

УДК 519.6; 551.465

## ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЯ ЛИНИЙ ТОКА ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ РАЗРЕЗУ

канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ; канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)

Численными методами рассматривается двумерная стационарная задача пересчета разреза температурного поля на поле направлений скорости частиц воды. Температурное поле геотермального озера было измерено мостом постоянного тока. Для решения задачи достаточно использовать уравнение теплопроводности с конвективной частью и объемным источником плавучести, уравнение неразрывности, граничные условия для скорости частиц жидкости. Численная задача решается методом прогонки. Для усиления устойчивости используется метод медианной фильтрации горизонтальной компоненты скорости на каждом слое. Новым является понятие связности конвективной струи.

**Введение.** Летом 1992 года на озеро Банное (находится в Узон – Гейзерной долине, расположенной в 100...200 км от города Петропавловска-Камчатского) институтом вулканологии ДВНЦ РАН и физическим факультетом МГУ была организована совместная экспедиция, одной из задач которой являлось измерение температурного поля озера геотермального типа [8; 9]. Геотермальные озера относят к объектам так называемого «активного дна» при взаимодействии литосферы и гидросферы. Исследователей, проводивших комплекс измерений в данном озере и в Узон – Гейзерной долине (а также в кальдере Академии наук), в целом интересовали распределения и перенос химических веществ – радиоактивных газов; общесолевой состав; содержание *Zn, Mn, Fe, Cu, Cr, Al* (Г.А. Карпов, С.М. Файзуллин) [1]. Поскольку перенос водных масс в активных областях связан с переносом больших потоков тепла, то естественно рассматривать задачу массопереноса совместно с теплообменом.

В связи со сказанным в данной работе рассматривается математическая модель теплопереноса в активной области и ее особенности решения.

Так обстоит дело на практике с двумерной стационарной задачей пересчета разреза температурного поля геотермального озера на поле направлений скорости воды. Полностью неявная численная схема, решаемая методом прогонки такова, что требования сходимости, наложенные на коэффициенты уравнения [1; 4], выполняются, но замедляют сходимость решения. Поэтому при нахождении горизонтальной компоненты скорости в геотермальном озере на каждом слое найденное решение подвергается медианной фильтрации для усиления устойчивости. По этой причине мы назвали данную задачу плохо обусловленной. Турбулентный коэффициент температуропроводности и объемная плотность источника плавучести линейно растут с глубиной, что связано с выбросом расплава серы в нижней части озера. Введено понятие связности конвективной струи, позволяющее сравнить значения коэффициента в разных областях температурного поля численными методами. Программа написана на языке FORTRAN[6,7].

**Экспериментальная часть**

Озеро Банное представляет собой мини кратер вулкана, заполненный водой, – эллипсоидная чаша с наибольшей полуосью 20 м и глубиной 24 м. На дне чаши находится расплавленная сера, которая выплескивается в озеро и кристаллизуется на датчике температуры каждый раз при его максимальном погружении. Из озера вытекает ручей с температурой воды 40 °С и расходом 25 л/с. На глубине 13 м найден источник холодной воды, втекающей в озеро с температурой 11,2 °С. Холодная вода, вероятно, попадает в озеро из местного ручья, несущего талые ледниковые воды с температурой 8 °С в 100...150 м от озера. Простой подсчет показывает, что из озера с водой уносится тепловой поток мощностью:

$$P = c_p \rho v \Delta t = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} 25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}} (40 - 11,5)^\circ\text{C} \approx 3 \text{ МВт.}$$

При этом не учитывается интенсивное испарение с поверхности озера с температурой 40 °С в воздух с температурой около 10 °С в ночное и вечернее время. В безветренное время (обычно вечером, ночью и утром) на поверхности озера Банное образуется сульфидная пленка. Расплавленная сера на дне озера порождает несколько конвективных струй, видимых на поверхности по выходу газа и выносу серы из области струи.

**Методика измерения.** По периметру озера через равные промежутки находились кольца от 1 до 14. Вдоль выбранного разреза натягивался канат, который прижимал лодку-плоскодонку к воде и исключал её дрейф. По горизонтали вдоль каната измерения температуры проводились с шагом  $\Delta x = 5$  м. По вертикали измерительный кабель погружался с шагом  $\Delta x = 3$  м. Для исключения раскочки кабель снабжался отвесом (куском железной трубы массой 2 кг). Неточность фиксации узлов координатной сетки составила  $\pm 10$  см. Платиновый датчик температуры имеет предельную рабочую температуру 200 °С и вместе с измерительным мостом сопротивлений обеспечивает абсолютную погрешность температуры  $\Delta T = 0,05$  °С. Каждый разрез температурного поля измерялся в течение  $\Delta t = (2 \dots 3)$  ч.

На разрезе (рис. 1) проведено примерно 30 измерений температуры с равномерным шагом по всему температурному полю. Для установления теплового равновесия платинового датчика каждое измерение производилось не менее 5 минут. Характерный промежуток циркуляции воды в озере оценим как удвоенное время поднятия воды в области струи  $\tau = 200 \frac{H}{w} = 2 \frac{20 \text{ м}}{0,5 \text{ м/с}} = 80 \text{ с}$ . Поскольку  $\tau \ll \Delta t$ , то время измерения  $\Delta t$  является достаточно большим для осреднения процессов теплопереноса всего температурного поля в целом, так и каждое отдельное измерение в несколько раз превышает  $\tau$ . Тогда все величины, определенные по разрезе температурного поля (см. рис. 1), можно считать стационарными (математические уравнения не содержат частной производной по времени). Канат натягивался таким образом, чтобы при измерениях температуры в вертикальной плоскости разреза попали не менее 2 конвективных струй, наблюдаемых по вспучиванию поверхности и выходу газа. Такое условие симметрии задачи позволяет упростить и замкнуть систему уравнений теплопереноса.

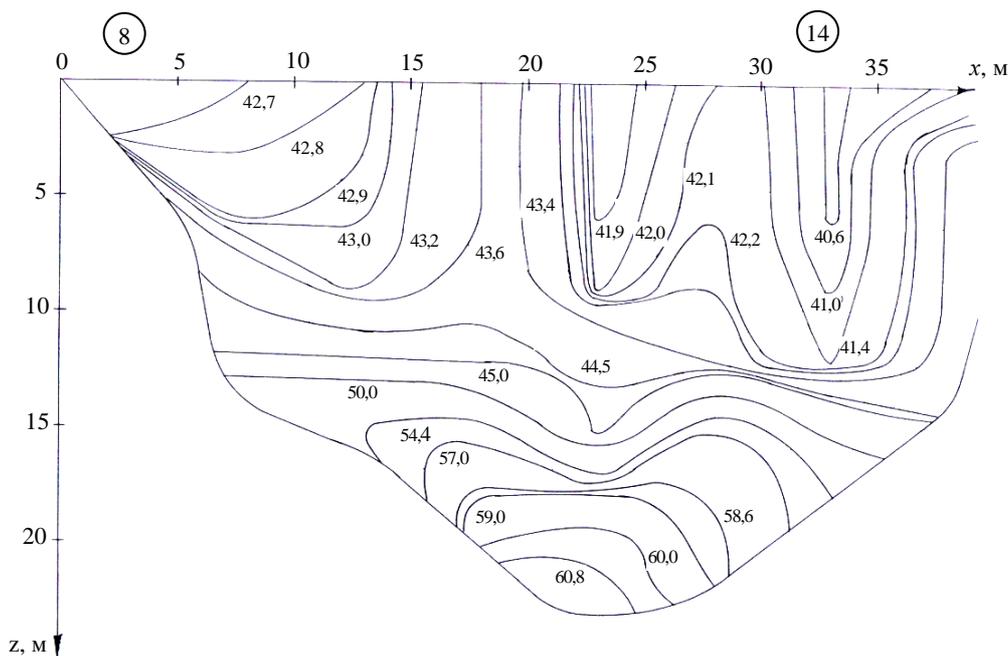


Рис. 1. Разрез температурного поля геотермального озера

Как видно из рисунка 1, присутствует не менее 2 конвективных струй. Эти струи наблюдались в стационарном положении на поверхности озера в течение измерения температурного разреза. Ввиду большого потока тепла через озеро (3 МВт) и плотности потока тепла  $\left( \frac{3 \text{ МВт}}{10^3 \text{ м}^2} = 3 \text{ кВт/м}^2 \right)$  будем считать коэффициенты обмена турбулентными.

#### Математическая постановка задачи

Рассмотрим следующую стационарную, не зависящую от времени задачу тепло- и массопереноса:

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla(\alpha \nabla T) + q, (x, z) \in (0, L) \cdot (0, H); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (x, z) \in (0, L) \cdot (0, H); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u = u(x, z), w = w(x, z), T = T(x, z), (x, z) \in [0, L] \cdot [0, H] \equiv \bar{D}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = w(x, H) = w(0, z) = w(L, z) = 0, u(0, z) = u(L, z) = u(x, H) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Коэффициент температуропроводности } \alpha = \frac{P}{S \frac{\partial T}{\partial z} c_p \rho} = \frac{1 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{10^3 \text{ м}^2 \left( \frac{20 \text{ К}}{20 \text{ м}} \right) 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \sim 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

(см. рис. 1), где  $S$  – площадь поверхности озера;  $\frac{\partial T}{\partial z}$  – вертикальная компонента градиента температуры;

$P \sim 10^6$  Вт – мощность источника плавучести в озере [9];  $c_p$  – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении;  $\rho$  – плотность воды.

Коэффициент температуропроводности  $\alpha$  фактически определяется мощностью источника плавучести  $P$ , то есть  $\alpha = \alpha(P)$ .

Первое уравнение (1) в системе есть уравнение теплопроводности с конвективной частью и источником мощности на единицу объема  $q$ , деленной на  $(c_p \cdot \rho)$ ;  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)$  – градиент температуры;  $(u, w)$  – вектор скорости жидкой частицы, то есть ее горизонтальная и вертикальная компоненты соответственно;  $L, H$  – диаметр и максимальная глубина озера соответственно.

Уравнение (2) – уравнение неразрывности.

Компоненты скорости и температурное поле зависят от координат  $x, z$  на прямоугольнике  $[0, L] [0, H]$  – третье условие (3) (мы рассматриваем двумерную задачу).

Четвертое условие – граничные условия для компонент скорости на сторонах прямоугольника (4). Все величины имеют размерность в системе СИ.

Особенностью данной задачи является известное, измеренное поле температуры, а следовательно и частные первые и вторые производные температуры, интерполированные на области прямоугольника. На поверхности раздела озера отсутствует вертикальная компонента скорости. На боковых сторонах прямоугольника и на нижней стороне (дно) обе компоненты скорости равны нулю.

Вообще говоря, координатная область озера  $D$  не является прямоугольником. Но мы доопределяем вертикальный разрез озера до прямоугольника по правилу:

$$\begin{cases} T'(x, z) = T(x, z), & (x, z) \in D \subset \bar{D}; \\ T'(x, z') = T(x', z'), & (x, z') \in D \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

В прямоугольнике  $\bar{D}$  температурное поле обозначено  $T'(x, z)$ . Вне области озера  $D \setminus \bar{D}$  температура доопределяется по непрерывности ее значением в граничной точке  $(x', z')$  и представляет собой горизонтальную изотерму. Так ведет себя температурное поле в твердой однородной породе, окружающей озеро, с вертикальным потоком тепла. Обоснованность такого приема – метода фиктивных областей – можно встретить в [2, с. 204]. В дальнейшем поле  $T'(x, z)$  обозначаем  $T(x, z)$ .

Нас будет интересовать более узкая задача – определение поля направлений по полю скоростей. Такую постановку задачи можно встретить в геологии, геохимии, геодезии и других отраслях.

#### Постановка численной задачи

Первоначально узловые значения температуры были измерены на равномерной прямоугольной сетке с шагом  $dx = L/n$  в  $n+1$  точках по горизонтали и с шагом  $dz = H/n1$  в  $n1+1$  точках по вертикали, где  $L, H$  – длина и высота озера в данном разрезе. Другими словами, задан разрез температурного поля  $T_{k1}^{j1}, j1 = 1, \dots, n1+1, k1 = 1, \dots, n+1$ .

Дополним разбиение прямоугольной области, в которую вписан разрез озера, оставляя старые узлы с измеренной температурой в новой сетке на прежних местах.

В программе удобно выбрать начало координат, совмещенное с правым верхним углом (см. рис. 1), горизонтальную ось  $x$  направить влево, вертикальную  $z$  – вниз, получаем правую координатную систему.

Разобьем каждый малый прямоугольник со сторонами  $h_{01} = \frac{L}{n}, h_{02} = \frac{H}{n1}$  соответственно на  $nx, nz$  целых частей. Прямоугольная сетка с горизонтальным шагом  $h_1 = L/(n \cdot nx)$  и вертикальным шагом  $h_2 = H/(n1 \cdot nz)$  имеет  $n \cdot nx + 1$  узлов по горизонтали и  $n1 \cdot nz + 1$  узлов по вертикали. Программа была написана на языке FORTRAN, в котором целочисленные переменные в массивах принимают значения, начиная с 1. Тогда номер столбца обозначим  $k = 1, \dots, n \cdot nx + 1$ , номер строки  $j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1$ . Температурное поле внутри каждого большого прямоугольника продолжим по непрерывности линейно:

$$T1_k^j = (z_{j1+1} - z_j) \frac{T_{k1}^{j1}(x_{k1+1} - x_k) + T_{k1+1}^{j1}(x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz} + (z_j - z_{j1}) \cdot \frac{T_{k1}^{j1+1}(x_{k1+1} - x_k) + T_{k1+1}^{j1+1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz}; \quad (5)$$

$$k1 = 1, \dots, n, \quad j1 = 1, \dots, n1, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$x_{k1} = dx(k1 - 1), \quad x_{k1+1} = dx \cdot k1, \quad z_{j1} = dz(j1 - 1), \quad z_{j1+1} = dz \cdot j1;$$

$$x_k = (k - 1)h_1, \quad z_j = (j - 1)h_2.$$

Температура  $T_{k1}^{j1}$  в формуле (5) непрерывно переходит в значение температуры в 4 угловых точках каждого большого прямоугольника:

$$T_{k1}^{j1}(j = j1, k = k1), \quad T_{k1+1}^{j1}(j = j1, k = k1+1), \quad T_{k1}^{j1+1}(j = j1+1, k = k1), \quad T_{k1+1}^{j1+1}(j = j1+1, k = k1+1),$$

а также линейна по  $x_k, z_j$ .

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{u_{k+1}^j - u_k^j}{h_1} + \frac{w_k^j - w_k^{j-1}}{h_2} = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad (6)$$

или 
$$z_0(u_{k+1}^j - u_k^j) + w_k^j - w_k^{j-1} = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad z_0 = \frac{h_2}{h_1}.$$

Здесь по координате  $z$  для компоненты скорости  $w$  применяется производная назад, а по координате  $x$  для компоненты  $u$  используется производная вперед [2].

Уравнение теплопроводности:

$$u_k^j f_{1k}^j + w_k^j f_{2k}^j = f_{3k}^j + q_k^j, \quad (7)$$

где  $q_k^j$  – объемная мощность источника плавучести, выделяемая в единице объема, деленная на  $c_p \rho$ .

Размерность  $q_k^j = \left[ \frac{K}{c} \right]$ .

Здесь функция  $f_{1k}^j$  определяется как

$$f_{1k}^j = \frac{T_{k+1}^j - T_{k-1}^j}{2h_1}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad (8)$$

$$f_{1_1}^j = f_{1_2}^j; \quad f_{1_{n \cdot nx+1}}^j = f_{1_{n \cdot nx}}^j; \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Аналогично, определяется функция  $f_{2k}^j$ :

$$f_{2k}^j = \frac{T_{k1}^{j+1} - T_{k1}^{j-1}}{2h_2}, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz; \quad (9)$$

$$f_{2k}^1 = f_{2k}^2; \quad f_{2k}^{n1 \cdot nz+1} = f_{2k}^{n1 \cdot nz}; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1.$$

Функция  $f_{3k}^1$  строится, используя формулу

$$\operatorname{div}(k(z) \cdot \operatorname{grad}(T(x, z))) = k(z) \cdot \Delta T(x, z) + \nabla T(x, z) \cdot \nabla k(z) = k(z) \Delta T(x, z) + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial z} \quad [1; 7], \quad \alpha(z) = k(z)/(c_p \rho),$$

по функции  $f_{03_{k1}}^{j1}$ :

$$f_{03_{k1}}^{j1} = \alpha_{k1}^{j1} \cdot \left( \frac{T_{k1+1}^{j1} + T_{k1-1}^{j1} - 2T_{k1}^{j1}}{dx \cdot dx} + \frac{T_{k1}^{j1+1} + T_{k1}^{j1-1} - 2T_{k1}^{j1}}{dz \cdot dz} \right) + \frac{(\alpha_{k1}^{j1+1} - \alpha_{k1}^{j1-1}) \cdot (T_{k1}^{j1+1} - T_{k1}^{j1-1})}{4dz \cdot dz}, \quad (10)$$

$$j1 = 2, \dots, n1, \quad k1 = 2, \dots, n;$$

$$f_{03_1}^{j1} = f_{03_2}^{j1}; \quad f_{03_{n+1}}^{j1} = f_{03_n}^{j1}; \quad j1 = 2, \dots, n1;$$

$$f_{03_{k1}}^1 = f_{03_{k1}}^2; \quad f_{03_{k1}}^{n1+1} = f_{03_{k1}}^{n1}; \quad k1 = 2, \dots, n;$$

$$f_{03_1}^1 = \frac{f_{03_1}^2 + f_{03_2}^1}{2}, \quad f_{03_1}^{n1+1} = \frac{f_{03_2}^{n1+1} + f_{03_1}^{n1}}{2}, \quad f_{03_{n+1}}^{n1+1} = \frac{f_{03_n}^{n1+1} + f_{03_{n+1}}^{n1}}{2};$$

$$f_{03_{n+1}}^1 = \frac{f_{03_{n+1}}^2 + f_{03_n}^1}{2};$$

$$f_{3_k}^j = (z_{j1+1} - z_j) \cdot \frac{f_{03_{k1}}^{j1} \cdot (x_{k1+1} - x_k) + f_{03_{k1+1}}^{j1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz} + (z_j - z_{j1}) \cdot \frac{f_{03_{k1}}^{j1+1} \cdot (x_{k1+1} - x_k) + f_{03_{k1+1}}^{j1+1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz}; \quad (11)$$

$$k1 = 1, \dots, n, \quad j1 = 1, \dots, n1; \quad k1 = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1,$$

$$x_{k1} = dx(k1 - 1), \quad x_{k1+1} = dx \cdot k1, \quad z_{j1} = dz(j1 - 1), \quad z_{j1+1} = dz \cdot j1,$$

$$x_k = (k - 1)h_1, \quad z_j = (j - 1) \cdot h_2.$$

Видно, что формулы (5) и (11) по построению совершенно одинаковы.

В формуле (10) коэффициент температуропроводности зависит только от глубины [4]:

$$\alpha_{k1}^{j1} = \alpha lfa(j1, k1) = \frac{2 \cdot 10^{-4} (j1 - 1)}{n1} \left[ \frac{M^2}{c} \right], \quad j1 = 1, \dots, n1 + 1.$$

Из формулы (7) выразим вертикальную компоненту скорости:

$$w_k^j = \frac{f_{3_k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1_k}^j}{f_{2_k}^j}. \quad (12)$$

Тогда, формально заменив в (12)  $j$  на  $j - 1$ , получим:

$$w_k^{j-1} = \frac{f_{3_k}^{j-1} + q_k^{j-1} - u_k^{j-1} f_{1_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}}. \quad (13)$$

Выражения (12), (13) подставим в уравнение неразрывности (6):

$$z_0 u_{k+1}^j - u_k^j \left( z_0 + \frac{f_{1_k}^j}{f_{2_k}^j} \right) + u_{k-1}^j \varepsilon = -u_k^{j-1} \cdot \frac{f_{1_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} + \left( \frac{f_{3_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} - \frac{f_{3_k}^j}{f_{2_k}^j} \right) + \left( \frac{q_k^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} - \frac{q_k^j}{f_{2_k}^j} \right). \quad (14)$$

В формуле (14) тождественно  $\varepsilon = 0$ , но положим его малым, не равным нулю.

В формуле (14) избавимся от знаменателя:

$$z_0 u_{k+1}^j f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j - u_k^j \left( z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1} \right) + u_{k-1}^j \varepsilon = -u_k^{j-1} f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1} + \left( f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1} \right) + \left( q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1} \right), \quad (15)$$

$$j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 2, \dots, n \cdot nx; \quad z_0 = h_2 / h_1.$$

В формуле (15)  $\varepsilon = 10^{-10}$  (опущен множитель  $f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}$ ), так как удобно выбрать коэффициент при  $u_{k-1}^j$ , не зависящий от температурного поля. Формула (15) представляет частично неявную схему с трехдиагональной матрицей.

Как показывает анализ численного решения, формула (15) неустойчива относительно метода прогонки. Поэтому перейдем к полностью неявной численной схеме, перенеся влево слагаемое  $u_k^{j-1} f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}$ , и заменим  $u_k^{j-1}$  на  $u_k^j$ :

$$z_0 u_{k+1}^j f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j - u_k^j \left( z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + \left( f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1} - f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} \right) \right) + u_{k-1}^j \varepsilon = \left( f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1} \right) + \left( q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1} \right), \quad (16)$$

$$j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 2, \dots, n \cdot nx.$$

Из формулы (7) на поверхности озера  $w_k^1 = 0$ ,  $q_k^1 = 0$  следует, что

$$u_k^1 = \frac{f_{3_k}^1}{f_{1_k}^1}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx. \quad (17)$$

Метод прогонки позволяет решать итерационные уравнения с трёхдиагональной матрицей, воспользуемся методом в форме [5]:

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad (18)$$

$$x_0 = \lambda_0 x_1 + v_0, \quad x_n = \lambda_n x_{n-1} + v_n; \quad (19)$$

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + v_k, \quad k = 0, \dots, n-1; \quad (20)$$

$$x_n = \frac{\lambda_n v_{n-1} + v_n}{1 - \lambda_n \lambda_{n-1}}; \quad \lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}; \quad v_k = \frac{A_k v_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}. \quad (21)$$

Условие устойчивости численной схемы:

$$|C_k| \geq |A_k| + |B_k| \geq |A_k| > 0, \quad |\lambda_0| < 1, \quad |\lambda_n| \leq 1. \quad (22)$$

Сравнивая уравнения (16) и (18), в данном случае получим:

$$A_k^j = \varepsilon, \quad B_k^j = z_0 f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j, \quad C_k^j = z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + (f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1} - f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}); \quad (18)'$$

$$F_k^j = (f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1}), \quad k = 2, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Так как  $u_1^j = u_{n \cdot nx+1}^j = 0$ , то  $\lambda_1^j = \lambda_{n \cdot nx+1}^j = 0$ ,  $v_1^j = v_{n \cdot nx+1}^j = 0$ ,  $j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1$ .

Прогонка вперед:

$$\lambda_1^j = 0, \quad v_1^j = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$\lambda_k^j = \frac{B_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad v_k^j = \frac{A_k^j v_{k-1}^j - F_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1. \quad (21)'$$

$$u_{n \cdot nx+1}^j = \frac{\lambda_{n \cdot nx+1}^j v_{n \cdot nx}^j + v_{n \cdot nx+1}^j}{1 - \lambda_{n \cdot nx+1}^j \lambda_{n \cdot nx}^j}, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Прогонка назад:

$$\lambda_{n \cdot nx+1}^j = 0, \quad v_{n \cdot nx+1}^j = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

$$u_k^j = \lambda_k^j u_{k+1}^j + v_k^j, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1. \quad (20)'$$

$$u_k^1 = \frac{f_{3_k}^1}{f_{1_k}^1}, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx.$$

В последней формуле  $u_k^j$  может неограниченно возрастать, если  $f_{1_k}^1$  стремится к нулю, поэтому в программе реализован по непрерывности алгоритм  $u_k^1 = u_{k-1}^1$ , если  $f_{1_k}^1 = 0$ .

$$q_k^j = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{j-1}{n1 \cdot nz} \right) \left[ \frac{K}{c} \right], \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Здесь использовалась линейная аппроксимация объемного источника плавучести

$$q(z) = q_0 \cdot \frac{z}{H}$$

и условие нормировки:

$$\int_0^H q(z) dz = \frac{P}{c \rho L^2}.$$

Из условия нормировки получим

$$q_0 = \frac{2P}{c_p \rho L^2 H} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (40 \text{ м})^2 \cdot 20 \text{ м}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{К}}{\text{с}} \right].$$

Кроме того, естественно предположить, что энергия источника плавучести **выделилась** только в частицах воды, если они движутся к поверхности озера:

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} \leq 0; \quad w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} > 0. \quad (12)'$$

Условие устойчивости:

$$|C_k^j| \geq |A_k^j| + |B_k^j| \geq |A_k^j| > 0, \quad |\lambda_1^j| < 1, \quad |\lambda_{n-nx+1}^j| \leq 1, \quad (22)'$$

$$k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Два последних неравенства обеспечивает граничное условие задачи:

$$u_1^j = u_{n-nx+1}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1 (\lambda_1^j = \lambda_{n-nx+1}^j = 0);$$

$$|A_k^j| = \varepsilon > 0.$$

Учитывая непрерывность коэффициентов  $f_{1k}^j$  и  $f_{2k}^j$ , можно ожидать, что значение  $f_{1k}^j \cdot f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j \cdot f_{1k}^{j-1} \approx 0$  в формуле (18)'.  

$$C_k^j = z_0 f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) = B_k^j + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) \approx B_k^j.$$

Добавим к  $C_k^j$  малое  $\pm A_k^j$  и с тем же знаком, что и  $C_k^j (C_k^j \approx C_k^j)$ :

$$|C_k^j| = |C_k^j| + |\varepsilon_1| = |B_k^j| + |A_k^j| \geq |B_k^j| + |A_k^j| \geq |A_k^j|, |\varepsilon_1| = \varepsilon. \quad (22)'$$

Конечно, на практике  $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}|$  не всегда мало, но замечено, что  $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}| < |B_k^j|$ .

Поскольку знак выражения  $(f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1})$  быстро осциллирует и обнуляет свое среднее значение на интервале порядка  $dx$ , то можно применить метод медианной фильтрации на масштабе  $dx$ . Неравенство (22)' фактически превращается в равенство (предельно выполняется условие сходимости), в этом смысле мы назвали задачу плохо обусловленной.

### Описание программы

Все действительные переменные и параметры имеют двойную точность: *Real* (8). Для стабилизации устойчивости численной задачи (18)–(21)' применялся метод медианной фильтрации. Сущность метода заключается в удалении больших по модулю значений статистического ряда чисел. Для этого при фиксированном слое  $j$  для центральной точки  $u_k^j$  после того, как программа нашла решение  $res(k, j) = u_k^j, k = 1, \dots, n \cdot nx$ , строится вектор  $um(kkk)$  размерности  $2lm + 1$ , где  $lm$  – параметр окна фильтрации:

```
do k = lm + 1, n1 · nx + 1 - lm; kkk = 0;
do kk = -lm, lm; kkk = kkk + 1; um(kkk) = res(k + kk, j); enddo;
call sort_real(um, um1); res1(k, j) = um1(lm + 1); enddo
k, kk, kkk – целочисленные переменные.
```

Вектор  $um(kkk)$  сортируется по возрастанию значений, получается вектор  $um1(kkk)$  той же размерности но отсортированный. Выбираем центр отфильтрованного окна  $um1(lm + 1)$ . Если устранить выбросы решения (отфильтровать) на предыдущем слое, то в следующем слое решение не будет иметь больших значений. Просмотр численного решения при различном числе узлов сетки показывает, что возмущение решения, возникшее на некотором слое, медианной фильтрацией быстро подавляется на следующих слоях.

Для вызова подпрограммы *call sort\_real(um,um1)* необходимо использовать библиотеки  
*Fortran: use dfimsl; use DELIB; use sort\_real\_int* [5].

Для визуализации применялся графический модуль *Compaq Array Vizualizer v1.6* с использованием библиотек *use AVDer; use AVViewer* [6].

Вертикальную компоненту скорости можно найти из формулы (12):

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} \leq 0;$$

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} > 0, f_{2k}^j \neq 0, k = 2, \dots, n \cdot nx, j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$w_k^j = w_k^{j-1}, \text{ если } w_k^j = 0.$$

Напомним, что конечная цель задачи – отыскание поля направлений:

$$napr(j,k) = \arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j > 0; \quad napr(j,k) = \pi + \arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j < 0;$$

$$napr(j,k) = \frac{\pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j > 0;$$

$$napr(j,k) = -\frac{\pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j < 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq napr(j,k) < \frac{3}{2}\pi.$$

Поле направлений озера (рис. 2) раскрыто программой.

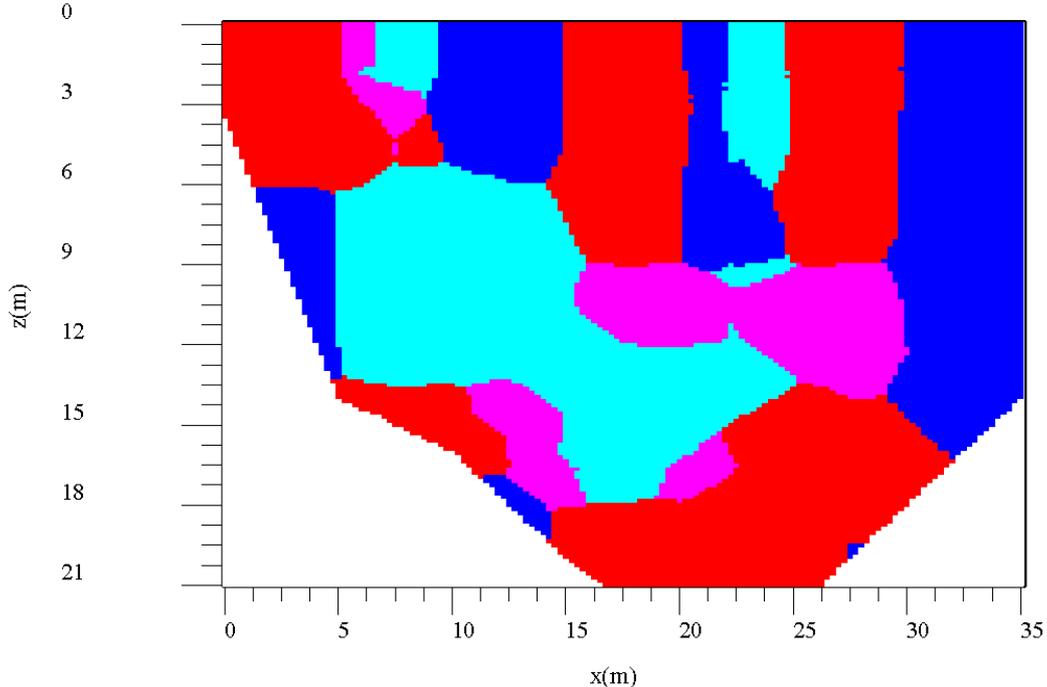


Рис. 2. Поле линий тока  $nx = 20$ ,  $nz = nx$ ,  $n = 7$ ,  $n1 = 7$ ,  $ll = nx/2$ ,  $lm = nx$

$$\alpha_{k1}^{j1} = \text{alfa}(j1,k1) = 2 \cdot 10^{-4} \left( \frac{j1-1}{n1} \right) \left[ \frac{M^2}{c} \right], \quad j1 = 1, \dots, n1+1$$

$$q_{k1}^j = 4,5 \cdot 10^{-5} \left( \frac{j-1}{n1 \cdot nz} \right) \left[ \frac{K}{c} \right], \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1$$

Теплые частицы воды, поднимающиеся вверх к поверхности озера с направлением скорости

$$\left| \text{napr}(j,k) + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{8},$$

имеют насыщенный красный цвет.

Частицы воды, поднимающиеся менее отвесно к поверхности, окрашены в светло-красный цвет:

$$\frac{\pi}{2} \geq \left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| > \frac{\pi}{8}.$$

Аналогично, холодные частицы воды, опускающиеся более отвесно, окрашены в темно-синий цвет:

$$\left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{8}.$$

Частицы с более пологим опусканием имеют бирюзовый цвет:

$$\frac{\pi}{2} \geq \left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| > \frac{\pi}{8}.$$

Кроме того, графический модуль программы использует принцип цветового осреднения, а именно определяется цвет максимального числа элементов, попавших в квадрат со стороной  $2 \cdot ll + 1$ , центральный элемент которого программа окрашивает в тот же цвет. В программе использованы параметры:

$$nx = 20, \quad nz = nx, \quad n = 7, \quad n1 = 7, \quad ll = nx/2, \quad lm = nx.$$

#### Анализ численного решения и выводы

1. На рисунке 1 видны две крупные конвективные струи, выходящие на поверхность озера в точках  $x = 15 \dots 20$  м,  $x = 25 \dots 30$  м, точно так же и на рисунке 2:  $x = 15 \dots 20$  м,  $x = 25 \dots 30$  м. Области конвективных струй, граничащих со свободной поверхностью, на рисунке 1 и на рисунке 2 полностью повторяют друг друга. Кроме того, пространственно совпадают деформированные области температурного поля (см. рис. 1) с выходом конвективных струй и поля линий тока (см. рис. 2) в нижней части озера.

Таким образом, численная схема (18)'–(21)' правильно описывает поле направлений скорости.

2. Структура раскрашенных областей и их взаимное расположение сохраняется при увеличении числа узлов сетки – чисел  $nx$ ,  $nz$ , то есть существует предел решения с увеличением числа узлов как требование сходимости численной схемы.

3. Метод медианной фильтрации приводит к релаксации больших по модулю значений горизонтальной компоненты скорости.

4. Потребуем для поля направлений **условие связности конвективной струи**. Это значит, что можно подняться вдоль непрерывной кривой от дна озера до его поверхности исключительно по конвективным красным областям, отображенным на рисунке 2. Поскольку визуально обнаружены конвективные струи на поверхности озера по выходу газа и бурлению поверхности, а также многократно застывшая сера на датчике температуры, то **условие связности конвективной струи** является вполне естественным. На рисунке 2 мы видим мощную конвективную струю, поднимающуюся от дна до поверхности  $x = 25 \dots 30$  м.

Таким образом, в численной модели (18)'–(21)' **условие связности конвективной струи** также выполнено.

5. На рисунке 2 видим, что скорость частиц воды в струе  $x = 25 \dots 30$  м направлена отвесно в верхней и нижней части у дна части озера. В среднюю часть конвективной струи  $z = 25 \dots 30$  м, вероятно, вовлекается холодный поток воды, изменяющий вертикальное движение частиц воды. Экспериментально обнаружено, что на глубине  $z = 13$  м ( $x = 35$  м) с максимальным градиентом температуры на рисунке 1 в озеро попадают холодные пресные воды и втягиваются в струю, двигаясь устойчиво по горячему кислотному раствору в нижней части озера. Именно, эти воды могут стать причиной деления струи на две. Кроме того, глубина опускания холодных вод в правой части озера больше, чем в левой (см. рис. 2). В левой верхней части (см. рис. 2) видна область, в которой частицы движутся к поверхности. Эта область совпадает с истоком вытекающего из озера ручья, в котором температура воды  $40$  °С. Указанные особенности также согласуются с экспериментальными данными.

6. Поток тепла и плотность потока тепла, проходящие через геотермальное озеро, а также коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, характеризующие физические свойства среды, сравнимы с аналогичными параметрами в паровых котлах и бойлерах ТЭЦ большой и средней мощности. Таким образом, построенная математическая модель и описанная программа могут быть полезными

для изучения тепломассообмена на ТЭЦ большой и средней мощности, в бойлерах мощных медицинских стерилизаторов. Кроме того, дополнив постановку задачи уравнением диффузии с турбулентными коэффициентами обмена для взвешенных дымовых канцерогенных частиц, можно на базе полученной модели рассмотреть задачу теплообмена и переноса дыма при пожаре в закрытом помещении или лесном массиве, где потоки тепла, проходящие через среду, также велики.

Указанный в работе метод остается в силе, если вместо поля температуры рассматривать другие скалярные поля: солёности, влажности, концентрации взвешенных суспензионных частиц и т.д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов, Г.А. Некоторые геохимические особенности подводного извержения в кальдере Академии Наук 2–3 янв. 1996 г. / Г.А. Карпов // Вестн. Камчатской региональной организации «Учебно-научный центр». Серия: Науки о Земле. – 2004. – № 4. – С. 81–89.
2. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер; пер. с англ. Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
4. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика / А.С. Монин, А.М. Яглом. Ч. I. – М., 1965. – 640 с.
5. Красиков, И.В. Алгоритмы. Просто как дважды два / И.В. Красиков, И.Е. Красикова. – М.: Эксмо, 2007. – 256 с.
6. Бартедьев, О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL / О.В. Бартедьев. Ч. 2. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. – 325 с.
7. Бартедьев, О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL / О.В. Бартедьев. Ч. 3. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. – 372 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит. 1986. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.
9. Пастухов, Д.Ф. Исследование особенностей термического режима геотермального озера открытого типа: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Д.Ф. Пастухов. – М., 1996.
10. The role of aeration in forming the thermal regime of a geothermal lake Anisimova E.P. [et al.] / Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics. – 1996. – Т. 32, № 2. – С. 268–272.

Поступила 09.03.2015

#### PROBLEM OF THE BUILDING OF THE CURRENT LINE FIELD ON WARM-UP CUT SHEPHERD

*YU. PASTUHOV, D. PASTUHOV*

*In given work by numerical methods is considered two-dimensional stationary problem of the recalculation of the cut of the warm-up field on field of the directions to velocities of water. The Warm-up field geothermal lake was measured by bridge of the direct current. For decision of the problem it is enough to use the equation to heat conductivity, equation to continuity, border conditions for velocity of the particles to liquids. For reinforcement of stability is used method median to filtering horizontal components to velocities on each layer. New is a notion to coherence heated stream.*