

УДК 629.07

КВАТЕРНИОННЫЙ БАЗИС ДЛЯ АЛГОРИТМА БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ БПЛА

д-р физ.-мат. наук, доц. К.В. КОЗАДАЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Рассмотрена возможность применения кватернионного базиса для описания поворотов беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) вокруг центра масс, что позволяет компенсировать известные недостатки использования углов Эйлера – Крылова, такие как нетранзитивность последовательных поворотов и «шарнирный замок».

Ключевые слова: кватернионы, бесплатформенная инерциальная навигационная система, ориентация в пространстве.

Одной из принципиальных сложностей реализации навигационного программного обеспечения для автономных пилотажных комплексов является использование для описания динамики БПЛА одновременно нескольких систем координат (СК) [1; 2]. Для решения этой проблемы применяется алгоритм бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), позволяющий осуществлять перерасчет параметров движения БПЛА в используемых системах [2–4].

Традиционно для задач описания поворота твердого тела относительно центра масс в механике применяются углы Эйлера – Крылова, которые посредством построения соответствующих матриц поворотов позволяют пересчитывать параметры ориентации твердого тела при его повороте [5]. Такое описание обладает несколькими недостатками, сужающими область применения этого подхода в навигации.

Целью данной работы является построение альтернативного подхода к описанию поворотов для алгоритма БИНС на основе кватернионного базиса [6], который позволит устранить ряд недостатков описания ориентации БПЛА при вращении на основе углов Эйлера – Крылова, в частности, нетранзитивность последовательных поворотов и «шарнирный замок».

При описании ориентации малых БПЛА в основном используются три СК:

- жестко сцепленная с корпусом БПЛА связанная СК;
- сопровождающая СК, ассоциированная с центром масс БПЛА;
- геодезическая СК Земли (например, WGS-84) [5; 7; 8].

Связанная СК определяется взаимным расположением осей датчиков (акселерометров, гироскопов, магнитометров и пр.) и элементов фюзеляжа БПЛА. В данной работе предполагается, что соответствующие оси (Ox , Oy , Oz) всех датчиков сонаправлены, и при этом центр СК совпадает с центром масс БПЛА. Ось $Ox_{св}$ направлена вдоль линии, соединяющей центр масс БПЛА и его нос; ось $Oy_{св}$ перпендикулярна оси $Ox_{св}$ в продольной плоскости симметрии БПЛА; ось $Oz_{св}$ образует правую тройку с осями $Ox_{св}$ и $Oy_{св}$. В работе проекции различных параметров на эти оси будут иметь дополнительный индекс «св».

В качестве промежуточной между связанной и геодезической СК применяется сопровождающая СК, центр которой совпадает с центром масс БПЛА; ось Oy_g противоположно направлена вектору ускорения свободного падения; ось Ox_g ориентирована на север перпендикулярно Oy_g ; ось Oz_g образует правую тройку с Ox_g и Oy_g . Здесь и далее в работе проекции различных параметров на эти оси имеют дополнительный индекс «g».

Взаимное положение сопровождающей и связанной СК можно описать с помощью углов Эйлера – Крылова $\vec{\eta}_g = (\vec{\eta}_{xg}, \vec{\eta}_{yg}, \vec{\eta}_{zg}) = (\psi_g, \theta_g, \gamma_g)$, где ψ_g , θ_g , γ_g – курс, крен, тангаж соответственно (рисунок 1).

Сопровождающая СК вращается в пространстве геодезической СК с угловой скоростью, вызванной суточным вращением Земли с модулем угловой скорости Ω . Для определения положения объекта на поверхности Земли используются геодезические координаты. Положение некоторой точки задается широтой B и долготой L . Для летательных аппаратов вводится еще одна координата – высота над уровнем моря H . Широта B определяется углом, образуемым нормалью к референц-эллипсоиду Земли и плоскостью экватора. Референц-эллипсоид представляет собой приближение формы поверхности Земли эллипсоидом вращения, используемое на некотором участке земной поверхности. Долготу L измеряют двугранным углом между плоскостью меридиана, проходящего через точку, и плоскостью Гринвичского меридиана [5; 7].

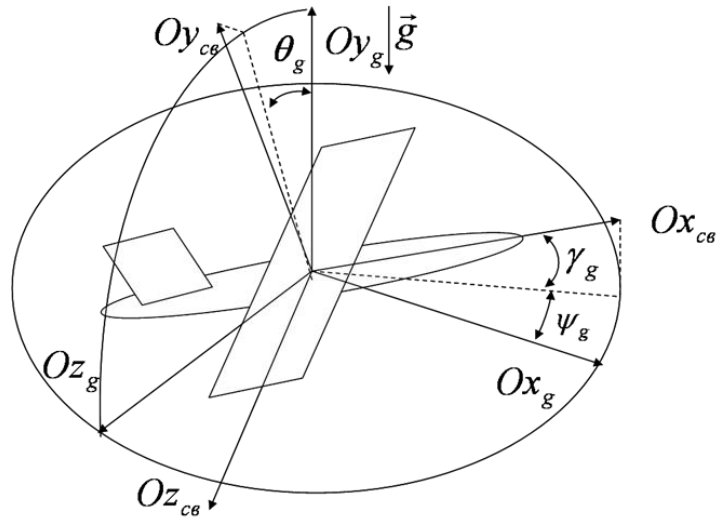


Рисунок 1. – Углы Эйлера – Крылова в качестве параметров ориентации БПЛА

При классическом описании положения твердого тела в пространстве, как правило, постулируется существование у него шести степеней свободы: трех, обусловленных перемещением его центра масс, и трех, относящихся к повороту самого тела вокруг его центра масс. Поворот вокруг центра масс можно представить как поворот некоего базиса $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, жестко связанного с системой, вокруг внешнего фиксированного базиса $I(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ (рисунок 2).

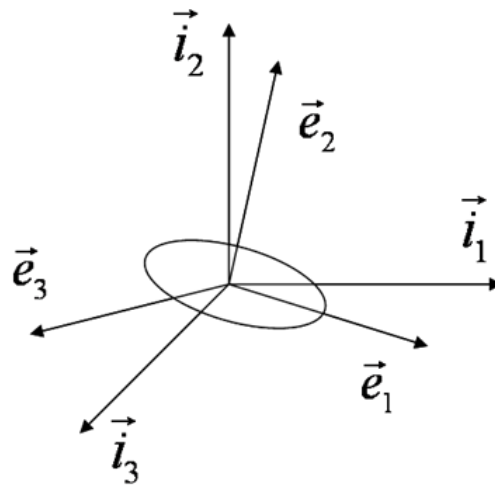


Рисунок 2. – Поворот твердого тела вокруг центра масс

Для описания поворота классически применяется матрица «направляющих косинусов». Пусть при повороте твердого тела вокруг центра масс произошло последовательное изменение углов курса, крена и тангажа на углы α , β и γ соответственно. Такому повороту будет соответствовать следующая матрица перехода [1; 2; 5]:

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Т.е. чтобы от произвольного вектора \vec{a} в некой системе до поворота перейти к его аналогу \vec{a}' после поворота системы, необходимо рассчитать \vec{a}' по формуле $\vec{a}' = M \times \vec{a}$.

Такое описание является классическим в навигационных алгоритмах, однако не лишено недостатков. Основная проблема заключается в отсутствии свойства транзитивности у матричных произведений,

что приводит к неравнозначности результирующего поворота при изменении порядка следования элементарных поворотов курс–крен–тангаж. Т.е. $M(\alpha, \beta, \gamma) \neq M(\alpha, \gamma, \beta)$, что естественным образом сильно сокращает универсальность описания.

Другой проблемой является «складывание рамок» или «шарнирный замок». Дело в том, что при любом заданном выборе последовательности Эйлеровых углов поворота (например, в виде последовательности тангаж, курс, крен) особое положение возникает при угле тангажа, равном $\pi/2$. В этом положении любое непрерывное вращение в пространстве углов Эйлера не может быть представлено непрерывной кривой, что, например, в задаче компенсации внешнего поворота приводит к потере ориентации [5].

Компенсация указанных проблем описания поворотов вокруг центра масс возможна при использовании кватернионного базиса [6], который в силу применения другого математического описания принципиально не обладает указанными недостатками, правда, в отличие от рассмотренных углов Эйлера, не обладает таким же уровнем наглядности.

Каждому повороту объекта на угол φ вокруг оси \vec{b} с направляющими косинусами l, m и n , заданными относительно исходной системы координат, ставятся в соответствие четыре числа, называемые параметрами Родрига – Гамильтона [6]:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \lambda_1 = l \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_2 = m \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_3 = n \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Параметры Родрига – Гамильтона связаны друг с другом выражением $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Кроме этого, они образуют, так называемые, собственные кватернионы – гиперкомплексные числа вида $\Lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$. Величины λ_0 и $i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$ называются скалярной и векторной частями кватерниона соответственно. Кватернионы впервые были введены в математику в 1843 г. В.Р. Гамильтоном при разработке нового аппарата гиперкомплексных чисел, аналогичного аппарату комплексных чисел на плоскости.

С точки зрения алгебры кватернионов поворот базиса I в базис E для каждого конечного момента времени может быть описан следующей операцией преобразования [6]:

$$E = \Lambda \cdot I \cdot \bar{\Lambda}, \quad (3)$$

где Λ и $\bar{\Lambda}$ – кватернион перехода между базисами и сопряженный с ним кватернион соответственно. При этом в зависимости от параметров вращения компоненты кватерниона $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ могут изменяться, однако в каждый момент времени должно выполняться соотношение нормировки $\Lambda \cdot \bar{\Lambda} = 1$.

Бесконечно малый поворот в этом случае имеет вид

$$d\Lambda = 1 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot dt, \quad (4)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости поворота системы $E(t + dt)$ относительно $E(t)$.

Тогда для $\Lambda(t + dt)$ можно записать (5) и (6):

$$\Lambda(t + dt) = \Lambda(t) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \omega_E \cdot dt \right); \quad (5)$$

$$\Lambda(t + dt) = \left(1 + \frac{1}{2} \omega_I \cdot dt \right) \cdot \Lambda(t), \quad (6)$$

где ω_E и ω_I – кватернион-отображения вектора $\vec{\omega}$ на базисы E и I соответственно.

Преобразовывая (5) и (6), получаем кинематические уравнения (7), описывающие поворот твердого тела относительно центра масс [6]:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \cdot \omega_E \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \omega_I \cdot \Lambda \end{cases} \quad (7)$$

Полученное уравнение может использоваться в навигационных алгоритмах для преобразования показаний инерциальных датчиков из собственной связанной системы координат в некоторую внешнюю. В случае, если кватернион Λ описывает переход между базами I и E , для любого трехмерного вектора \vec{N} справедливо соотношение (7):

$$N_E = \Lambda \cdot N_I \cdot \bar{\Lambda} = \Lambda \cdot N_I \cdot \Lambda^{-1}, \quad (7)$$

где N_E, N_I – кватернионные отображения \vec{N} в базах E и I соответственно.

Кватернионное отображение трехмерного вектора в некотором базисе представляет собой кватернион с нулевой скалярной частью, векторная часть которого соответствует представлению вектора в данном базисе.

В силу эквивалентности подходов искомые углы курса, тангажа и крена могут быть выражены через параметры Родрига – Гамильтона на основе выражений

$$\begin{cases} \psi = \tan^{-1} \left(-\frac{2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1} \right) \\ \theta = \sin^{-1} (2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3) \\ \gamma = \tan^{-1} \left(-\frac{2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, взаимное положение двух систем координат помимо трех углов Эйлера – Крылова, девяти направляющих косинусов, можно определить с помощью четырех параметров Родрига – Гамильтона.

При достаточных навыках составления собственных кватернионов, отвечающих последовательности конечных поворотов, можно опускать определение направляющих косинусов оси конечного поворота и формально руководствоваться следующим правилом. Скалярная часть кватерниона всегда отлична от нуля, за исключением случая поворота на угол π . В векторной части кватерниона отлична от нуля компонента, соответствующая оси, вокруг которой происходит поворот. Например, если поворот происходит вокруг оси X , то отлична от нуля компонента при мнимой единице i , аналогично $Y \rightarrow j, Z \rightarrow k$. Если конечный поворот происходит по ходу стрелки часов, то векторная часть кватерниона пишется со знаком «минус» – образуется сопряженный кватернион.

Для описания взаимного положения сопровождающей и связанной с объектом СК могут быть использованы различные кинематические параметры: углы Эйлера – Крылова, направляющие косинусы, параметры Родрига – Гамильтона и др. С математической точки зрения при описании алгоритмов идеальной работы БИНС все эти параметры обеспечивают одинаковые результаты. Различные кинематические параметры можно трактовать как элементы соответствующего линейного пространства, так как все они допускают операции сложения и умножения на число. В каждом линейном пространстве задана операция ортогонального преобразования, позволяющая определить компоненты вектора (элемента пространства) при повороте системы координат. Другими словами, все пространства кинематических параметров изоморфны, т.е. все элементы и операции над ними в одном пространстве имеют взаимнооднозначные аналоги во всех остальных пространствах. С точки зрения реализации численных алгоритмов предпочтение отдается параметрам Родрига – Гамильтона или их систематизирующей гиперкомплексной конструкции – кватерниону. Кинематические уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона линейные, имеют четвертый порядок и определены для любых углов курса, тангажа и крена. Параметры Родрига–Гамильтона подчиняются одному уравнению нормировки, что делает их одним из самых удобных математических формализмов в БИНС.

Кинематические уравнения в углах Эйлера – Крылова имеют невысокий порядок (третий) и понятную структуру, но содержат тригонометрические функции от искомых углов и допускают вырождение при угле тангажа, равном 90° . Все это обуславливает их непригодность в БИНС. Уравнения БИНС, записанные с использованием матрицы направляющих косинусов, – линейные, определены для любых углов курса, тангажа и крена, однако уравнения Пуассона имеют достаточно высокий (девятый) порядок. Кроме того, уравнения Пуассона должны быть дополнены шестью уравнениями связи.

Использование кватернионного базиса в задачах описания динамики летательных аппаратов для построения алгоритма БИНС позволяет нивелировать недостатки традиционного описания поворота твердого тела вокруг центра масс на основе углов ориентации Эйлера – Крылова, которые заключаются

в отсутствии свойства транзитивности у соответствующих матричных произведений, а также наличии так называемого «шарнирного замка». При этом существует взаимно однозначное преобразование параметров Родрига – Гамильтона в углы Эйлера – Крылова и наоборот, что позволяет применять одновременно оба формализма для решения конкретных задач ориентации БПЛА в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grewal, M. Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration / M. Grewal, L. Weill, P. Andrews – London : John Wiley and Sons Inc., 2001. – 392 p.
2. Матвеев, В.В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов ; под общ. ред. В.Я. Распопова. – СПб. : Электроприбор, 2009. – 280 с.
3. Козадаев, К.В. Повышение точности инерциально-спутниковой навигационной системы в режиме неподвижности / К.В. Козадаев, А.Е. Макаренко // Информатика. – 2017. – № 2 – С. 113–120.
4. Shin, E.-H. Techniques for Low-Cost Inertial Navigation / E.-H. Shin – Alberta : Department of Geomatics Engineering Calgary, 2005. – 206 p.
5. Алешин, Б.С. Ориентация и навигация подвижных объектов / Под общ. ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. – М. : Физматлит, 2006. – 422 с.
6. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
7. Красильщиков, М.Н. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М.Н. Красильщикова и Г.Г. Себрякова. – М. : Физматлит, 2003. – 280 с.
8. Козадаев, К.В. Система определения углов ориентации в пространстве на основе метода RTK / К.В. Козадаев, И.О. Митрахович // Электроника-инфо – № 9. – 2015. – С. 49–52.

Поступила 14.02.2020

QUATERNION BASIS FOR THE ALGORITHM OF A FREEFORM INERTIAL NAVIGATION SYSTEM UAV

K. KOZADAEV

The article is dedicated to the possibility of using a quaternion basis for describing the turns of unmanned aerial vehicles (UAV) around the center of mass, which allows compensating for the known disadvantages of using Euler – Krylov angles, such as the non-transitivity of consequence of turns and the «hinge lock».

Keywords: *quaternions, freeform inertial navigation system, orientation in space.*