.Н. Сретенский: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке» [1]. Аналогичное мнение выразил академик РАН В.В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики» [2]. По мнению профессора Л.С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности, открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках» [3].

Академик В.И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: «Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)» [4].

Подход Гамильтона эффективно используется в математической и теоретической физике [5–8]. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики и теории поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Принцип Гамильтона оказался полезным при разработке квантовой механики и общей теории относительности.

Основные определения и математические объекты. Пусть X_m – гладкое многообразие размерности m, T^nX_m – гладкое расслоение пространства скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется (слабо) невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат *x*, базы X_m расслоения $T^n X_m$:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x} \partial \overset{(n)i}{x}}\right) \neq 0,$$

где $\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$, $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм;

$(U_{v_x^n}, \varphi)$ – локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$;

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})$ – локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат *x*: $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = L(\phi^{-1}(r_m^{n+1})), r_m^{n+1} \in \Re^{(n+1)m}$ [9].

Лемма 1. Определение невырожденной функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат *x*, базы X_m расслоения $T^n X_m$ [9].

Замечание. По теореме о неявной функции, гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, является невырожденной в некоторой окрестности $U_{v_x^n}$.

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$. Невырожденную функцию $L: T^n X_m \to \Re$ будем называть также слабо невырожденной функцией [2].

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется локально невырожденной функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка *n*. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется глобально невырожденной функцией Лагранжа в расслоении скоростей порядка *n*.

Отображение $F_L(x): T^{2n-1} X_m \to T^{2n-1} X_m$ (индуцированное лагранжианом $L: T^n X_m \to \Re$) в локальных координатах *x* в базе X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$ задается функцией вида

$$F_L(x): (\overset{i}{x}, \overset{.i}{x}, \overset{..i}{x}, ..., \overset{(2n-1)i}{x}) \to (\overset{i}{x}, \overset{.i}{x}, \overset{..i}{x}, ..., x^{(n-1)i}, p_n^i, p_{n-1}^{i1}, ..., p_1^i),\ i = \overline{1, m},$$

где $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$, D_t^k – оператор *k*-кратного полного дифференцирования по переменной *t*;

$p_k^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$, $k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$ – обобщенный импульс порядка *k* по переменной x_i в преобразовании $F_L(x)$.

Запишем подробно в локальных координатах *x* в базе X_m расслоения $T^n X_m$ обобщенный импульс

$$p_1^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right) + ... + (-1)^{n-1} D_t^{n-1}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right),$$

$$p_2^i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}^i}\right) + ... + (-1)^{n-2} D_t^{n-2}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right),$$

...,

$$p_n^i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}.$$

Согласно [12], имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$).

При замене координат $\bar{x} \to x(\bar{x})$ в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$ обобщенные импульсы k-порядка $\overline{p_k^i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$, $i=\overline{1,m}$, преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_k^j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}, \ k=\overline{1,n}, i, j=\overline{1,m}.$$

Тензорный закон преобразования обобщенных импульсов позволяет называть функции $p_k^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$, $i=\overline{1,m}$, тензором импульса k-го порядка, $k=\overline{1,n}$, в расслоении скоростей $T^{2n-1}X_m$ [12].

Именно этот результат позволяет корректно определить преобразование Остроградского $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированное отображением $L : T^n X_m \to \Re$, при условии невырожденности $L : T^n X_m \to \Re$.

Определение 4. Функция

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(x(\bar{p},\bar{q}), \dot{x}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$= -L(x(\bar{p},\bar{q}), \dot{x}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) преобразования $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ для функции Лагранжа $L : T^n X_m \to \Re$ или энергией системы, состояние которой описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0.$$

Математическая постановка задачи. Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. Является ли система уравнений Эйлера – Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$ порядка n локально эквивалентной системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i=\overline{1,m}, \ k=\overline{1,n} \ \text{(система } 2mn \text{ уравнений)},$$

где $p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1},..., p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m,..., p_n^1,..., p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$, $j_1 = \overline{1,m}$, $l_1 = \overline{1,n}$.

Теорема 2 (дифференциальная связь импульсов k-го и (k – 1)-го порядков). Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция Лагранжа. Тогда для преобразования Остроградского $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированного функцией L, справедливо равенство

$$D_t p_k^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}),$$

где $p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k)i}}\right)$ – импульс k-го порядка, $p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)$ – импульс (k – 1)-го порядка.

Доказательство.

$$D_t p_k^i = D_t(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t((-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) = (-1)\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) =$$

$$= (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}})).$$

Увеличим индекс l на единицу: $l_1 = l+1$. Поскольку $l = \overline{0, n-k}$, то $l_1 = \overline{1, n-k+1}$. Следовательно,

$$D_t p_k^i = (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) = (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}})) =$$

$$= (-1)(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}) - (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+(k-1))i}})) =$$

$$= (-1)(p_{k-1}^i - \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) = -p_{k-1}^i + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}).$$

Используя определение импульса k-го порядка $p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k)i}})$, получим формулу импульса (k – 1)-го порядка: $p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$. **Теорема 2** доказана.

Теорема 3. Пусть задана невырожденная функция Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$. Тогда преобразование Остроградского $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированное L, также является невырожденным [9].

Замечание 1. Слоевые координаты вектора $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x_i \;\; i = \overline{1,m}$ в $T^{2n-1}X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости k-го порядка, $k = \overline{1, 2n-1}$, а оператор D_t^k – оператор k-кратного полного дифференцирования по времени t.

Замечание 2. Функционал в уравнении Эйлера – Лагранжа может быть интерпретирован как импульс нулевого порядка $p_0^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})$, $i = \overline{1,m}$. Тогда вектор импульса n-го порядка имеет вид $p_n^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x}) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}$.

Определение 5. Гладкая функция $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$ называется сильно невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат x базы X_m расслоения скоростей $T^n X_m$ уравнения

$$\begin{cases} q_k^i = \overset{(k-1)i}{x}, \\ p_k^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right), \end{cases} \quad k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m},$$

могут быть однозначно решены в виде

$$\overset{(l)i}{x} = \overset{(l)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) : \begin{cases} x^i = x^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ ..., \\ \overset{(2n-1)i}{x} = \overset{(2n-1)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}), \end{cases} \quad l = \overline{0, 2n-1},\ i = \overline{1,m}.$$

Лемма 2. Определение сильной невырожденности функции $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат x базы X_m расслоения $T^n X_m$ [9].

Лемма 3 (связь свойств невырожденности и сильной невырожденности).

1) Локально сильно невырожденная функция $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ сильно невырождена.

2) Сильно невырожденная функция $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$ в карте $(U_{v_x^n}, \varphi)$, где $\varphi : U_{v_x^n} \to \mathfrak{R}^{(n+1)m}$, $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм, $v_x^n \in T^n X_m$, является невырожденной в этой карте [12].

Теорема 4 (обобщение теоремы Остроградского). Для невырожденных лагранжианов $L : T^n X_m \to \mathfrak{R}$ система уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$ локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений)},$$

где $p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1}, ..., p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$, $j_1 = \overline{1,m}$, $l_1 = \overline{1,n}$;

$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, ..., q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2})$, $j_2 = \overline{1,m}$, $l_2 = \overline{1,n}$;

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{x}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{x}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{x}(\bar{p}, \bar{q})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$$ – функция Гамильтона;

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k(x^i)$, D_t^k – оператор k-кратного полного дифференцирования по переменной t;

$p_k^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}},..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, $k=\overline{1,n}$ $i=\overline{1,m}$ – импульс порядка k по i-й координате $x = \bar{x} = (x^1, x^2,..., x^m)$.

Доказательство.

В случае $n = 1$ получаем известную теорему Остроградского.

Положим $n \geq 2$.

Из явного вида выражений для импульсов k-го порядка $p_k^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$, следует, что p_i^k есть функции от $x, \dot{x}, \ddot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}$ и $p_k^i = p_k^i(x, \dot{x}, \ddot{x},..., \overset{(2n-k)}{x})$. Здесь координаты $x = \bar{x} = (x^1, x^2,..., x^m)$ не зависят от производных более высокого порядка. Из **леммы 3** о локально сильной невырожденности слабо невырожденного лагранжиана (он назывался невырожденным) следует, что $\overset{(l)j}{x} = D_t^l x^j(q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l}) = \overset{(l)j}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l})$, $l=\overline{n,2n-1}$ $j=\overline{1,m}$, то есть $\overset{(l)j}{x}$ являются функциями от $q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l}$, $q_\alpha = (q_\alpha^1, q_\alpha^2,...q_\alpha^m) = (q_\alpha^i)$, $\alpha = \overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$, $p_\beta = (p_\beta^1, p_\beta^2,...p_\beta^m) = (p_\beta^j)$, $\beta = \overline{n,2n-1}$, $j=\overline{1,m}$.

Тогда имеем

$$p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1},..., p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m,..., p_n^1,..., p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1}),\ j_1 = \overline{1,m},\ l_1 = \overline{1,n},$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2},..., q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m,..., q_n^1,..., q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2}),\ j_2 = \overline{1,m},\ l_2 = \overline{1,n},$$

$$H(p,q) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q}) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_k^i q_{k+1}^i + \sum_{s=1}^{m} p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n) - L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n)),$$

где $\overset{(k_1)i}{x} = q_{k_1+1}^i$, $k_1 = \overline{0,n-1}$, то есть $\overset{(0)i}{x} = \overset{i}{x} = q_1^i$, $i=\overline{1,m}$, $\overset{(k)i}{x} = q_{k+1}^i$, $k=\overline{1,n-1}$, $\overset{(n)i}{x} = \overset{(n)i}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n)$, $k=\overline{1,n-1}$.

Для $1 \leq k \leq n-1$ продифференцируем функцию $H(\bar{p},\bar{q})$ по p_k^i:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} = \frac{\partial}{\partial p_k^i}\Big(\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_l^i q_{l+1}^i + \sum_{s=1}^{m} p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n) - L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n))\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i}\Big) + \frac{\partial}{\partial p_k^i}\Big(\sum_{s=1}^{m} p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n) - L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n))\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i}\Big) + \frac{\partial}{\partial p_k^i}\Big(\sum_{s=1}^{m} p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n) - L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n))\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i\Big) + \sum_{s=1}^{m} p_n^s \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \frac{\partial}{\partial p_k^i} L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n)) =$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\delta_k^l q_{l+1}^i)+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p_k^i}-\frac{\partial}{\partial p_k^i}L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n))=$$

$$=q_{k+1}^i+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p_k^i}-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_k^i}=$$

$$=\overset{(k)i}{x}+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p_k^i}-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_k^i},$$

где $(p_n^s-\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}})\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}+\overset{(k)i}{x}=\overset{(k)i}{x}=D_t\overset{(k-1)i}{x}=D_t q_k^i=\dot{q}_k^i$, $\delta_k^l=\begin{cases}1, l=k\\0, l\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера.

Поскольку $\overset{(k)i}{x}=q_{k+1}^i$, $k=\overline{1,n-1}$, $\overset{(k-1)i}{x}=D_t q_k^i$, $p_n^s=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$, $s=\overline{1,m}$, $\overset{(n)}{x}(q,p_n)=\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)$, то для $k=n$ получим

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_n^i}=\overset{(n)i}{x}+\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n)-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}=$$

$$=\overset{(n)i}{x}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n)(p_n^s-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}})=$$

$$=\overset{(n)i}{x}=D_t\overset{(n-1)i}{x}=D_t q_n^i=\dot{q}_n^i.$$

Для $n\geq k\geq 2$ продифференцируем функцию $H(\bar{p},\bar{q})$ по q_k^i :

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i}=p_{k-1}^i+p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}=$$

$$=p_{k-1}^i+\sum_{s=1}^{m}(p_n^s-\frac{\partial L q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}})\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i}-\frac{\partial L}{\partial q_k^i}=$$

$$=p_{k-1}^i-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i})=-D_t p_k^i=-\dot{p}_k^i.$$

Поскольку верно равенство $p_n^s-\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}=0$ (по определению импульса *n*-го порядка) и на основании ранее доказанной теоремы о дифференциальной связи импульсов *k*-го и (*k* – 1)-го порядков $D_t p_k^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_{k-1}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$ заключаем, что

$$p_{k-1}^i-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}=-D_t p_k^i=-\dot{p}_k^i.$$

Утверждение теоремы для случая $n\geq k\geq 2$ доказано.

Рассмотрим случай $k=1$.

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_1^i}=\sum_{s=1}^{m}p_n^s\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}-\frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_1^i}-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}(p_n^s-\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}})\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i}-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-D_t p_1^i=-\dot{p}_1^i=p_0^i-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=0-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}=-\frac{\partial L}{\partial q_1^i}.$$

При $k = 1$ из **теоремы 2** о дифференциальной связи импульсов k-го и $(k-1)$-го порядков $-D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \dfrac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}$ следует, что

$$-D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_1^i} \text{ и } p_0^i = \sum_{L=0}^{N}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big) = 0 .$$

Поскольку $p_n^s = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$, то есть $\dot{p}_n^s - \dfrac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}} = 0$, тогда равенство $-\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \dfrac{\partial L}{\partial q_k^i}$ есть следствие теоремы о дифференциальной связи импульсов k-го и $(k-1)$-го порядков:

$$D_t p_k^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}),$$

где $q_k^i = \overset{(k-1)i}{x}$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема доказана.

Следствие (теорема Остроградского)**.** Пусть $L(x,\dot{x})$ – сильно невырожденный лагранжиан и $H(x,p)$ – гамильтониан, $p = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}$, где $\dot{x} = \nu(x,p)$. Тогда уравнение Эйлера – Лагранжа $\dfrac{\partial L}{\partial X} - \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = 0$ эквивалентно уравнениям Гамильтона $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$, $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ в фазовом пространстве (x,p).

Выводы.

1. Получен явный вид производной по времени импульсов p_k^i:

$$D_t p_k^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}),\ k = \overline{1,n}$$

2. Доказано обобщение теоремы Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big) = 0$ произвольного порядка: невырожденная система уравнений $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big) = 0$ локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где $$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$= -L(x(\bar{p},\bar{q}),\dot{x}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{x}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{x}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$ – функция Гамильтона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко // М. : Наука,1986. – 760 с.
2. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техники / Л. Е. Евтушик [et al.] // М. : ВИНИТИ, 1979. – 247 с.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов // М. : Наука, 1974, – 90 с.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд // М.: Наука, 1974. – 472 с.
5. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон // М. : Мир, 1973. – 188 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд., испр. – М. : Физ.-мат. лит., 1988. – Т.1. Механика. – 216 с.
7. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак // М. : Мир, 1979.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механики / П. Дирак // М. : Мир, 1968.
9. Пастухов, Ю. Ф. Исследование решения обратной вариационной задачи : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 / Ю. Ф. Пастухов. – М., 1996. – 88 с.
10. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко // М. : Наука,1974. – 453 с.
11. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу // М.: Наука, 1981.
12. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоении скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, О. В. Голубева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Фундаментальные науки. – 2010. – № 12. – С. 17–23.

Поступила 20.09.2016

THE GENERALIZATION OF THEOREM OF HAMILTON- OSTROGRADSKY SPECIAL IN BUNDLES OF SPEEDS OF ARBITRARY ORDER

S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

In the work the invariant properties of Ostrogradskii transformation $F_L(x):T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ *are investigated in the bundle of speeds of arbitrary odd order* $T^{2n-1}X_m$, *induced non-degenerate Lagrangian* $L:T^nX_m \to \Re$. *Explicitly obtained derivative pulses k-th order:* $D_t p_k^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})$, $p_k^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$, $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ *– impulse the k-th order in the i-th coordinate. Ostrogradskii theorem generalizes to the case of a non-degenerate system of Euler-Lagrange equations of arbitrary order* $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\Big)=0$, *which is locally equivalent to the canonical system of Hamilton equations.*

Keywords: *Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, separation velocity space, the energy and momentum of the system, Ostrogradskii transformation, nondegenerate function, Ostrogradskii theorem, the Hamilton system.*