МАТЕМАТИКА

УДК 514

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно-импульсном пространстве. Основным полученным результатом для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка Гамильтона является утверждение: решения системы 2mn ОДУ уравнений Гамильтона первого порядка являются решениями соответствующей системы m дифференциальных уравнений порядка n Эйлера – Лагранжа, двойственной к функции Гамильтона, и соответствующего невырожденного преобразования переменных.

Получены формулы, связывающие частные производные в координатно-импульсном пространстве q–p для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным. Определены формулы для частных производных для двойственной к функции Гамильтона функции Лагранжа по координатным переменным в координатно-импульсном пространстве (X_n, P_{n-1}).

Ключевые слова: *функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.*

Введение. У.Р. Гамильтон в 1835 г. получил новую форму уравнений движения механических систем – канонические уравнения Гамильтона. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем система Ж.Л. Лагранжа, однако все они первого порядка (у Лагранжа – второго).

Вариационное исчисление является одним из старейших, богатых содержанием и приложениями, разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами, поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу П. Ферма 1662 г., где аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую, а также преломление света на границе двух сред. Аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались И. Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения, 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему, предложив математикам своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя гладкую линию ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Основателями общей теории вариационного исчисления, которые дали название этой науке, являются Л. Эйлер (уравнения Эйлера) и Ж. Лагранж (метод вариаций). Свой вклад внесли А. Лежандр (исследование второй вариации – необходимое условие Лежандра), У. Гамильтон и Б. Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона – Якоби), А. Клёбш и Ю. Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), К. Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX в. послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Д. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, А. Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, Б. Якоби получил геометрическое условие (при помощи огибающей семейства экстремалей). Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10, 13, 16–22].

Основные определения. Пусть $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ – функция Гамильтона с $2mn$ независимыми переменными

$$(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})\quad j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n},$$

где $p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1})\quad j1=\overline{1,m}\quad l1=\overline{1,n}$;

$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2})\quad j2=\overline{1,m}\quad l2=\overline{1,n}$

При этом нижние индексы меняются от 1 до n, верхние индексы меняются от 1 до m.

Определение 1. $L(q,p):\Re^{2mn}\to\Re\qquad L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ – функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$.

Постановка задачи. Пусть $H(q,p)$ – функция Гамильтона зависит от $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1}),\ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$, при этом нижние индексы меняются от 1 до n, верхние индексы меняются от 1 до m. Исследуем свойства функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ и функции Лагранжа, двойственной к функции Гамильтона $L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$, а также связи между этими функциями $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$, $L(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$; сформулируем и докажем обратную теорему Гамильтона.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$. Тогда

1) $$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}, & s=1,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}, & 2\le s\le n,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(1)$$

2) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(2)$$

3) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\delta_i^j\delta_s^k,\qquad(3)$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\0, & \alpha\ne\beta\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Прибавим 1 к обеим частям двойного неравенства $1\le k\le n-1\Rightarrow 2\le k+1\le n$, $1\le s\le n$, поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=0=1-1=1-\delta_s^1=(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ i,j=\overline{1,m},$$

где $\delta_s^1=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ne1\end{cases}=\begin{cases}1,s=1\\0,s\ge2\end{cases}$ – символ Кронекера. При $s=1$ формула (1) доказана;

$\delta_j^i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\ne j\end{cases},\ \delta_s^{k+1}=\begin{cases}1,s=k+1\\0,s\ne k+1\end{cases}$ – символ Кронекера.

При $2\le s\le n$ $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}1,(i=j)\wedge(s=k+1)\\0,(i\ne j)\vee(s\ne k+1)\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ i,j=\overline{1,m}$ или

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}, & s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}, & 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}.$$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0$, $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$, т.к. переменные p, q независимы;

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1\ ,(i=j)\wedge(k=s) \\ 0\ ,(i\neq j)\vee(k\neq s)\end{cases} = \delta_i^j\delta_s^k$, условие во второй строке очевидно является отрицанием условия в первой: $\overline{(i=j)\wedge(k=s)} = \overline{(i=j)} \vee \overline{(k=s)} = (i\neq j)\vee(k\neq s)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть (q,p) – $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$, $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$. Тогда при $s=\overline{1,n}$, $i,j=\overline{1,m}$ и произвольных $p_k^j\in\Re$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)\,, \tag{4}$$

где $\delta_s^1 = \begin{cases}1, s=1\\ 0, s\neq 1\end{cases} = \begin{cases}1, s=1\\ 0, s\geq 2\end{cases}$, $\delta_j^i = \begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$, $\delta_s^{k+1} = \begin{cases}1, s=k+1\\ 0, s\neq k+1\end{cases}$ – символы Кронекера.

Доказательство. $(1-\delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k, j, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\,.$$

При $s=1$ $(1-\delta_s^1)=1-1=0 \Rightarrow (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=0$, $p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i\cdot 0 = 0$, и утверждение теоремы 2 выполнено.

При $n\geq s\geq 2 \Rightarrow s-1\geq 1$

$$\delta_s^1=0,\ 1-\delta_s^1 = 1-0=1 \Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i \text{ – правая часть;}$$

$$p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = \begin{cases} p_{k=s-1}^{j=i} = p_{s-1}^i,\ (j=i)\wedge(k+1=s) \\ 0,\ (j\neq i)\vee(k+1\neq s)\end{cases} \Rightarrow (1-\delta_s^1)p_{s-1}^i = (1-0)p_{s-1}^i = p_{s-1}^i \text{ – левая часть утверждения.}$$

При $n=1\Rightarrow s=1\ (s=\overline{1,n})\Rightarrow \delta_n^1=\delta_s^1=1$, поэтому

$$p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1) = p_{1-1}^i(1-\delta_1^1)(1-\delta_1^1) = 0 = p_{1-1}^i(1-\delta_1^1)\,.$$

При $n>1\Rightarrow\delta_n^1=0\Rightarrow(1-\delta_n^1)=(1-0)=1\Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)$.

Формула (4) проверена. **Теорема 2** доказана.

Рассмотрим функцию $L(q,p) = -H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$.

Теорема 3. Пусть $L(q,p) = -H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$. Тогда имеют место равенства

1) $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1) + \sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}\,; \tag{5}$$

2) $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i + \delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}\,, \tag{6}$$

где $\delta_\beta^\alpha = \begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\ 0\ ,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство: $\dfrac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j + p_k^j\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}) + \sum_{j=1}^{m}(\dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$.

По **теореме 1** имеем $\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$. Переменные p, q независимы, поэтому перепишем равенства

$\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ 2\leq s\leq n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases} = \delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$, поэтому

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i});$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\,p_{s-1}^i+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

По **теореме 2** $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=\ p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

Формула (5) проверена. Первая часть **теоремы 3** доказана.

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}=-H(q,p)+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j},$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}).$$

$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\begin{cases}1,\ (s=k)\wedge(i=j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\ 0,\ (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_i^j\delta_s^k$ и $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}=0$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^k\ q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j+\delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i}.$$

Формула (6) проверена. **Теорема 3** доказана.

Теорема 4. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},$ $l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0) . Тогда:

1) замена переменных $p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i},\ i=\overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0) и справедливо

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i};\qquad(7)$$

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)}) ; \quad (8)$$

3) имеет место формула свертки

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \quad (9)$$

Доказательство. $x^{(n)i} = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \dfrac{\partial}{\partial p_n^j}(\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}) = \dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$.

Выражение (7) проверено. Поскольку гессиан $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}) \neq 0$ невырожден, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)}) , \quad (10)$$

следовательно, первые две части утверждения доказаны.

Продифференцируем зависимости координат по импульсам

$$x^{n(i)}(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) \equiv x^{n(i)}, \quad i, l, j = \overline{1, m} \ .$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i} ; \ \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l} = 0 \ s = \overline{1, n} ; \ \frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} = 0 \ s = \overline{1, n-1} ,$$

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}} = \delta_j^i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l} \frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l} \frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} = \sum_{l=}^{m} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} ,$$

доказана формула (9) и **теорема 4**.

Теорема 5. Пусть $H(q,p)$ – функция $H : \Re^{2mn} \to \Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1, m},$ $l1 = \overline{1, n}$, $j2 = \overline{1, m}$, $l2 = \overline{1, n}$, и пусть функция Гамильтона в уравнении связи $L(p,q) = -H(p,q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ невырождена $\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^i}) \neq 0, \ i, j = \overline{1, m}$, где $U(q_0, p_0)$ – окрестность точки (q_0, p_0).

Тогда справедливы следующие результаты:

1) формула замены переменных – это переход от p_n^i к $x^{(n)i}$:

$$p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}, \ i = \overline{1, m} , \quad (11)$$

является невырожденным в окрестности точки (q_0, p_0) ;

2) локально существует обратная замена $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})$; (12)

3) $\dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i.$ (13)

Доказательство. По **теореме 4** первые две части **теоремы 5** доказаны:

$$x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i} \ .$$

$\det(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}) \neq 0$, поэтому по теореме об обратной функции существует обратная замена переменных $p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})$ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(-H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \tag{14}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j)q_{k+1}^j + p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j)) + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \tag{15}$$

Далее, учитывая тождества $\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} = 0;\ k = \overline{1,n};\quad \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j = 0;\ k = \overline{1,n-1};\ \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j = 0$, формулу (15) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j)\,q_{k+1}^j +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \tag{16}$$

С учетом **теоремы 3** $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\delta_n^k = \begin{cases}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}, & k = n\\ 0, & k < n\end{cases}$, $\delta_n^k = \begin{cases}1, & k = n\\ 0, & k \neq n\end{cases}$ – символ Кронекера, (17)

(переменные $q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}$ независимы), тогда выражение (16) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}), \tag{18}$$

т.к. $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} = 0$.

Представим выражение (18) в виде двух сумм от матрицы Гессе функции Гамильтона

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}). \tag{19}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}=0,\ k=\overline{1,n},\ i,l=\overline{1,m}$ по формуле (27) $\dfrac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=\dfrac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$, где $\delta_n^l=\begin{cases}1,\ l=n\\0,\ l\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера, преобразуем выражение (19):

$$\sum_{j=1}^m p_n^j\Big(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\Big)=\sum_{j=1}^m p_n^j\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}=$$

$$=\sum_{j=1}^m p_n^j\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k=\sum_{j=1}^m p_n^j\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}. \tag{20}$$

По пункту 3 **теоремы 4** $\sum_{s=1}^m\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\dfrac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}}=\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера, тогда перепишем формулу (20) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m p_n^j\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}=\sum_{j=1}^m p_n^j\delta_i^j=\sum_{j=1,\,j\neq i}^m p_n^j\delta_i^j+p_n^{j=i}\delta_i^{j=i}=0+p_n^i\cdot 1=p_n^i.$$

Теорема 5 доказана.

Обобщением **теоремы 4, п. 3** является **теорема 6**.

Теорема 6. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие $\det\Big(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i}\Big)\neq 0,\ \ i,j=\overline{1,m}$ в окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0). Тогда

$$\sum_{s=1}^m\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{s=1}^m\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)k}}=\delta_j^i\cdot\delta_n^k\ \ ,\ k=\overline{0,n}\ , \tag{21}$$

где $\quad x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$;

$\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases},\ \delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство: $x^{(n)i}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\dfrac{\partial}{\partial p_n^j}\Big(\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Big)=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$.

$\det\Big(\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}\Big)\neq 0$, поэтому по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})\ .$$

Продифференцируем соотношения

$$x^{n(i)}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)},\ i,\ l,\ j=\overline{1,m}\ .$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l}=\dfrac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i}$; $\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial q_s^l}=0,\ s=\overline{1,n}$; $\dfrac{\partial p_s^l}{x^{(n)j}}=0,\ s=\overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}}=\delta_n^k\cdot\delta_j^i=\sum_{s=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{k(j)}}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^m\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{k(j)}}+\sum_{l=1}^m\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}}==\sum_{l=1}^m\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{(k)(j)}}=\sum_{l=}^m\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}}\ .$$

В частности, при $k=n$ $\quad\dfrac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}}=\delta_n^k\cdot\delta_j^i=\delta_n^{k=n}\cdot\delta_j^i=\delta_j^i=\dfrac{\partial x^{n(i)}}{x^{(n)j}}$,

где $\quad\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases},\ \delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера.

Что доказывает формулу (21) и **теорему 6**.

Введем обозначения

$$X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(n-1)}),\ X_n=(x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(n-1)},x^{(n)})=(X_{n-1},x_n)\,,$$

$$q=(q_1,q_{2,...,}q_n),\ \ p=(p_1,p_2,...,p_n),\ P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1}),\ \ p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})\ .$$

Теорема 7. 1) $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ переменных $(q^{j2}_{l2},p^{j1}_{l1})$ $j1=\overline{1,m},$ $l1=\overline{1,n},$ $j2=\overline{1,m},$ $l2=\overline{1,n}$.

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j};$$

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0) (по **теореме 4, п. 2** $p_n=p_n(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$);

3) рассмотрим замену $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ и функцию $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$, $L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},...,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},$ $p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$.

Тогда выполняются соотношения:

1)
$$\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\frac{\partial x^{(k)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^j}\quad k=\overline{0,n}\ ,\ s=\overline{1,n}; \tag{22}$$

2)
$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q=q(X_{n-1});$$

$$P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))+(1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i+p_n^j\cdot\delta_n^k= \tag{23}$$

$$=(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q=q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j\quad k=0,\ n-1\,. \tag{24}$$

Коротко

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i+p_n^j\cdot\delta_n^k=$$

$$=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j\text{, где} \tag{25}$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\0\ ,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – символ Кронекера;

3)
$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}}=p_n^j(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}),\ \ j=\overline{1,m}\,.$$

Доказательство. При $0\le k\le n-1<n,$ $s=\overline{1,n},$ $i=\overline{1,m}$ $q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $0\le s-1\le n-1$

$$\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)\,.$$

При $k=n\Rightarrow$ $\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(n)j}}=0=(1-\delta_n^k)=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)$, т.к. $x^{(0)i},...,x^{(n-1)i}$ и $x^{(n)j}$ независимы и $1-\delta_n^k=\bar{\delta}_n^k=\begin{cases}1,k<n\\0,k=n\end{cases}$. Докажем, что $\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\frac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}$.

При $0\le k\le n-1<n,$ $s=\overline{1,n},$ $i=\overline{1,m}$ $x^{(k)j}(q,p)=q_{k+1}^j$, $s=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $0\le s-1\le n-1$

$$\frac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}=\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\delta_j^i\cdot\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)\,.$$

При $k=n \Rightarrow \dfrac{\partial x^{(n)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^i}=\dfrac{\partial x^{(n)i}}{\partial x^{(s-1)j}}=0=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^{k=n})$, т.к. q, P_{n-1}, $x^{(n)}$ независимы и $1-\delta_n^k=\bar{\delta}_n^k=\begin{cases}1, k<n\\ 0, k=n\end{cases}$.

Пункт 1 **теоремы 7,** равенство (24) доказано.

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}} \tag{26}$$

По теореме 3 выполнены соотношения

1) $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}; \tag{27}$$

2) $$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i}, \tag{28}$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\alpha=\beta\\0,\alpha\neq\beta\end{cases}$, $\delta_j^i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$, $\delta_k^{s-1}=\begin{cases}1,s=k+1\\0,s\neq k+1\end{cases}$ – символы Кронекера.

Подставляя (27), (28) в (26), учитывая, что $\dfrac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=0$ при $0\le k\le n-1$, $s=\overline{1,n-1}$ (X_n,P_{n-1} – независимы) и согласно **теореме 7, п. 1** $\dfrac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)$, $k=\overline{0,n}$, $s=\overline{1,n}$, получим

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\Big)=\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}. \tag{29}$$

По формуле (28) $\dfrac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\dfrac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum\limits_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i}$, при $k=n$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^{s=n})q_{n+1}^i+\delta_n^n\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}=\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}. \tag{30}$$

Подставим (30) в последнее слагаемое в (29):

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\Big)\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\Big)\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\Big). \tag{31}$$

По **теореме 6** $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i} \cdot \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}} = \delta_j^\alpha \cdot \delta_n^k$, где $\delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases}$, $\delta_n^k = \begin{cases} 1, \ k = n \\ 0 \ , \ k \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера, поэтому (31) равно $\sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha (\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i} \cdot \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}) = \sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha \cdot \delta_j^\alpha \cdot \delta_n^k = p_n^j \cdot \delta_n^k = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i} \cdot \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}$.

По **теореме 7, п. 1** $\delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} \cdot (1-\delta_n^k) = \frac{\partial x^{(k)j}(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial q_s^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)\alpha}(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial q_{k+1}^j} = \delta_\alpha^j \cdot \delta_n^{k+1-1} \cdot (1-\delta_n^{k=n}) =$ $= \delta_\alpha^j \cdot \delta_n^k \cdot (1-1) = 0$. Следовательно, $\sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha \frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) = (1-\delta_n^k) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha \frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j} = (1-\delta_n^k) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha \cdot 0 = 0$, тогда преобразуем (26):

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1) \cdot (1-\delta_n^k) + \sum_{\alpha=1}^{m} p_n^\alpha \frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i} \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}} =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k , \quad (32)$$

где в последней записи формулы (32) используется очевидное равенство $\delta_{k+1}^1 = \delta_k^0$, т.к. по определению из $\delta_{k+1}^1 = \begin{cases} 1, \ 1 = k+1 \Leftrightarrow 0 = k \\ 0 \ , \ 1 \neq k+1 \Leftrightarrow 0 \neq k \end{cases}$ следует $\delta_k^0 = \begin{cases} 1, \ 0 = k \\ 0 \ , \ 0 \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера.

Равенство (23) доказано.

Докажем, что $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k = -(1-\delta_n^k) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j$.

Сравним (32) с (25): $-(1-\delta_n^k) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j$.

При $k < n \Rightarrow \delta_n^k = 0 \Rightarrow -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$.

Рассмотрим различные случаи:

1) при $n > 1 \Rightarrow \delta_n^1 = 0 \Rightarrow -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + p_k^j \cdot (1-\delta_k^0) = -(1-\delta_n^{k<n}) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j$;

2) при $n = 1, (k < n \Rightarrow k = 0) \Rightarrow -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_{k=0}^0) = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j} = -(1-\delta_n^{k=0}) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j} + (1-\delta_{k=0}^0) \cdot p_k^j$,

т.е. при $k < n$ доказано $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k = -(1-\delta_n^k) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j$;

3) при $k = n \Rightarrow \delta_n^{k=n} = 1 \Rightarrow -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^{k=n}) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) \cdot (1-\delta_n^{k=n}) + p_n^j \cdot \delta_n^{k=n} = p_n^j$,

$(k = n \geq 1 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow \delta_{k>0}^0 = 0) \Rightarrow -(1-\delta_n^{k=n}) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j = (1-\delta_k^0) \cdot p_k^j = (1-0) \cdot p_k^j = p_k^j$, значит, $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} \cdot (1-\delta_n^k) + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0) \cdot (1-\delta_n^k) + p_n^j \cdot \delta_n^k = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + p_k^j \cdot (1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$ доказано.

Из **теоремы 7, п. 2** следует основное утверждение **теоремы 7, п. 3** (основное утверждение **теоремы 5, п. 3**):

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}} = -(1-\delta_n^{k=n}) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i} + (1-\delta_{k=n}^0) \cdot p_{k=n}^j = -(1-1) \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i} + (1-0) \cdot p_{k=n}^j = p_{k=n}^j = p_n^j .$$

Этот результат можно получить иначе:

$$X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)}),\ X_n=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)},x^{(n)})=(X_{n-1},x_n)\ ,$$

$$q=(q_1,q_{2,...,}q_n)\ ,\ p=(p_1,p_2,...,p_n)\ ,\ P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})\ ,\ p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})\ .$$

Ранее была введена замена $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i},\ s=\overline{1,n}\ ,\ i=\overline{1,m}$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$, $L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},...,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=$ $=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$ и функцию Гамильтона $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функцию $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$:

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\,,$$

$$H_1(X_n,P_{n-1})=H(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))\ ,$$

$$L_1(X_n,P_{n-1})=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}x^{(l)j}p_l^j=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1}x^{(l)j}p_l^j+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}p_n^j\ .$$

1) $$0\le k\le n\text{-}1<n,\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\qquad x^{(n)j}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\,,$$

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}\right)+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}\ .$$

С учетом свертки

$$0\le k\le n-1<n,\ \ 1\le l\le n-1\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\ \Rightarrow\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}=\begin{cases}0\ ,\ (k=0)\wedge(1\le l\le n-1)\\ \delta_k^l\,\delta_i^j\ ,\ 1\le k,l\le n\text{-}1\end{cases}=\delta_k^l\,\delta_i^j\,(1-\delta_k^0)\ ,$$

где $\delta_i^j=\begin{cases}1,\ j=i\\0\ ,\ j\ne i\end{cases}$, $\delta_k^l=\begin{cases}1,\ l=k\\0\ ,\ l\ne k\end{cases}$, $\delta_k^0=\begin{cases}1,\ k=0\\0\ ,\ k\ne 0\end{cases}$ – символ Кронекера, получим

$$-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j\,(1-\delta_k^0)\,p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j\,(1-\delta_k^0)\,p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)\,p_{l=k}^{j=i}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)\,p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}\ .$$

Напомним, что $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$ и $X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)})$ – независимы, тогда

$$\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=0\Rightarrow-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)\,p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)\,p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\cdot 0=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)\,p_k^i=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}(1-\delta_n^k)+(1-\delta_k^0)\,p_k^i,\ \ 0\le k\le n-1\,.$$

2) Отдельно рассмотрим случай $k = n$. По **теореме 5, п. 3**

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i =$$

$$= -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-\delta_n^{k=n}) + (1-\delta_{k=n}^0) p_{k=n}^i = -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-1) + (1-0) p_{k=n}^i = -\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}} \cdot 0 + 1 \cdot p_n^i = p_n^i .$$

Объединяя результаты, полученные в пунктах 1), 2), имеем

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i + p_n^j \cdot \delta_n^k = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j \quad ,0 \le k \le n .$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = (1-\delta_n^k)\, \dot{p}_{k+1}^j + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$ в силу системы уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dfrac{dq_k^i(t)}{dt} = \dfrac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p_k^i} \\ \dfrac{dp_k^i(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q_k^i} \end{cases} \quad i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}, \tag{33}$$

где $\delta_k^0 = \begin{cases} 1,\ 0 = k \\ 0\ ,\ 0 \ne k \end{cases}$, $\delta_k^i = \begin{cases} 1,\ i = k \\ 0\ ,\ i \ne k \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^i} = \frac{dp_{k+1}^i(t)}{dt} = \dot{p}_{k+1}^i$, поэтому по **теореме 7, п. 2** $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} =$

$$= -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j = (1-\delta_n^k)\, \dot{p}_{k+1}^i + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$$

Теорема 8 доказана.

Определение 2. Рассмотрим функцию $L_1 : \Re^{2mn} \to \Re$ переменных $(X_n, P_{n-1}) = (x^{(0)i}, x^{(1)i}, ..., x^{(n-1)i}, x^{(n)i}, p_1^i, ..., p_{n-1}^i)$ **из теоремы 7**:

$$L_1(X_n, P_{n-1}) = L(q_1^i = x^{(0)i}, q_2^i = x^{(1)i}, ..., q_n^i = x^{(n-1)i}, P_{n-1}, p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = L(q(X_{n-1}), P_{n-1}, p_n(q(X_{n-1}), P_{n-1}, x^{(n)})),$$

$$q(X_{n-1}) : \Re^{mn} \to \Re^{mn} \ \ , \ q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i} \ , \ s = \overline{1,n} \ , \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$L(q,p) = -H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j},$$

где $L(q,p) : \Re^{2mn} \to \Re$ – функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $H(q,p) : \Re^{2mn} \to \Re$.

Назовем функцию Лагранжа, *адаптированной двойственной к функции Гамильтона* $H(q,p)$ или *просто адаптированной к функции Гамильтона*; преобразование $q(X_{n-1}) : \Re^{mn} \to \Re^{mn}$ $q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i}$, $s = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$ назовем *адаптирующим преобразованием* q координат, которое невырождено; преобразование A:$(q(X_n, P_{n-1}),\ \ p(X_n, P_{n-1}))$: $(q_k^i = q_k^i((X_n, P_{n-1}) = x^{(k-1)i}),\ \ p_1^i((X_n, P_{n-1}) = p_1^i, ..., p_{n-1}^i((X_n, P_{n-1}) = = p_{n-1}^i, p_n^i((X_n, P_{n-1}) = = p_n^i(q = X_{n-1}, P_{n-1}, x^{(n)}))$ назовем *адаптирующим преобразованием* (q, p) координат.

Теорема 9. *Адаптирующее преобразование* $A:\Re^{2mn} \to \Re^{2mn}$ $(X_n, P_{n-1}) = (q(X_n, P_{n-1}), p(X_n, P_{n-1}))$ $q_k^i(X_n, P_{n-1}) = x^{(k-1)i}$ $k = \overline{1,n},$ $p_{n-1}(X_n, P_{n-1}) = p_{n-1}, p_n = p_n(X_{n-1}, P_{n-1}, x^{(n)}))$ невырождено.

Доказательство. Матрица Якоби $\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1}, P_{n-1}, x_n)}$ с невырожденным гессианом $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right)$ имеет вид:

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1}, P_{n-1}, x_n)} = \begin{pmatrix} E_{m\bullet(2n-1)} & 0^T_{m\times m\bullet(2n-1)} \\ 0_{m\times m\bullet(2n-1)} & \dfrac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

где $E_{m\bullet(2n-1)}$ – единичная матрица, $0_{m\times m\bullet(2n-1)}$ – нуль-матрица, $0^T_{m\times m\bullet(2n-1)}$ – транспонированная нуль-матрица.

В правом нижнем углу матрицы использован основной результат работы [22, с. 150, **теорема 12**]:
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right)^{-1}$ и так как $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\right) = \det^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right) \neq 0$

$\det(\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1},P_{n-1},x_n)}) = \det^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right) \neq 0$, значит, переменные (X_n, P_{n-1}) – независимы, а **Теорема 9** доказана**.**

Определение 3. Рассмотрим отображение $\text{A}:\Re^{2mn} \to \Re^{2mn}$ $A(X_n,P_{n-1}) = (q(X_n,P_{n-1}), p(X_n,P_{n-1}))$ $q_k^i(X_n,P_{n-1}) = x^{(k-1)i}$ $k=\overline{1,n}$, $p_{n-1}(X_n,P_{n-1}) = p_{n-1}, p_n = p_n(X_{n-1},P_{n-1},x^{(n)}))$. Отображение A^{-1}, обратное к отображению A: $\text{A}^{-1}:(q,p) \to (X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$ $\text{A}^{-1}(q,p) = (x^{(k-1)i}(q,p) = q_k^i\ \ k=\overline{1,n}$; $x^{(n)i}(q,p) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$; $p_l^i(q,p) = p_l^i\ \ l=\overline{1,n-1})$, называется *обратным адаптирующим преобразованием координат* (преобразованием Лежандра).

Определение 4. Пусть $H(q,p):\Re^{2mn} \to \Re$ – функция Гамильтона, $L_1(X_n,P_{n-1}):\Re^{2mn} \to \Re$ – *адаптированная* к ней функция Лагранжа. Систему уравнений $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}) = 0$, $i=\overline{1,m}$ назовем системой уравнений Эйлера – Лагранжа, *адаптированной* к функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn} \to \Re$, где D_t^k – оператор k-кратного полного дифференцирования по переменной t.

Теорема 10. Пусть выполнены три условия:

1) $H:\Re^{2mn} \to \Re$ – функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$. $L(q,p) = -H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$, двойственная к $H:\Re^{2mn} \to \Re$ функция Лагранжа;

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ в окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0) по **теореме 4, п. 2** $p_n = p_n(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},x^{(n)}) = p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$;

3) пусть $L_1:\Re^{2mn} \to \Re$ – *адаптированная функция Лагранжа* переменных (X_n,P_{n-1}): $L_1(X_n,P_{n-1}) = $ $= L(q_1^i = x^{(0)i}, q_2^i = x^{(1)i}, \ldots, q_n^i = x^{(n-1)i}, P_{n-1}, p_n = p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})) = L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$.

Тогда преобразование Лежандра (*обратное адаптирующее преобразование координат*) $\text{A}^{-1}:(q,p) \to (X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$; $\text{A}^{-1}(q,p) = (x^{(k-1)i}(q,p) = q_k^i\ \ k=\overline{1,n}$; $x^{(n)i}(q,p) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$; $p_l^i(q,p) = p_l^i\ \ l=\overline{1,n-1}$ любого решения $(q(t),p(t))$ системы ОДУ 1-ого порядка Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{dq_k^i(t)}{dt} = \frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p_k^i} \\ \frac{dp_k^i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q_k^i} \end{cases} \quad i=\overline{1,m}, k=\overline{1,n}, \tag{34}$$

$$(X_n(t),P_{n-1}(t)) = A^{-1}(\ (q(t),p(t))\ ) = (x^{(k-1)i}(q(t),p(t)) = q_k^i(t)\ \ k=\overline{1,n},$$

$$x^{(n)i}(q(t),p(t)) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}(q(t),p(t))\ ;\ \ p_l^i(q(t),p(t)) = p_l^i(t)\ \ l=\overline{1,n-1}$$

является решением *адаптированной системы уравнений Эйлера – Лагранжа*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}) = 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Доказательство. По **теореме 8** $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = (1-\delta_n^k)\, \dot{p}_{k+1}^j + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$, по **теореме 7, п. 3** $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(m)j}} = p_n^j$, где $\delta_k^0 = \begin{cases} 1,\ 0 = k \\ 0\ ,\ 0 \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера.

При $0 < 1 \le k \le n-1 < n \Rightarrow \delta_n^k = 0 = \delta_k^0 \Rightarrow 1 - \delta_k^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D_t^k \Big(\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}\Big) = (-1)^0 \cdot \frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(0)i}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k \Big(\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}\Big) + (-1)^n D_t^n \left(\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(n)i}}\right) =$$

$$+(-1)^n D_t^n (p_n^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k ((1-\delta_n^k)\, \dot{p}_{k+1}^i + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^i + p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^i) + (-1)^k D_t^k (p_k^i)) =$$

$$= \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (\dot{p}_{k+1}^i) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^{k+1} (p_{k+1}^i) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) + \sum_{l=2}^{n} (-1)^{l-1} D_t^l (p_l^i) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) +$$

$$(-1)\cdot \sum_{l=2}^{n} (-1)^l D_t^l (p_l^i) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) = \dot{p}_1^i + (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) - (-1)^n D_t^n \left(p_n^i\right) - \sum_{l=2}^{n-1} (-1)^l D_t^l (p_l^i) +$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) + (-1)^{k=1} D_t^{k=1} (p_{k=1}^i) = \dot{p}_1^i - \sum_{l=2}^{n-1} (-1)^l D_t^l (p_l^i) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k D_t^k (p_k^i) + (-1)^{k=1} D_t^{k=1} (p_{k=1}^i) =$$

$$= \dot{p}_1^i + (-1)^1 D_t^1 (p_1^i) = \dot{p}_1^i - \dot{p}_1^i = 0\ .$$

Теорема 10 доказана.

В качестве численных методов проверки невырожденности блочно-диагональной матрицы из теоремы 9 можно использовать результаты работы «Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений»[1].

Заключение. Основным полученным результатом является теорема 9, в которой старые значения координатно-импульсного пространства выражаются через новые значения с помощью блочной матрицы, где один из блоков представляет собой гессиан от функции Лагранжа, обратный к гессиану от функции Гамильтона. Дополнительным блоком к нему на главной диагонали является единичная матрица.

Таким образом, получены достаточные условия для обратной теоремы Гамильтона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Изв. Ин-та матем. и информ. Удмурт. гос. ун-та. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : МГУ, 1989. – 203 с.

[1] Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений / Н.К. Волосова [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.

9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Сер. «Проблемы геометрии» : ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко, А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк : ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2019.
19. Пастухов, Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундам. и прикл. матем. – 2001. – Т. 7, вып. 1. – С. 285–288.
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
21. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк : ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
22. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2018. – № 4. – С. 137–153.

Поступила 17.09.2019

HAMILTON INVERSE THEOREM

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The solution of a system 2mn ordinary differential Hamilton's equations of the first order are solutions of the system of the corresponding system of m differential equations of order n Euler-Lagrange dual for the Hamiltonian Lagrangian function and the corresponding transformation of variables.

Keywords: *Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.*