УДК 539.3

ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Е. МАРМЫШ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Рассмотрены четыре типа граничных задач (в напряжениях, перемещениях, смешанные граничные условия и граничные условия в виде распределения температурного поля на стенках цилиндра) для толстостенного кругового цилиндра. В каждом из случаев представлены формулы определения напряженного состояния стенки цилиндра и ее радиальных перемещений. Для каждого типа граничных задач применена теория состояния объемной повреждаемости и получены в замкнутом виде формулы для вычисления опасных объемов и интегральной повреждаемости в зависимости от величин давлений, смещений и температур, приложенных к внутренней и внешней стенкам толстостенного цилиндра. Показатели повреждаемости толстостенного цилиндра можно использовать при проектировании и разработке технических систем, в которых цилиндрические элементы подвергаются циклическому нагружению.

***Ключевые слова**: толстостенный цилиндр, напряженно-деформированное состояние, граничные задачи, повреждаемость, опасный объем.*

Введение. В современной инженерной практике проектирования и разработки технических объектов толстостенные цилиндры имеют самое широкое распространение в силу простоты их изготовления любых размеров (диаметра, толщины стенки, длины) и практически из любых материалов. Материал изготовления может быть как однородным изотропным, так и анизотропным, а также многослойным композитом, в зависимости от тех условий, в которых предполагается эксплуатация систем, содержащих толстостенные цилиндры.

Многие системы работают в условиях гармонического или случайного (пульсирующего) циклического нагружения силовым и/или температурным полем, например, газо- и нефтепроводный транспорт, системы жидкостного охлаждения, военная техника, резервуары и проч. Кроме того, цилиндры могут эксплуатироваться в агрессивных средах, в которых материал стенки подвергается коррозионному разрушению.

Первые подходы к расчету напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров были предприняты достаточно давно и на данный момент получены некоторые точные решения по расчету напряжений и деформаций в стенке цилиндра [1]. В настоящее время предпринимаются активные попытки разработки механико-математических моделей прогнозирования предельных состояний и ресурса работы цилиндров. В многом подходы к построению данных моделей являются эмпирическими и полуэмпирическими, основанными на опыте эксплуатации подобных систем [2–4].

1. Граничная задача для толстостенного цилиндра в напряжениях. Граничная задача для толстостенного цилиндра была рассмотрена Г. Ламе и им же впервые было получено аналитическое решение для описания напряженно-деформированного состояния цилиндра. Радиальные σ_r и окружные напряжения σ_θ, возникающие в толстостенном круговом цилиндре, определяются соответственно по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2}B\right] \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2}B\right] \end{aligned}, \quad r_1 \le r \le r_2\,, \tag{1}$$

где E и μ – упругие постоянные;
r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы кругового цилиндра соответственно;
A и B – постоянные, которые определяются из граничных условий.

Радиальное смещение точек стенки цилиндра определяется по формуле

$$u = Ar + \frac{B}{r}\,. \tag{2}$$

Хорошо известно решение, когда на внутренней поверхности цилиндра действует внутреннее давление p_1 $\left(\sigma_r\big|_{r=r_1} = -p_1\right)$, а на наружной поверхности – наружное давление p_2 $\left(\sigma_r\big|_{r=r_2} = -p_2\right)$ [2]:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r^2}\,,$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 \left(p_1 - p_2\right)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} , \tag{3}$$

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 \left(p_1 - p_2\right)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} .$$

2. Повреждаемость и ее численное определение. В общем случае повреждаемость характеризуется тремя параметрами [3]:

– опасным объемом

$$V = \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} dV ; \tag{4}$$

– локальной повреждаемостью в точке среды (ψ)

$$\psi = \frac{\sigma}{\sigma^{(*\lim)}} ; \tag{5}$$

– интегральной повреждаемостью всей среды (Ψ)

$$\Psi = \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} \frac{\sigma}{\sigma^{(*\lim)}} dV . \tag{6}$$

Опасным объемом будем называть объем рассматриваемой среды, в каждой точке которой действующие напряжения σ превышают предельные напряжения $\sigma^{(*\lim)}$. Считая, что действующие напряжения σ определяются функцией радиус-вектора x, т.е. $\sigma = f\left(x\right)$, при вычислении опасного объема приходим к неравенству

$$\sigma = f\left(x\right) \geq \sigma^{(*\lim)} . \tag{7}$$

Таким образом, опасный объем – это множество точек, действующие напряжения в которых удовлетворяют неравенству (7).

В качестве относительной интегральной повреждаемости может быть использовано отношение опасного объема к рабочему V_k [4]

$$\omega_k = \frac{V}{V_k} . \tag{8}$$

Соответственно, простейшие функции накопления повреждаемости во времени для единицы объема и всего опасного объема будут иметь вид

$$d\Psi^{(t)} = \int\limits_t \psi\left(t\right) dt \;\text{ и }\; \Psi^{(V,t)} = \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} \int\limits_t \psi\left(V,t\right) dt dV . \tag{9}$$

Для интегральной оценки повреждаемости могут быть использованы показатели средней по объему повреждаемости и ее изменения во времени

$$\Psi^{(Vav)} = \frac{1}{V} \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} \psi\left(V\right) dV \quad \text{и} \quad \Psi^{(Vav,t)} = \frac{1}{V} \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} \int\limits_t \psi\left(V,t\right) dt dV . \tag{10}$$

Функции (4)–(10) позволяют анализировать объемную повреждаемость систем в различных пространственных областях и во времени.

3. Повреждаемость толстостенного цилиндра при действии внутреннего и внешнего давления. Рассмотрим повреждаемость цилиндра при приложении к нему внутреннего и наружного давления. Для сокращения математических выражений введем следующие обозначения:

$$C_1 = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} , \quad C_2 = \frac{r_1^2 r_2^2 \left(p_1 - p_2\right)}{r_2^2 - r_1^2} . \tag{11}$$

При приложении к цилиндру давления первоначальное разрушение происходит на внутренней поверхности цилиндра, где возникают максимальные растягивающие (окружные) напряжения $\sigma_\theta^{\max}$. Особую опасность представляют случаи, когда на поверхностях цилиндра имеются дефекты и трещины, ориентированные вдоль оси цилиндра [5]. Величина максимальных окружных напряжений с учетом (11) равна

$$\sigma_\theta^{\max} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2}. \tag{12}$$

Вычислим по формулам (4) и (6) опасный объем и повреждаемость цилиндра, используя первую теорию предельных напряжений, т.е. для случая, когда $\sigma_\theta \ge \sigma^{(*\lim)}$. Тогда $\sigma_\theta = C_1 + \dfrac{C_2}{r_{\lim}^2} = \sigma^{(*\lim)}$, откуда

$$r_{\lim} = \sqrt{\frac{C_2}{\sigma^{(*\lim)} - C_1}}. \tag{13}$$

Опасный объем

$$V = 2\pi l \int_{r_1}^{r_{\lim}} r dr = \pi l \left(r_{\lim}^2 - r_1^2 \right), \tag{14}$$

где l – длина нагруженной части цилиндра.

Повреждаемость согласно формуле (6)

$$\Psi = \int_{\sigma \ge \sigma^{(*\lim)}} \frac{\sigma}{\sigma^{(*\lim)}} dV = \frac{1}{\sigma^{(*\lim)}} \int_{\sigma \ge \sigma^{(*\lim)}} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) dV = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \int_{r_1}^{r_{\lim}} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) dr = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \left[C_1 \left(r_{\lim}^2 - r_1^2 \right) + 2C_2 \ln \frac{r_{\lim}}{r_1} \right]$$

или

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \left[\frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \left(r_{\lim}^2 - r_1^2 \right) + \frac{2 r_1^2 r_2^2 \left(p_1 - p_2 \right)}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_{\lim}}{r_1} \right]. \tag{15}$$

Таким образом, исходя из теории максимальных растягивающих напряжений, в случае напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра, определяемого формулами (3), повреждаемость описывается выражениями (14) и (15).

4. Граничные условия в перемещениях и повреждаемость. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние толстостенного кругового цилиндра в случае, когда граничные условия заданы в перемещениях. Предположим, что к внутренняя стенка цилиндра смещена на величину u_1, а наружная – на величину u_2, т.е. граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} u\big|_{r=r_1} = u_1, \\ u\big|_{r=r_2} = u_2. \end{cases} \tag{16}$$

Для определения напряженного состояния толстостенного цилиндра в случае, когда граничные условия заданы в перемещениях, используем решение (2). Тогда $u_1 = Ar_1 + \dfrac{B}{r_1}$, $u_2 = Ar_2 + \dfrac{B}{r_2}$, откуда

$$A = \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{r_1 r_2 \left(r_1 u_2 - r_2 u_1 \right)}{r_1^2 - r_2^2}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в формулы (1), получим выражения для определения радиального и окружного напряжения

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{1-\mu}{r^2} \cdot \frac{r_1 r_2 \left(r_1 u_2 - r_2 u_1 \right)}{r_1^2 - r_2^2} \right], \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{1-\mu}{r^2} \cdot \frac{r_1 r_2 \left(r_1 u_2 - r_2 u_1 \right)}{r_1^2 - r_2^2} \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Введя обозначения

$$D_1 = \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad D_2 = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{r_1 r_2 \left(r_1 u_2 - r_2 u_1 \right)}{r_1^2 - r_2^2}, \tag{19}$$

для вычисления опасного объема и повреждаемости толстостенного цилиндра можно воспользоваться формулами (13)–(15), подставив вместо постоянных C_1 и C_2 выражения для D_1 и D_2 из (19). Тогда $r_{\lim} = \sqrt{\dfrac{D_2}{\sigma^{(*\lim)} - D_1}}$

и
$$\Psi = \frac{\pi l E}{\sigma^{(*\lim)}}\left[\frac{1}{1-\mu}\cdot\frac{r_1u_1 - r_2u_2}{r_1^2 - r_2^2}\left(r_{\lim}^2 - r_1^2\right) + \frac{2}{1+\mu}\cdot\frac{r_1r_2\left(r_1u_2 - r_2u_1\right)}{r_1^2 - r_2^2}\ln\frac{r_{\lim}}{r_1}\right]. \tag{20}$$

5. Смешанные граничные условия и повреждаемость. В ряде практических задач, например, при исследовании составных толстостенных цилиндров, граничные условия можно задать в смешанном виде. Рассмотрим два случая задания граничных условий в напряжениях и перемещениях:

1) на внутренней поверхности цилиндра действует давление p_1, а внешняя поверхность смещена на величину u_2, т.е.

$$\begin{cases} \sigma\big|_{r=r_1} = -p_1, \\ u\big|_{r=r_2} = u_2; \end{cases} \tag{21.1}$$

2) внутренняя поверхность цилиндра смещена на величину u_1, а на внешней поверхности действует давление p_2, т.е.

$$\begin{cases} u\big|_{r=r_1} = u_1, \\ \sigma\big|_{r=r_2} = -p_2. \end{cases} \tag{21.2}$$

Решая систему уравнений (1), (2), получим следующие выражения для коэффициентов A и B:

$$A = (-1)^i \frac{r_iu_i - p_jr_j^2(1+\mu)/E}{r_j^2(1+\mu)/(1-\mu) + r_i^2},$$
$$B = (-1)^i \frac{r_ir_j^2\left[u_i + p_jr_i(1-\mu)/E\right]}{r_j^2 + r_i^2(1-\mu)/(1+\mu)},$$

где набор индексов $\{i, j\} = \{1,2\}$ для случая граничных условий (21.1) и $\{i, j\} = \{2,1\}$ для случая граничных условий (21.2).

Введем следующие обозначения:

$$F_1 = (-1)^i \frac{r_iu_iE - p_jr_j^2(1+\mu)}{r_j^2(1+\mu) + r_i^2(1-\mu)},$$
$$F_2 = (-1)^i \frac{r_ir_j^2\left[u_iE + p_jr_i(1-\mu)\right]}{r_j^2(1+\mu) + r_i^2(1-\mu)}. \tag{22}$$

Учитывая обозначения (22), объем можно определить по формуле (13), где $r_{\lim} = \sqrt{\dfrac{F_2}{\sigma^{(*\lim)} - F_1}}$.

Аналогичным образом можно получить и формулу для вычисления повреждаемости кругового толстостенного цилиндра

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\lim)}}\left[F_1\left(r_{\lim}^2 - r_1^2\right) + 2F_2\ln\frac{r_{\lim}}{r_1}\right]. \tag{23}$$

6. Повреждаемость цилиндра в температурном поле. Как уже было отмечено во введении, толстостенные цилиндры, входящие в состав различных технических объектов, зачастую, кроме силового нагружения, подвергаются воздействию температурных полей. Рассмотрим вопрос определения повреждаемости цилиндра в стационарном температурном поле. Предположим, что внутренняя стенка кругового толстостенного цилиндра нагрета до температуры T_1, а внешняя – до температуры T_2. Введем обозначение для разности температур на стенках цилиндра $T^* = T_1 - T_2$.

Одним из самых простых способов определения температуры в стенке цилиндра является предположение, что температурное поле линейно в зависимости от радиуса. Используя линейную интерполяцию для значений T_1 и T_2, получим следующий закон распределения

$$T(r) = T^* \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \tag{24}$$

Для линейного закона распределения температурного поля (24) по стенке кругового цилиндра и при отсутствии внутреннего и внешнего давлений окружное напряжение определяется по формуле [10]

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right], \tag{25}$$

где E – модуль упругости;

μ – коэффициент Пуассона;

α – температурный коэффициент линейного расширения.

Для определения показателя интегральной повреждаемости воспользуемся формулой (6). Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\sigma^{(*\lim)}} \int\limits_{\sigma \geq \sigma^{(*\lim)}} \sigma_\theta(r)\,dr = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \int\limits_{r_1}^{r_{\lim}} \sigma_\theta(r)\,dr.$$

После подстановки формулы (25) в последнее выражение, интегрирования и элементарных преобразований выражение для вычисления интегральной повреждаемости примет вид

$$\Psi = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[r_{\lim}^2 - \frac{r_1^3}{r_{\lim}} - \left(r_{\lim} - \frac{r_1^2}{r_{\lim}}\right)\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right]. \tag{26}$$

Иногда принимают, что в толстостенных цилиндрах температура изменяется по логарифмическому закону, устанавливаемому теорией теплопередачи [11; 12]:

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \ln\frac{r_2}{r}.$$

В данном случае, при отсутствии внешнего и внутреннего давления на стенки цилиндра, окружное напряжение определяется по формуле [10]

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1 - \ln\frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]. \tag{27}$$

Интегрирование последнего выражения позволяет определить показатель интегральной повреждаемости участка цилиндра длиной l

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\lim)}} \frac{E\alpha T^*}{(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[r_1 \ln\frac{r_2}{r_1} - r_{\lim}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(r_1 - r_{\lim} - \frac{r_2^2}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_{\lim}}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]. \tag{28}$$

Отметим, что в обоих случаях стационарного распределения температурного поля по стенке кругового толстостенного цилиндра опасный объем можно определить по формуле (14). Величина радиуса $r_{\lim}$ в формулах (26) и (28) определяется из неравенства $\sigma_\theta \geq \sigma^{(*\lim)}$, т.е. превышения действующих окружных напряжений, вызванных температурным полем некоторой выбранной предельной величины. Для линейного закона распределения температуры по стенке цилиндра предельный радиус $r_{\lim}$ определяется из неравенства для выражения (25), для логарифмического закона – из неравенства для выражения (27). Для решения получившегося неравенства можно использовать один из известных численных методов решения нелинейных алгебраических уравнений.

Заключение. При анализе повреждаемости твердого тела по формулам (4)–(6) получить аналитические выражения в большинстве случаев затруднительно в силу сложности выражений для напряжений и/или в силу невозможности определения геометрической формы опасного объема. В таких ситуациях используют численные подходы к вычислению и анализу повреждаемости твердого тела [9]. В случае напряженного состояния толстостенного кругового цилиндра опасный объем также имеет форму кругового цилиндра. При анализе повреждаемости по первой теории предельных напряжений выражения (4) и (6) можно проинтегрировать и получить формулы для вычисления показателей опасного объема и интегральной повреждаемости в замкнутом виде.

В работе были рассмотрены задачи вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости для четырех типов граничных условий (в напряжениях, в перемещениях, смешанные граничные условия и граничные условия в виде распределения температурного поля на стенках цилиндра). Во всех четырех случаях величина опасного объема определяется по формуле (14). Величина интегральной повреждаемости толстостенного цилиндра вычисляется по формулам (15), (20) и (23) для случая силового нагружения, а в случае температурного нагружения – по формулам (26) или (28) в зависимости от принятого закона распределения температуры по стенке цилиндра.

Теоретические показатели повреждаемости толстостенного цилиндра можно использовать при проектировании и разработке технических систем, в которых цилиндрические элементы подвергаются силовому и/или температурному циклическому нагружению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mott, R.L. Applied strength of materials / R.L. Mott. – 5th ed. – Prentice Hall, 2007. – 800 p.
2. Damage and fracture mechanism of aluminium alloy thick-walled cylinder under external explosive loading / Y. Yang [et al.]. // Material science and engineering. – 2008. – Vol. 490 (1–2). –P. 378–384.
3. Lvov, G. Effect of material damage on autofrettage of thick-walled cylinder / G. Lvov, O. Kostromitskaya // Universal journal of mechanical engineering. – 2014. – Vol. 2 (2). – P. 44–48.
4. Пронина, Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии / Ю.Г. Пронина // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – № 71. – С. 129–135.
5. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
6. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
7. Щербаков, С.С. Новая модель износа / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский // Вестн. Белорус. гос. ун-та транспорта. Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 74–82.
8. Миронов, А.А. Модель разрушения оболочек с поверхностными трещинами / А.А. Миронов, В.М. Волков // Проблемы прочности и пластичности / Ун-т Лобачевского. – Нижний Новгород, 2006. – Вып. 68. – С. 45–52.
9. Мармыш, Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы / Д.Е. Мармыш // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2017. – Вып. 32. – С. 312–316.
10. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко. – 5-е изд. – Киев : Вища шк., 1986. – 775 с.
11. Юдаев, Б.Н. Теплопередача / Б.Н. Юдаев. – М. : Высш. шк., 1981. – 319 с.
12. Петухов, Б.С. Вопросы теплообмена / Б.С. Петухов. – М. : Наука, 1987. – 280 с.

Поступила 12.02.2020

DAMAGEABILITY OF A THICK WALL CYLINDER FOR DIFFERENT TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS

D. MARMYSH

The paper considers four types of boundary value problems (in stresses, displacements, mixed boundary conditions and boundary conditions in the form of a temperature field distribution on the cylinder walls) for a thick-walled circular cylinder. In each case, formulas for determining the stress state of the cylinder wall and its radial displacements are presented. For each type of boundary value problem, the theory of the state of volumetric damageability is applied and closed formulas for calculating dangerous volumes and integral damage are obtained depending on the pressure and displacements applied to the inner and outer walls of a thick-walled cylinder. Damageability indicators of a thick-walled cylinder can be used in the design and development of technical systems in which cylindrical elements are subjected to cyclic loading.

Keywords: *thick-walled cylinder, stress-strain state, boundary problems, damageability, dangerous volume.*