

УДК 517.58:519.722

**ПОПРАВКИ К ФОРМУЛЕ СТИРЛИНГА,
ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЭКСЦЕССАМИ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

*д-р техн. наук, проф. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА, О.Н. ЗАБЕЛЕНДИК, Т.С. СТРУК
(Полоцкий государственный университет)*

В работе развит основанный на теории информации и методе статистических моментов подход к получению формулы Стирлинга для факториалов с большими аргументами. Обоснована процедура поиска поправок к асимптотическому выражению Стирлинга, обусловленных эксцессами гамма распределения случайной величины. С ее помощью получена приближенная формула для вычисления $n!$, относительная погрешность которой убывает с ростом аргумента, как $1/n^3$.

Ключевые слова: формула Стирлинга, энтропия, гамма распределение, эксцессы высших порядков.

Введение. При компьютерном моделировании природных и технологических процессов (например, динамики сорбции [1]) возникает необходимость вычисления факториалов с большими аргументами. При этом возможности прикладных пакетов имеют ограничения по максимальным значениям фигурирующих в числовых расчетах величин [2]. Преодолеть эту трудность можно разбив $n!$ на группу множителей, каждый из которых участвует в расчетах автономно. В частности, сделать это можно с помощью асимптотической формулы Стирлинга, поправки к которой необходимо учитывать для обеспечения требуемой точности вычислений. Обоснованию процедуры их получения, основанной на методе статистических моментов, посвящена данная публикация.

Получение асимптотического выражения. С помощью n -кратного интегрирования по частям и правила Лопиталья можно убедиться в справедливости цепочки равенств

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \dots = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Разделив левую и правую части (1) на $n!$ получим равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx = 1, \quad (2)$$

которое можно интерпретировать как условие нормировки для плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \quad (3)$$

некоторой неотрицательной случайной величины X [3]. С помощью (1), (3) найдем ее математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad (4)$$

дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2),$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1, \quad (5)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n+1}. \quad (6)$$

То, что $M(X)$ и $D(X)$ аддитивно зависят от n с учетом свойств математического ожидания и дисперсии означает, что X представляет собой сумму $n+1$ независимых случайных слагаемых X_i с единичными математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями

$$M(X_i) = \sigma(X_i) = 1. \quad (7)$$

Свойством (7) обладают случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону

$$f_i(x) = e^{-x}, \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

что согласуется с формулой (3) при $n=0$. То есть, полагая в (3)–(6)

$$m = n + 1, \tag{8}$$

получим плотность вероятности суммы m независимых экспоненциально распределенных случайных слагаемых

$$f(m, x) = \frac{1}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-x} \quad (m = 1, 2, \dots), \tag{9}$$

известную как гамма-распределение с m степенями свободы [3].

Согласно (4), (6) при больших m слева от матожидания в области возможных значений X помещается сколь угодно много среднеквадратических отклонений

$$(M(X) - 0) / \sigma(X) = \sqrt{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty,$$

то есть, в соответствии с неравенством Чебышева [3], область возможных значений X из полубесконечной ($x \in [0, \infty)$) при $m \rightarrow \infty$ превращается как бы в бесконечную. На ней максимум энтропии обеспечивается нормальным распределением [3; 4]

$$f(m, x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}. \tag{10}$$

В справедливости последних рассуждений можно убедиться и непосредственно, вычислив с помощью (1), (9) асимметрии и эксцессы функции распределения. Для этого потребуются начальные

$$v_k(m) = \int_0^\infty x^k f(m, x) dx = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty x^{m-1+k} e^{-x} dx = \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!} = m(m+1)\dots(m-1+k) \tag{11}$$

и центральные моменты высших порядков

$$\mu_k(m) = \int_0^\infty (x - v_1(m))^k f(m, x) dx = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_k^i \cdot v_{k-i}(m) \cdot v_1^i(m) + (-1)^k (1-k) v_1^k(m), \tag{12}$$

где C_k^i – числа сочетаний из k объектов по i .

В частности, из (6), (10), (11) и (12) следует, что

$$\mu_0(m) = 1, \quad \mu_1(m) = 0, \quad \mu_2(m) = 1, \tag{13}$$

как и при любой плотности вероятности, а все асимметрии и эксцессы

$$A_{2k+1}(m) = \frac{\mu_{2k+1}(m)}{m^{(2k+1)/2}}, \quad E_{2k+2}(m) = \frac{\mu_{2k+2}(m)}{m^{k+1}} - 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

являются бесконечно малыми при $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} A_3(m) &= \frac{2}{m^{1/2}}, & A_5(m) &= \frac{20}{m^{3/2}} + \frac{24}{m^{5/2}}, & A_7(m) &= \frac{210}{m^{5/2}} + \frac{924}{m^{7/2}} + \frac{720}{m^{9/2}}, \dots; \\ E_4(m) &= \frac{6}{m}, & E_6(m) &= \frac{130}{m} + \frac{120}{m^2}, & E_8(m) &= \frac{2380}{m} + \frac{7308}{m^2} + \frac{5040}{m^3}, \end{aligned} \tag{14}$$

что соответствует нормальной асимптотике (10).

Подставив в (10) любое x из интервала, обеспечивающего для нормального закона практически весь вклад в энтропию (например $x = m$), получим с учетом (9)

$$\frac{1}{(m-1)!} m^{m-1} e^{-m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}, \quad (15)$$

откуда, пренебрегая единицами по сравнению с m , получим асимптотическое выражение для факториалов с большими аргументами

$$m! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m}, \quad (16)$$

известное, как формула Стирлинга [5].

Получение поправок. Уточнить правую часть (16) можно, получив поправки к асимптотике (15), обусловленные эксцессами гамма-распределения¹

$$\frac{\mu_{2k}(\tau)}{m^k} \equiv \int_{-\sqrt{m}}^{\infty} \xi^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)}{m^i} \right) d\xi, \quad (17)$$

где

$$\xi(m, x) = (x - m) / \sqrt{m}, \quad (18)$$

а $\varphi_i(\xi)$ – некоторые функции, раскладываемые по четным степеням ξ

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{l=0}^{3i} c_{il} \xi^{2l} \quad (19)$$

и подлежащие определению с помощью (14)².

Тождество (17) должно выполняться при любых, в том числе и бесконечно больших, m . При этом важно, что $\int_{-\infty}^{-\sqrt{m}} \xi^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $1/m^i$, в чем легко убедиться с помощью правила Лопиталья

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^{-\sqrt{m}} \xi^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi}{1/m^i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^n e^{-\frac{m}{2}}}{-i\sqrt{2\pi}/m^{i+1}} = \frac{1}{-i\sqrt{2\pi}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{n+i+1}}{e^{m/2}} = 0.$$

С учетом этого обстоятельства выполним интегрирование в (17):

$$\frac{\mu_{2k}(\tau)}{m^k} \equiv I(k) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^i} \sum_{l=0}^{3i} I(k+l) c_{il}, \quad (20)$$

где

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1), & n = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases}.$$

В частности, полагая в (20) $k = 0, 1, 2, 3$ и приравнивая коэффициенты при $1/m$ в левой и правой части полученных равенств, запишем с учетом (13), (14), (19) систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_{il} . Ее решение, записанное в матричной форме, имеет вид

¹ Асимметрии вклада не дадут, ибо их учет добавляет в (10) слагаемые, нечетные относительно математического ожидания, т.е. обращающиеся в ноль при $x = m$.

² При этом коэффициенты с более высокими степенями ξ оказываются равными нулю.

$$\hat{c}_1 = \hat{a}_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/12 \\ 1 \\ -7/12 \\ 1/18 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$\hat{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i0} \\ c_{i1} \\ \dots \\ c_{i3i} \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_n = \begin{pmatrix} I(0) & I(1) & \dots & I(n) \\ I(1) & I(2) & \dots & I(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(n) & I(n+1) & \dots & I(2n) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Если попытаться в (19) увеличить старшую степень $\varphi_1(\xi)$ на две единицы, в (20) также следует положить $k=4$. В результате с учетом разложения (14) для $E_8(m)$ вместо (21) получим

$$\begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \end{pmatrix} = \hat{a}_4^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 130 \\ 2380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/12 \\ 1 \\ -7/12 \\ 1/18 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что подтверждает правильность верхнего предела суммирования в (19).

С точки зрения решаемой задачи (уточнение формулы Стирлинга) в (21) существенно лишь найденное $c_{10} = -1/12$ как значение $\varphi_1(\xi)$ при $x = m$ (см. (18), (19)). С учетом этого обстоятельства, а также формул (17)–(19), (21), вместо (15) получим

$$\frac{1}{(m-1)!} m^{m-1} e^{-m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(1 - \frac{1}{12m}\right),$$

что не противоречит имеющимся оценкам погрешности формулы Стирлинга [5]

$$\frac{(m-1)! - \sqrt{2\pi m} m^{m-1} e^{-m}}{(m-1)!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{12m}.$$

Согласно (19), чтобы получить поправку порядка $1/m^2$ кроме имеющихся в (14) потребуются эксцессы

$$E_{10}(m) = \frac{44100}{m} + \frac{303660}{m^2} + \frac{623376}{m^3} + \frac{362880}{m^4}, \quad (23)$$

$$E_{12}(m) = \frac{866250}{m} + \frac{11098780}{m^2} + \frac{47324376}{m^3} + \frac{76998240}{m^4} + \frac{39916800}{m^5}. \quad (24)$$

Последовательно полагая в (20) $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и приравнивая в получаемых таким образом уравнениях коэффициенты при $1/m^2$, с помощью (14), (23), (24) найдем

$$c_{20} = \Delta_1^{(6)} / \Delta^{(6)} = 1/288,$$

где $\Delta^{(6)}$ – определитель матрицы \hat{a}_6 , а $\Delta_1^{(6)}$ получается из него заменой элементов первого столбца свободными членами соответствующей системы линейных алгебраических уравнений $0, 0, 0, 120, 7308, 303660, 11098780$.

Найденное c_{20} позволяет уточнить формулу для приближенного вычисления факториалов

$$(m-1)! \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi m} m^{m-1} e^{-m}}{1 - \frac{1}{12m} + \frac{1}{288m^2}}, \quad (25)$$

снизив оценку относительной погрешности до

$$\frac{\sqrt{2\pi m} m^{m-1} e^{-m}}{(m-1)! \left(1 - \frac{1}{12m} + \frac{1}{288m^2}\right)} - 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{c_{30}}{m^3},$$

где c_{30} – константа в разложении $\varphi_3(\xi)$ по обратным степеням m (см. (19)). Ее значение, найденное с помощью описанной выше процедуры, уже для $m=2$ ($n=1$) позволяет обеспечить погрешность менее 0,1%. Фрагмент программы с результатами соответствующих расчетов представлен на рисунке.

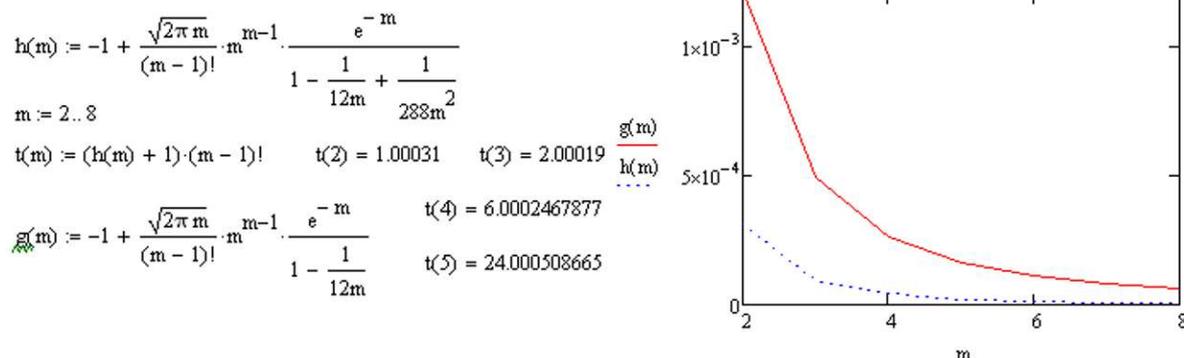


Рисунок. – Относительная погрешность формулы Стирлинга, исправленной с учетом эксцессов 6-го (сплошная кривая) и 12-го (пунктирная кривая) порядков гамма-распределения

Выводы. В работе развит основанный на теории информации и методе статистических моментов подход к получению формулы Стирлинга для факториалов с большими аргументами. Обоснована процедура поиска поправок к формуле Стирлинга, обусловленных эксцессами гамма-распределения случайной величины. С ее помощью получена приближенная формула для вычисления $n!$, относительная погрешность которой убывает с ростом аргумента как $1/n^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ехилевский, С.Г. Нестационарная задача динамики сорбции углекислого газа в регенеративном патроне изолирующего респиратора / С.Г. Ехилевский // Вестн. Фонда фундам. исследований. – 2019. – № 3(89) – С. 57–65.
2. Аладьев, В.З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В.З. Аладьев, Н.А. Гершгорн. – Киев : Техника, 1991. – 246 с.
3. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1969. – 400 с.
4. Ехилевский, С.Г. Экстремальность энтропии, формула Стирлинга и закон больших чисел / С.Г. Ехилевский, Т.С. Рудькова, О.В. Голубева // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : материалы IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых, Тольятти, 23–25 апр. 2018 г. / Тольятт. гос. ун-т. – Тольятти, 2018. – Ч. 1. – С. 461–464.
5. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968.

Поступила 09.12.2020

AMENDMENTS TO THE STIRLING FORMULA, CAUSED BY EXCESSES OF THE GAMMA DISTRIBUTION

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK, T. STRUK

The paper develops an approach based on information theory and the method of statistical moments to obtain the Stirling formula for factorials with large arguments. The procedure for searching for corrections to the Stirling asymptotic expression due to excesses in the gamma distribution of a random variable is justified. It is used to obtain an approximate formula for calculating $n!$, the relative error of which decreases with the growth of n , as $1/n^3$.

Keywords: Stirling formula, entropy, gamma distribution, higher-order excesses.